数理解析研究所講究録
第 829 巻 1993 年 175-191

Minimization Theorems and Fixed Point Theorems

東工大 理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

Caristi [2] は 1976 年に完備距離空間における有用な不動点定理を証明した．それと前後して，Ekeland [4] はその空間における凸性を仮定しない最小値定理を証明し，その有用性をいくつかの例をもって示した．その後高橋 [16] は完備距離空間における次の最小値定理を証明し，これを用いて，Caristi や Ekeland の定理の簡単な別証明を与えた．

定理 [16]　X を完備距離空間とし，$f: X \to (-\infty, \infty]$ を proper で下に有界な下半連続関数とする．このとき，$\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$ となる $u \in X$ に対して，$f(v) + d(u, v) \leq f(u)$ となる u と異なる $v \in X$ が存在するならば

$$f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．

しかしながら，この定理は $f(x) = x^2$ のような関数にはあてはまらず，この定理の改良が問題となった．ここではまず初めにこの問題を解決するような定理を証明する．つぎに一様

凸なBanach空間上で2つの実数値関数を考える．1つは，Eを一様凸なBanach空間とし，$\mathcal{B}$を有界集合を少なくとも1つ含むようなE上のfilterbaseとする．このときのD(⊂E)上の実数値関数

$$r(x,\mathcal{B})=\inf_{A\in\mathcal{B}}\sup_{y\in A}\|x-y\|,\quad {}^{\forall}x\in D$$

である．他の1つは，$m(S)$をある集合S上の有界実数値関数の全体とし，Xを$m(S)$の1を含む部分空間とする．μをX上のsubmeanとし，$\{x_t : t\in S\}$をEの有界集合とする．このときのD上の実数値関数

$$g(x)=\mu_t\|x_t-x\|^2,\quad {}^{\forall}x\in D$$

である．$r(x,\mathcal{B})$，$g(x)$はともにD上の連続関数であり，Dを閉凸集合とすると凸関数となり，$\|x_n\|\to\infty$ならば，

$$r(x_n,\mathcal{B})\to\infty,\quad g(x_n)\to\infty$$

をも満たす．そこで，$r(x,\mathcal{B})$，$g(x)$ともにD上で最小値をとる．さらに一様凸性を使うとこの最小値に達する点は一意である．このことを使って前者のcaseでは，nonexpansiveな集合値写像の不動点定理を得，後者のcaseでは，nonexpansive半群に対する非線形，非可換な不動点定理を得る．前者はLim [6] の定理の別証明にもなっており，後者はLau-Takahashi [5] の拡張定理になっている．最小値定理と不動点定理の関わりを見ていただければ幸いである．

1. 完備距離空間における最小値定理

Xを位相空間とし，$f: X \to (-\infty, \infty]$とする．このとき，$f$が下半連続であるとは，任意の実数$\alpha$に対して，集合

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

が常に閉集合となることである．

定理1　Xを完備距離空間とし，$\alpha > 0$とする．TをXからXへの連続写像とし，$f: X \to (-\infty, \infty]$をproperで下に有界な下半連続関数とする．このとき，もし$\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$となる$u \in X$に対して

$$f(v) + \alpha \max\{d(v, Tu), d(Tv, Tu)\} \leq f(u)$$

となる$v \neq Tu$または$Tv \neq Tu$となる$v \in X$が存在するならば$f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$となる$x_0 \in X$が存在する．

証明　すべての$u \in X$に対して

$$\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$$

であるとしよう．$f(u) < \infty$となる$u \in X$を固定し，$u_0 = u$とする．$u_{n-1} \in X$が知られているものとし，u_nを帰納的に次のように定義しよう．まず

$$S_n = \{w \in X : f(w) + \alpha \max[d(w, Tu_{n-1}), d(Tw, Tu_{n-1})] \leq f(u_{n-1})\}$$

とし，$u_n \in S_n$を

$$f(u_n) \leq \inf_{w \in S_n} f(w) + \frac{1}{2}\{f(u_{n-1}) - \inf_{w \in S_n} f(w)\} \quad \cdots \quad (1)$$

を満たすようにとろう．実際，$S_n \neq \emptyset$ なので，$x \in S_n$ とすると

$$0 < \alpha \max\{d(x, Tu_{n-1}), d(Tx, Tu_{n-1})\} \leq f(u_{n-1}) - f(x)$$
$$\leq f(u_{n-1}) - \inf_{x \in S_n} f(x)$$

