数理解析研究所講究録
第 829 巻 1993 年 168-174

KKM 定理について

東京工業大学理学部 塩路直樹 (Naoki Shioji)

1 序

1929 年、Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz [11] は有限次元単体における閉集合族の共通点定理を示した。KKM というのは、この 3 人の名前の頭文字を並べたものである。1961 年、Fan [4] は一般の線形位相空間におけるこの定理の拡張を得た。どのような定理かを紹介しよう。その前に、定義を述べる。E を線形空間とし、X をその部分集合とする。X から E への多価写像 G が、X の任意の有限部分集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ に対して

$$\mathrm{co}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} Gx_i$$

を満たすとき、G を KKM 写像と呼ぶ。ここで、$\mathrm{co}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ は $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の凸包を表すとする。また、この論文の中に現れる位相空間や線形位相空間はすべて Hausdorff 分離公理を満たすものとする。

定理 A (Fan). X を線形位相空間 E の部分集合とし、G を 次の条件を満たす X から E への KKM 写像とする。

(i) X の各元 x に対して、Gx は閉集合である。

(ii) Gx_0 がコンパクトとなる $x_0 \in X$ が存在する。

このとき、$\bigcap_{x \in X} Gx \neq \emptyset$ が成り立つ。

Takahashi [14]・Dugundji-Granas [2]・Fan [6]・ Lassonde [12] らによってこの定理の拡張が得られている。著者による [13] もその一つである。その論文では、多価写像 G が KKM であるという条件を拡張して $\bigcap_{x \in X} Gx \neq \emptyset$ を満たす十分条件を示している。KKM 写像というのはある空間の部分集合から同じ空間への写像であるが、線形空間 E の部分集合 X から位相空間 Y への多価写像 G に対し、$\mathrm{co}X$ から Y への多価写像 T を導入することにより、X の任意の有限部分集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ に対して

$$T(\mathrm{co}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Gx_i$$

となるという条件でKKMの条件を置き換えたのである。$Y=E$ かつ T が恒等写像の場合を考えれば、KKM写像の拡張になっていることは明らかである。この拡張によって得られる定理（以下の定理 1）は、単に定理 Aの拡張であるというだけでなく、いくつかの応用が [13] で示されている。

本論文では、この定理を用いてまず Fan [5] および Browder [1] の不動点定理の拡張を示した。この拡張は Ha [8] の結果の拡張にもなっている。どういう結果を得ているかを述べると、線形空間の凸集合 X からコンパクト位相空間 Y への写像 A, T がある条件のもとで

$$Ax_0 \cap Tx_0 \neq \emptyset$$

を満たす x_0 を持つことである。その際に、弱い上半連続性を T に仮定し、すべての $x \in X$ に対して Ax が開集合であることおよびすべての $y \in Y$ に対して $A^{-1}y$ が空でない凸集合であることを仮定している。A と T の間には特に関係はないのであるが、上記のように共通点を持つのである。この定理を用いて、Himmelberg の不動点定理 [9] の拡張を得た。Himmelberg の不動点定理は、有名な Kakutani [10]・Fan [3]・Glicksberg [7] の不動点定理の拡張である。拡張した点は、上半連続写像が凸集合に値をとらなければならないというところを、acyclic な集合に値をとってもよいというところである。ただし、ホモロジー群を考えているときは、有理数体を係数に持つ Cěch ホモロジーを考えている。この節の最後に、上半連続性の定義を述べておく。X, Y を位相空間とする。T を X から Y への多価写像とし、各 $x \in X$ に対して $Tx \neq \emptyset$ とする。$x_0 \in X$ とする。Tx_0 を含む Y の任意の開集合 G に対して $x \in U$ ならば $Tx \subset G$ を満たす x_0 の近傍 U が存在するとき、T は x_0 で上半連続であるという。X の各点で上半連続ならば T は X 上で上半連続であるという。

2 KKM定理・共通点定理・不動点定理

まず、KKM定理の拡張 [13] を示す。

定理 1. X を線形空間 E の部分集合とし、Y を位相空間とする。X から Y への多価写像 G および co$X$ から Y への多価写像 T が次の条件を満たすとする。

(i) co$X$ の各点 x に対して、Tx は Y の空でないコンパクトで acyclic な部分集合になる。

(ii) X の任意の有限部分集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ に対して

$$T(\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Gx_i$$

が成り立つ。

(iii) X の任意の有限部分集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ に対して、T の定義域を $\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$ に制限し、$\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$ から Y への多価写像とみたとき、この多価写像は上半連続である。ただし、$\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$ には有限次元空間の部分集合として入る普通の位相が入っているとする。

(iv) X の任意の有限部分集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ に対して、$T(\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\})$ の相対位相で $Gx_i \cap T(\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\})$ は閉集合になる。

このとき、$\{Gx : x \in X\}$ は有限交叉性を持つ。より詳しく述べると、X の任意の有限部分集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ に対して、

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} Gx_i\right) \cap T(\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}) \neq \emptyset$$

が成り立つ。

次に、定理 1を用いて共通点定理を示す。A と T の間には何ら関係はないが、次の条件で、共通点が存在することが示される。

定理 2. X を線形空間 E の凸部分集合とし、Y をコンパクトな位相空間とする。X から Y への多価写像 A, B, T は次の条件を満たすとする。

(i) X の各点 x に対して、次が成立する。

(a) Tx は Y の 空でないコンパクトで acyclic な部分集合になる。

(b) Bx は Y の開集合である。

(c) $Bx \subset Ax$ となる。

(ii) Y の各点 y に対して、次が成立する。

(a) $A^{-1}y$ は凸集合である。

(b) $B^{-1}y \neq \emptyset$ となる。

(iii) X の任意の有限部分集合 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ に対して、T の定義域を $\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}$ に制限し、$\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}$ から Y への多価写像とみたとき、この多価写像は上半連続である。ただし、$\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}$ には有限次元空間の部分集合として入る普通の位相が入っているとする。

