数理解析研究所講究録
第 831 巻 1993 年 46-47

特異および特異に近い差分方程式のSOR法

大阪女子大学　石原 和夫 (Kazuo Ishihara)
大阪女子大学　山本 慎 (Makoto Yamamoto)

1. SOR 法. $A = D - L - U = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$ とし，$D, -L, -U$ は A の対角，狭義の下三角，狭義の上三角成分，$a_{ii} \ne 0$, $1 \le i \le n$, $J = D^{-1}(L+U)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$を Jの固有値，ωを加速係数，$H_\omega = (D - \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right]$, $\rho(J) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$, $\gamma(J) = \max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|; \lambda_i \ne 1\}$, $\delta(J) = \max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|; |\lambda_i| \ne 1\}$, とする．

補題 1 [1, 3]. (i) A が convergent ($\lim_{k\to\infty} A^k = O$) $\Leftrightarrow$ $\rho(A) < 1$.
(ii) $\rho(A) = 1$ とする．A が semiconvergent ($\lim_{k\to\infty} A^k$ が存在) $\Leftrightarrow$ $\gamma(A) < 1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear .

仮定 1 . A が consistently ordered かつ 2-cyclic である．

仮定 2 . $\det A = 0$ かつ Jの固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear である．

補題 2 [3]. A は仮定 1 を満たす正則行列，Jの固有値はすべて実数で $\rho(J) < 1$ とする．$\Rightarrow$ SOR 法は convergent ($\rho(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$), $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega)$ となる．

補題 3 [2]. A は仮定 1 と 2 を満たす特異行列，Jの固有値はすべて実数で$\rho(J) = 1$ とする．$\Rightarrow$ SOR 法は semiconvergent ($\gamma(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$) , $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\delta(J)^2}}$ は $\gamma(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \gamma(H_\omega)$ となる．

2. 差分方程式. 次のような Neumann 型の 2 点境界値問題を考える.

$$(1)\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), & a < x < b \\ y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta. \end{cases}$$

ここで $p(x), q(x), r(x)$ は連続で，$q(x) \geq 0$ とする．$[a,b]$ を $(n-1)$ 等分し，$h = \frac{b-a}{n-1}$, $x_i = a + (i-1)h$, $1 \leq i \leq n$. (1) を中心差分により近似し，$y(x_i)$ の近似解を v_i とすれば (1) の差分方程式は $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ となる.

定理 1. $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}A$ とする．⇒ SOR 法は semiconvergent $(0 < \omega < 2)$ で，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ の解に収束し，$\delta(J) = \cos\frac{\pi}{n-1}$, $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sin\frac{\pi}{n-1}}$.

定理 2 . $q(x) > 0$, $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ とする．⇒ SOR 法は convergent $(\rho(H_\omega) < 1,\ 0 < \omega < 2)$ で $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega)$ となる．さらに，$h = \frac{b-a}{n-1}$ が十分小ならば，$\rho(J) \approx \cos\frac{\pi}{n-1}$, $\omega_{\mathrm{opt}} \approx \frac{2}{1+\sin\frac{\pi}{n-1}}$.

注意. 定理 2 において，誤差評価は $|y(x_i) - v_i| = O(h)$ である．$h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ を満足しない時，SOR 法は種々の挙動をする．数値例は講演時に示す．Dirichlet 型 2 点境界値問題の SOR 法については [4] 参照.

参考文献

[1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.

[2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Math., 6 (1985), 555 - 566.

[3] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice–Hall, 1962.

[4] Ishihara, K. and Yamamoto, M., SOR methods for finite difference equations with a nonsymmetric matrix arising from two-point boundary value problems, Math. Japon., 38 (1993), to appear.