が成立し，よって(1)を満たすような $u_n \in S_n$ がとれる．ここでこの点列 $\{u_n\}$ が Cauchy 列であることを証明しよう．実際，$m > n$ とすると，まず次の3つの不等式がいえる．

$$\begin{aligned}\alpha d(Tu_n, Tu_m) &\leq \alpha d(Tu_n, Tu_{n+1}) + \alpha d(Tu_{n+1}, Tu_{n+2}) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \alpha d(Tu_{m-1}, Tu_m) \\ &\leq f(u_n) - f(u_{n+1}) + f(u_{n+1}) - f(u_{n+2}) + \cdots \\ &\qquad \cdots + f(u_{m-1}) - f(u_m) \\ &= f(u_n) - f(u_m) \qquad \cdots \quad (2)\end{aligned}$$

$$\alpha d(u_m, Tu_{m-1}) \leq f(u_{m-1}) - f(u_m) \qquad \cdots \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\alpha d(u_n, Tu_{m-1}) &\leq \alpha d(u_n, Tu_{n-1}) + \alpha d(Tu_{n-1}, Tu_n) \\ &\qquad + \alpha d(Tu_n, Tu_{n+1}) + \cdots + \alpha d(Tu_{m-2}, Tu_{m-1}) \\ &\leq f(u_{n-1}) - f(u_n) + f(u_{n-1}) - f(u_n) \\ &\qquad + f(u_n) - f(u_{n+1}) + \cdots + f(u_{m-2}) - f(u_{m-1}) \\ &= f(u_{n-1}) - f(u_n) + f(u_{n-1}) - f(u_{m-1}) \qquad \cdots \quad (4)\end{aligned}$$

(3), (4)を使うと

$$\begin{aligned}\alpha d(u_n, u_m) &\leq \alpha d(u_n, Tu_{m-1}) + \alpha d(Tu_{m-1}, u_m) \\ &\leq f(u_{n-1}) - f(u_n) + f(u_{n-1}) - f(u_{m-1}) \\ &\qquad + f(u_{m-1}) - f(u_m)\end{aligned}$$

となり

$$d(u_n, u_m) \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$

となることがわかる．よって $\{u_n\}$ はCauchy列である．そこで $u_n \to v$ となる $v \in X$ が存在する．(2)式において，$m \to \infty$ とすると

$$\alpha d(Tu_n, Tv) \leq f(u_n) - f(v)$$

を得る．また仮定より

$$f(z) + \alpha \max\{d(z, Tv), d(Tz, Tv)\} \leq f(v)$$

となる $z \in X$ ($z \neq Tv$ または $Tz \neq Tv$) が存在するので

$$\begin{aligned} f(z) &\leq f(v) - \alpha d(z, Tv) \\ &\leq f(u_n) - f(v) - \alpha d(Tu_n, Tv) + f(v) - \alpha d(z, Tv) \\ &\leq f(u_n) - \alpha d(Tu_n, z) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} f(z) &\leq f(v) - \alpha d(Tz, Tv) \\ &\leq f(v) - \alpha d(Tz, Tv) + f(u_n) - f(v) + \alpha d(Tu_n, Tv) \\ &= f(u_n) - \alpha d(Tz, Tu_n) \end{aligned}$$

を得る．よって

$$f(z) + \alpha \max\{d(z, Tu_n), d(Tz, Tu_n)\} \leq f(u_n)$$

である．これは $z \in S_{n+1}$ (nは任意) を意味する．これと(1)より

$$2f(u_n) - f(u_{n-1}) \leq \inf_{w \in S_n} f(w) \leq f(z)$$

を得る．よって

$$f(z) < f(v) \leq \lim_{n\to\infty} f(u_n) \leq f(z)$$

となり，これは矛盾である．これで証明は完了する．

定理1と同様の証明方法によって，次の定理も証明することができる．

定理2　Xを完備距離空間とし，$f: X \to R$を下に有界な下半連続関数とする．TをXからXへの連続写像とする．このとき，$\inf_{x\in X} f(x) < f(u)$となる$u\in X$に対して

