

Some Remarks on a Paper of Sinai-Vul in 1980

龍谷大理工 山口昌哉 (Masaya Yamaguti)

京大理 吉原英昭 (Hideaki Yoshikara)

京大理 西田孝明 (Takaaki Nishida)

常微分方程式系

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

の数値解がほぼ *closed orbit* であり, その上いくつかの条件が
みたされれば, それに近い (1) の *closed orbit* の存在が示せる。

[1] の著者は, このための方法を与え, それを *Lorenz model*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(-x+y) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases}$$

$$r=28, \quad \sigma=6, \quad b=\frac{8}{3},$$

を変換して得られる

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1(x+y)z \\ \frac{dy}{dt} = a_2 y - b_1(x+y)z \\ \frac{dz}{dt} = -a_3 z + (x+y)(b_2 x + b_3 y) \end{cases}$$

に適用して,

$$(x, y, z) = (3.5007\dots, 3.3303\dots, 27)$$

の近くを通る *closed orbit* の存在を論じている。

しかし, [1] で展開された方法をそのまま (2) に適用するのは、無理なようである。(数値が大きすぎて, 判定条件がみたされない。) そこで, [1] の方法をいくつかの点で変更する。

第一に, (1) に対応する差分式を,

$$R(x) = x + \Delta f(x) + \frac{\Delta^2}{2} f_x(x) f(x)$$

から,

$$R(x) = x + \Delta f(x) + \frac{\Delta^2}{2} f_x(x) f(x) + \frac{\Delta^3}{6} \{ f_{xx}(x) f(x) f(x) + f_x(x) f_x(x) f(x) \}$$

に変更する。

次に, x^0 を初期値とする (1) の解を $x(t)$ とし, (1) を $x(t)$ で線型化した方程式の基本解 $L(t, s)$ の満たす方程式, すなわち,

$$\frac{d}{dt} L(t, s) = f_x(x(t)) L(t, s), \quad L(s, s) = I \text{ (単位行列)}$$

に対応する差分式を

$$\bar{L}_{i+1, j} = \{ I + \Delta f_x(x^i) \} \bar{L}_{i, j}, \quad (i \geq j)$$

から

$$\bar{L}_{i+1, j} = \left\{ I + \Delta f_x(x^i) + \frac{\Delta^2}{2} (f_{xx}(x^i) f(x^i) + f_x(x^i) f_x(x^i)) \right\} \bar{L}_{i, j}$$

へかえる。こゝで, $x^{k+1} = R(x^k)$ 。

最後に, 点 $x^0 \in \Gamma$, (Γ は超平面 $x_n = a$) の近傍で定義された Poincaré mapping の二次以上の項 $Q_2(y)$ の Lipschitz constant の評

価式を改良する。

その他、いくつかの細かい変更も必要であるが、主要な変更は以上の三点である。これらの変更により、[1]の方法が、(2)に対して適用できると思われる。

[1] Ja. G. Sinai, E. B. Vul

Discovery of Closed Orbits of Dynamical Systems with the Use of Computers, Journal of Statistical Physics. Vol. 23, No. 1, 1980, 27-47,