このとき、

$$Ax \cap Tx \neq \emptyset$$

を満たす $x \in X$ が存在する。

証明。 結論を否定する。すなわち、すべての $x \in X$ に対して

$$Tx \cap Ax = \emptyset$$

とする。$x \in X$ に対して

$$Gx = Y \setminus Bx$$

と置き、X から Y への多価写像 G を定める。X の任意の有限部分集合 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ に対して、

$$T(\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Gx_i$$

となることを示す。このことを否定する。すなわち、

$$\{x_1,\cdots,x_n\} \subset X, \quad x \in \mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}, \quad y \in Tx, \quad y \notin \bigcup_{i=1}^{n} Gx_i$$

を満たす $x_1,\cdots,x_n,x,y$ が存在すると仮定する。このとき、

$$y \in Bx_i, \quad i = 1,\cdots,n$$

となる。$B^{-1}y \subset A^{-1}y$ 及び $A^{-1}y$ が凸であることから $x \in A^{-1}y$ を得る。これは $y \in Ax \cap Tx$ を意味し、矛盾である。よって、X の任意の有限部分集合 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ に対して、

$$T(\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Gx_i$$

となっていることがわかった。定理 1 により、

$$\bigcap_{x \in X} Gx \neq \emptyset$$

である。$y \in \bigcap_{x\in X} Gx$ とすると、すべての $x \in X$ に対して $y \notin Bx$ となり、$B^{-1}y = \emptyset$ を意味するので仮定に矛盾する。よって、証明された。□

系 1. X を線形空間 E の凸部分集合とし、Y をコンパクトな位相空間とする。X から Y への多価写像 A, T は次の条件を満たすとする。

(i) X の各点 x に対して、次が成立する。

(a) Tx は Y の 空でないコンパクトで acyclic な部分集合になる。

(b) Ax は Y の開集合である。

(ii) Y の各点 y に対して、$A^{-1}y$ は空でない凸集合であるとする。

(iii) X の任意の有限部分集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ に対して、T の定義域を $\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$ に制限し、$\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$ から Y への多価写像とみたとき、この多価写像は上半連続である。ただし、$\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$ には有限次元空間の部分集合として入る普通の位相が入っているとする。

このとき、

$$Ax \cap Tx \neq \emptyset$$

を満たす $x \in X$ が存在する。

最後に、系 1を用いて Himmelberg の不動点定理 [9] の拡張定理を示す。

定理 3. E を局所凸な線形位相空間とし、X を E の凸部分集合とする。さらに、C を X のコンパクトな部分集合とする。$T : X \to 2^C$ は上半連続で、任意の $x \in X$ に対して Tx は C の空でないコンパクト acyclic な部分集合であるとする。このとき、T は不動点を持つ。

証明。 絶対凸な原点の開近傍 U を任意にとる。$\mathcal{U}_E$ の任意の元 U をとる。

$$(x_U + U) \cap Tx_U \neq \emptyset$$

を満たす $x_U \in X$ が存在することを示す。$x \in X$ に対して

$$Ax = (x + U) \cap C$$

と $A : X \to 2^C$ を定めると、Ax は C の相対位相で開集合である。また、$y \in C$ に対して

$$\begin{aligned} A^{-1}y &= \{x \in X : y \in (x + U) \cap C\} \\ &= \{x \in X : y \in x + U\} \\ &= \{x \in X : x \in y + U\} \end{aligned}$$

だから $A^{-1}y$ は空でない凸集合である。系 1により、$(x_U+U)\cap Tx_U\neq\emptyset$ となる x_U が存在する。以上から、絶対凸な原点の任意の開近傍 U に対して、$y_U\in(x_U+U)\cap Tx_U$ を満たす X の元 x_U および C の元 y_U が存在する。C はコンパクトだから、C のある元 y_0 に収束する部分有向点列 $\{y_{U_\alpha}\}$ を $\{y_U\}$ は持つ。$x_{U_\alpha}\to y_0$ でもあるから、$y_0\in Ty_0$ となる。よって、証明された。□

参考文献

[1] F. E. Browder, *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces,* Math. Ann. 177 (1968), 283-301.

[2] J. Dugundji and A. Granas, *KKM maps and and variational inequalities,* Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 5 (1978), 679-682.

[3] K. Fan, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci., 38 (1952) 121-126.

[4] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem,* Math. Ann. 142 (1961), 305-310.

[5] K. Fan, *Sur un théorème minimax,* C. R. Acad. Sci. (Paris), 259 (1964) 3925-3928.

[6] K. Fan, *Some properties of convex sets related to fixed point theorems,* Math. Ann. 266 (1984), 519-537.

[7] L. L. Glicksberg, *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points,* Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 170-174.

[8] C. W. Ha, *Minimax and fixed point theorems,* Math. Ann. 248 (1980), 73-77.

[9] C.J. Himmelberg, *Fixed points of compact multifunctions,* J. Math. Anal. Appl. 38 (1972), 205-207.

[10] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem,* Duke Math. J., 8 (1941), 457-459.

[11] B. Knaster, C. Kuratowski and S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensional simplexe,* Fund. Math. XIV (1929), 132-137.

[12] M. Lassonde, *On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics,* J. Math. Anal. Appl. 97 (1983), 151-201.

[13] N. Shioji, *A further generalization of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem,* Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), 187-195.

[14] W. Takahashi, *Fixed point, minimax, and Hahn-Banach theorems,* Proc. Symp. Pure Math. 45 (1986), part 2, 419-427.