$$f(Tv) + d(u,v) \leq f(Tu)$$

となるようなuと異なる$v\in X$が存在するならば

$$f(x_0) = \min_{x\in X} f(x)$$

となる$x_0\in X$が存在する．

2. 集合値写像の不動点定理

Xを空でない集合とし，$\mathfrak{F}$をXの部分集合からなる空でない族とする．このとき，$\mathfrak{F}$がX上のfilterであるとは，

(1) $\phi \notin \mathfrak{F}$; (2) $A\subset B$, $A\in\mathfrak{F} \Rightarrow B\in\mathfrak{F}$; (3) $A, B\in\mathfrak{F} \Rightarrow A\cap B\in\mathfrak{F}$; を満たすことである．$\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$がX上のfiltersで，$\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}_2$を満たすならば，$\mathfrak{F}_2$は$\mathfrak{F}_1$よりfinerであるといわれる．$X$上のfilter $\mathfrak{U}$は

$$\mathfrak{U}\subset\mathfrak{F},\ \mathfrak{F}\text{は}X\text{上の filter} \Rightarrow \mathfrak{U}=\mathfrak{F}$$

を満たすならばultrafilterであるといわれる．Xの部分集合からなる空でない族$\mathfrak{B}$がX上のfilterbaseであるとは，

(1) $\phi \notin \mathcal{B}$; (2) $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$に対して，$A_3 \subset A_1 \cap A_2$となる$A_3 \in \mathcal{B}$が存在する；を満たすことである．$\mathcal{B}$がX上のfilterbaseであるとき，$\mathcal{F} = \{A \subset X : B \subset A, B \in \mathcal{B}\}$はXのfilterになる．このとき，$\mathcal{B}$は$\mathcal{F}$のbaseであるといわれる．Xを位相空間とし，$\mathcal{B}$をX上のfilterbaseとしよう．$\mathcal{B}$がXの点$x$に収束するとは，$x$の任意の近傍Vに対して，$A \subset V$となる$\mathcal{B}$の元Aが存在することである．$\mathcal{U}$がコンパクト集合X上のultrafilterであるとき，$\mathcal{U}$はXのある点に収束することが知られている．また$\mathcal{U}$が集合X上のultrafilterで，φがXからDへの写像であるなら，$\varphi(\mathcal{U})$はD上のfilterbaseになる．さらに，この$\varphi(\mathcal{U})$はD上のultrafilterを生成する．実際，$\mathcal{U}$がX上のultrafilterであるから，$\varphi(\mathcal{U})$がD上のfilterbaseとなることは明らかである．

$$\mathcal{B} = \{B \subset D : \varphi(A) \subset B \text{ for some } A \in \mathcal{U}\}$$

とし，$\mathcal{K}$を$\mathcal{K} \supset \mathcal{B}$となるD上のfilterとしよう．$K \in \mathcal{K}$なら$\varphi^{-1}K \in \mathcal{U}$または$\varphi^{-1}K^c \in \mathcal{U}$である．$A = \varphi^{-1}K^c \in \mathcal{U}$とすると，$\varphi(A) = \varphi(\varphi^{-1}K^c) \subset K^c$であるから$K^c \in \mathcal{B}$となる．これは矛盾である．よって$\varphi^{-1}K \in \mathcal{U}$である．$\varphi(\varphi^{-1}K) \subset K$なので，$K \in \mathcal{B}$を得る．だから$\mathcal{K} = \mathcal{B}$となる．これは$\mathcal{B}$がD上のultrafilterであることを意味する．

Eを一様凸なBanach空間とし，$\mathcal{B}$を有界集合を少なくとも1つ含むようなE上のfilterbaseとする．ここで$D(\subset E)$上の

実数値関数

$$r(x,\mathcal{B}) = \inf_{A\in\mathcal{B}} \sup_{y\in A} \|x-y\|, \quad \forall x\in D$$

を考えると,

$$|r(x,\mathcal{B}) - r(y,\mathcal{B})| \leq \|x-y\|, \quad \forall x, y\in D$$

を満たすから, D上で連続となる. またDを閉凸集合とすると, $r(\cdot,\mathcal{B})$ は凸関数となり, $\|x_n\|\to\infty$ ならば $r(x_n,\mathcal{B})\to\infty$ をも満たすから,

$$r(u_0,\mathcal{B}) = \min_{x\in D} r(x,\mathcal{B})$$

となる $u_0\in D$ が存在する. ここで空間Eの一様凸性を使うとこのような u_0 が一意であることがわかる. この結果を用いて次の定理を証明しよう.

定理3 [6]　XをL一様凸Banach空間Eの有界閉凸集合とする. TをXからXへの集合値nonexpansive写像で, 任意の $x\in X$ に対して, Tx が空でないコンパクト集合であるとする. このとき, Xの中にTの不動点が存在する.

証明　$x_0\in X$ とする. $n=2,3,\cdots$ に対して

$$T_n x = \frac{1}{n}x_0 + \left(1-\frac{1}{n}\right)Tx, \quad \forall x\in X$$

を定義する. このとき, Nadlerの不動点定理 [9] を用いると $T_n x_n \ni x_n$ となる T_n の不動点 x_n が存在する. この点列 $\{x_n\}$ は $d(x_n, Tx_n)\to 0\ (n\to\infty)$ を満たす. ここで

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

を定義する．このとき，$\{A_n\}$ は X 上の filterbase となる．$\mathfrak{F}$ を $\{A_n\}$ によって生成される filter とし，$\mathcal{U}$ を $\mathfrak{F}$ より finer な ultrafilter とする．明らかに

$$\inf_{A\in\mathcal{U}} \sup_{x\in A} d(x, Tx) = 0$$

である．ここで $u_0 \in X$ を $r(u_0, \mathcal{U}) = \inf_{x\in X} r(x, \mathcal{U})$ を満たす一意の元とすると，任意の元 $x\in X$ に対して，Tx が空でないコンパクト集合であることより，

$$\|x - Sx\| = d(x, Tx),\quad \|Sx - Px\| = d(Sx, Tu_0)$$

を満たすような $Sx \in Tx$, $Px \in Tu_0$ を得ることができる．X から Tu_0 への写像 P に対して，$P(\mathcal{U})$ は Tu_0 上の filterbase になり，さらに $P(\mathcal{U})$ によって生成される filter は ultrafilter になる．Tu_0 はコンパクトなので，$P(\mathcal{U})$ は Tu_0 の中に極限 p_0 をもつ．この p_0 に対して，H を Hausdorff metric とすると，

$$\begin{aligned}
r(p_0, \mathcal{U}) &= \inf_{A\in\mathcal{U}} \sup_{x\in A} \|p_0 - x\| \\
&\leq \inf_{A\in\mathcal{U}} \sup_{x\in A} \{\|p_0 - Px\| + \|Px - Sx\| + \|Sx - x\|\} \\
&= \inf_{x\in\mathcal{U}} \sup_{x\in A} \{\|p_0 - Px\| + d(Sx, Tu_0) + d(x, Tx)\} \\
&\leq \inf_{A\in\mathcal{U}} \sup_{x\in A} \{\|p_0 - Px\| + H(Tx, Tu_0) + d(x, Tx)\} \\
&\leq \inf_{A\in\mathcal{U}} \sup_{x\in A} \{\|p_0 - Px\| + \|x - u_0\| + d(x, Tx)\}
\end{aligned}$$

$$= \inf_{A \in \mathfrak{A}} \sup_{x \in A} \|x - u_0\|$$
$$= r(u_0, \mathfrak{A})$$

を得る．だから $u_0 = p_0 \in Tu_0$ を得る．これで証明は完了する．

3. nonexpansive 半群に対する共通不動点定理

Sをある集合とし，$m(S)$をS上の有界実数値関数のつくるBanach空間とする．Xを1を含む$m(S)$の部分空間とする．このとき，X上の実数値関数μは次の4つの条件を満たすならX上のsubmeanといわれる[8]．

(1) すべての$f, g \in X$に対して，$\mu(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g)$である；

(2) すべての$f \in X$と$\alpha \geq 0$に対して，$\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f)$である；

(3) $f \leq g$ならば$\mu(f) \leq \mu(g)$である；

(4) すべての定数cに対して，$\mu(c) = c$である．

μをX上のsubmeanとするとき，$f \in X$に対して，時と場合によっては$\mu(f)$を$\mu_t(f(t))$と書くこともある．

次の命題は一様凸なBanach空間上の存在定理を証明する上で大切なものである([18], [19])．

補助定理 $p > 1$, $b > 0$とする．このとき，Banach空間Eが一様凸となるための必要十分条件は，$g(0) = 0$,

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\|^p \leq \lambda \|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - W_p(\lambda)\, g(\|x-y\|),$$
$$\forall x, y \in B_b,\ 0 \leq \lambda \leq 1$$

を満たす関数$g: [0, \infty) \to [0, \infty)$で，連続かつ，狭義に増加，

凸であるものが存在することである。ここで，

$$W_p(\lambda)=\lambda(1-\lambda)^p+\lambda^p(1-\lambda)$$

であり，B_bは中心が0，半径bの閉球である。

定理4　Cを一様凸なBanach空間の空でない閉凸集合とし，Sをある集合とする。$\{x_t : t\in S\}$をEの有界集合とし，Xを1を含む$m(S)$の部分空間とする。μをX上のsubmeanとし，任意の$x\in C$に対して，S上の関数

$$f(t)=\|x_t-x\|^2,\ \forall t\in S$$

がXに属するものとする。このとき，

$$r(x)=\mu_t\|x_t-x\|^2,\ \forall x\in C\ ,\quad r=\inf\{r(x) : x\in C\}$$

とするなら，$r(z)=r$となる$z\in C$が一意に存在する。

証明　まずC上の関数$r(\cdot)$が連続で凸となることを示す。$x_n\to x$とする。$M=\sup\{\|x_t-x_n\|+\|x_t-x\| : n=1,2,\cdots,t\in S\}$に対して，

$$\begin{aligned}\|x_t-x_n\|^2-\|x_t-x\|^2&=(\|x_t-x_n\|+\|x_n-x\|)(\|x_t-x_n\|-\|x_t-x\|)\\&\leq M\,|\,\|x_t-x_n\|-\|x_t-x\|\,|\\&\leq M\|x_n-x\|\quad(n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

であるので，

$$\mu_t\|x_t-x_n\|^2\leq\mu_t\|x_t-x\|^2+M\|x_n-x\|$$

である。同様に，

$$\mu_t\|x_t-x\|^2\leq\mu_t\|x_t-x_n\|^2+M\|x_n-x\|$$

である．そこで，$|r(x_n)-r(x)|\leq M\|x_n-x\|$ を得る．これは，$r(\cdot)$ が C 上で連続であることを意味する．α,β を $\alpha+\beta=1$ を満たす非負な数とする．このとき，$x,y\in C$ に対して，

$$\|x_t-(\alpha x+\beta y)\|^2\leq\alpha\|x_t-x\|^2+\beta\|x_t-y\|^2$$

であるので $r(\alpha x+\beta y)\leq\alpha r(x)+\beta r(y)$ である．これは $r(\cdot)$ が凸であることを意味する．つぎに $\|x_n\|\to\infty$ ならば $r(x_n)\to\infty$ となることを示す．実際

$$\|x_n\|^2\leq 2\|x_n-x_t\|^2+2\|x_t\|^2$$

なので，$\|x_n\|^2\leq 2r(x_n)+2M'$（ただし，$M'=\sup\{\|x_t\|^2: t\in S\}$）となり，$\|x_n\|\to\infty$ なら $r(x_n)\to\infty$ を得る．ここで，[1, p.79] を使うと，$r(z)=r$ となる $z\in C$ の存在がわかる．

$$K=\{z\in C: r(z)=r\}$$

とする．このとき，K は空でない閉凸集合となる．また K は有界でもある．実際 $z\in K$ とすると，

$$\|z\|^2\leq 2\|z-x_t\|^2+2\|x_t\|^2$$

なので，$\|z\|^2\leq 2r(z)+2M'=2r+2M'$ を得る．

$\{x_t: t\in S\}\cup K\subset B_a$ となるように $a>0$ をとり，$b=2a$ とする．このとき，$x_t-z_1,\ x_t-z_2\in B_b$ ($^\forall t\in S,\ ^\forall z_1,z_2\in K$) なので，補助定理から，

$$\|x_t-\frac{1}{2}(z_1+z_2)\|^2\leq\frac{1}{2}\|x_t-z_1\|^2+\frac{1}{2}\|x_t-z_2\|^2-\frac{1}{4}g(\|z_1-z_2\|)$$

を得る．いま $z_1 \neq z_2$ とすると

$$r\left(\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right) \leq \frac{1}{2}r(z_1)+\frac{1}{2}r(z_2)-\frac{1}{4}g(\|z_1-z_2\|) < r$$

を得，これは矛盾である．よって $r(z)=r$ となる $z \in C$ は一意に存在する．

S を semitopological な半群とし，$s \in S$，$f \in m(S)$ とする．このとき，$(l_s f)(t)=f(st)$，$(r_s f)(t)=f(ts)$ で $m(S)$ 上の作用素 l_s，r_s を定義しよう．X を $m(S)$ の部分空間で，1 を含むものとする．そして，$l_s(X) \subset X$ $(\forall s \in S)$ を満たすものとする．X 上の submean μ が left invariant であるとは

$$\mu(f)=\mu(l_s f),\ \forall s \in S,\ f \in X$$

となるときである．$C(S)$ を S 上の有界連続実数値関数の全体とし，$RUC(S)$ を S 上の有界な右一様連続関数の全体とする．すなわち，$RUC(S)=\{f \in C(S) : s \to r_s f$ が連続$\}$ である．このとき，$RUC(S)$ は 1 を含み，l_s かつ r_s 不変な $C(S)$ の閉な部分空間になる[7]．

定理5．S を semitopological 半群とし，$\mathcal{S}=\{T_t : t \in S\}$ を一様凸Banach空間の閉凸集合 C 上の nonexpansive 写像による S の連続表現とする．$RUC(S)$ が left invariant な submean μ をもつとし，C は $\{T_t u : t \in S\}$ が有界となるような元 u を含むものとする．このとき，$T_s z=z$ $(\forall s \in S)$ となる $z \in C$ が存在

する．

証明の概略　まず $y \in C$ に対して，

$$h(t) = \|T_t u - y\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される関数 h が $RUC(S)$ に属することがいえる．μ を $RUC(S)$ 上の left invariant な submean とし，

$$K = \{z \in C : \mu_t \|T_t u - z\|^2 = \min_{y \in C} \mu_t \|T_t u - y\|^2\}$$

とする．このとき，$z \in K$, $s \in S$ なら

$$\begin{aligned} \mu_t \|T_t u - T_s z\|^2 &= \mu_t \|T_{st} u - T_s z\|^2 \\ &= \mu_t \|T_s T_t u - T_s z\|^2 \\ &\leq \mu_t \|T_t u - z\|^2 \end{aligned}$$

となるから，$T_s z \in K$ がいえる．これは，すべての $s \in S$ に対して，$T_s K \subset K$ を意味する．定理 4 によって，K は一点集合であるから，この点が T_s の共通な不動点になる．

semitopological 半群 S が left reversible であるとは，S の任意の 2 つの閉右イデアルが空でない共通部分をもつことであるが，このとき

$$\mu(f) = \limsup_s f(s), \quad \forall f \in RUC(S)$$

とすることにより，$RUC(S)$ 上に left invariant な submean をつくることができる．だから定理 5 は S が amenable 半群の場合と reversible 半群の場合の不動点定理を同時に拡張した定理ということができる [12], [13].

References

[1] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach spaces, Editura Academiei R.S.R., Bucuresti, 1978.

[2] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241-251.

[3] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators, Part I, Interscience, New York, 1958.

[4] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 443-474.

[5] A. T. Lau and W. Takahashi, Invariant means and semigroups of nonexpansive mappings on uniformly convex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 153 (1990), 497-505.

[6] T. C. Lim, A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1123-1126.

[7] T. Mitchell, Topological semigroups and fixed points, Illinois J. Math., 14 (1970), 630-641.

[8] N. Mizoguchi and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilberts spaces, Nonlinear Analysis, TMA, 14 (1990), 69-80.

[9] S. B. Nadler, Jr., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math., 30 (1969), 475-488.

[10] A. P. Robertson and W. J. Robertson, Topological vector spaces, Cambridge University Press, 1964.

[11] T. Shimizu and W. Takahashi, Fixed point theorems in certain convex metric spaces, Math. Japonica, 37 (1992), 855-859.

[12] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.

[13] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.

[14] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 97 (1986), 55-58.

[15] W. Takahashi, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, Canadian J. Math., 44 (1992), 880-887.

[16] W. Takahashi, Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings, in "Fixed Point Theory and Applications", J. B. Baillon and M. Théra eds., Pitman Research

Notes in Mathematics Series 252, 1992, pp. 397-406.

[17] K.K. Tan and H.K. Xu, Continuous representation of semi-topological semigroup as nonexpansive mappings on Banach spaces, to appear.

[18] H.K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Analysis, TMA, 16 (1991), 1127-1138.

[19] C. Zalinescu, On uniformly convex functions, J. Math. Anal. Appl., 95 (1983), 344-374.