

# 部分項の評価順が指定できる項書換え系と その性質について

服部 哲, 岡野 浩三, 東野 輝夫, 谷口 健一

Satoshi Hattori, Kozo Okano, Teruo Higashino and Ken'ichi Taniguchi

大阪大学基礎工学部情報工学科

Department of Information and Computer Sciences, Faculty of Engineering Science,  
Osaka University, Toyonaka, Osaka 560, JAPAN

## 1 まえがき

等式によって表現された系を計算モデルとして扱う枠組みである項書換え系が近年活発に研究されている [1, 2, 3, 4]. 項書換え系では, 等式は向きの付いた書換え規則とみなされ, 項を書換え規則で簡約することによって計算を行う. また, 項書換え系の拡張として条件付き項書換え系が提案されている [5, 6]. 条件付き項書換え系は条件付き書換え規則から成るが, 条件付き書換え規則は条件が成立する場合にのみ項の簡約を行う. 項書換え系や条件付き項書換え系では停止性と合流性が重要な性質であり, それらを満たすための十分条件と, 十分条件を用いた完備化手続きが知られている [1, 2, 3, 4, 5, 6].

条件付き書換え規則における条件としては, 等式の論理積 [5, 6] や, メンバシップ関係 [10, 11] などが提案されている. さらに, 等式の論理積による条件を用いるが, 等号の意味を項の同一性でなく単一化可能性とする条件付き項書換え系 (例えば AMLOG [8, 9]) も提案されている. そのような条件付き項書換え系では, PROLOG のような充足可能解の推論や, 手続き型言語的な計算順序の指定が可能である.

本論文では, 条件の等式の等号の意味を単一化可能性とするような条件付き項書換え系の 1 つの部分クラス (正規形単一化可能条件付き項書換え系, nuCTRS) を提案する. ただし, 本論文では, 条件の等式の成立の判定順序を定めたクラスで, さらに, 出現する変数に制限を加えたクラスの nuCTRS について論じている. その結果, PROLOG のような充足可能解の推論機能はもたず, 手続き型言語的な計算順序の指定に重点をおいたクラスとなっている.

ここでの計算順序の指定とは, 簡約時の部分項の評価順の指定という意味である. 条件の等式の右辺の項を変数とすれば, 等式の左辺での計算結果を単一化代入で保持することになる. その左辺での計算を簡約時の部分項の評価とすれば, 簡約時に項を分割することや, 分割した部分項の評価順を定めることができ

る. 項を分割することは, 例えば, 停止性の判定の際の 2 項間の順序の判定の容易化につながる. また, 分割した部分項の評価順を定めることは, 項書換えの経路を限定することになる. これらによって, 古典的な項書換え系による記述では停止性や合流性を満たさなかった場合でも, それらを満たすようにできる場合がある.

本論文では, 部分項の評価順が指定できるクラスの nuCTRS に対し, 停止性, 合流性を満たすための 1 つの十分条件を与えているが, クラスを制限することで, 正当性の証明は文献 [6] の Kaplan の方法を拡張して行えた. また, それらの十分条件を用いた完備化手続きを提案している (完備化手続きが利用できるための条件の詳細については現在検討中である). 結果として, 提案するクラスでは, 条件の等式での単一化代入で部分的な計算結果を保持することによって, 自然な形で部分項の評価順が指定できるようになっている. また, 与えた停止性, 合流性の十分条件も文献 [6] の十分条件を若干変更した程度のもので, 従来の結果の自然な拡張になっている.

以下, 2. で項書換え系と条件付き項書換え系について簡単に述べた後, 3. で正規形単一化可能条件付き項書換え系と, その部分クラスである IIIui 型の項書換え系を定義する. そして, IIIui 型の項書換え系に対し, 4. で停止性, 5. で合流性を満たすための 1 つの十分条件をそれぞれ与え, 6. で完備化手続きを提案する.

## 2 項書換え系, 条件付き項書換え系

### 2.1 項書換え系

本節の定義, 定理などは, 文献 [1, 2, 3] などに基づく.

#### 定義 2.1 書換え規則

$T = T(F, V)$  を, 関数記号の集合  $F$  の要素と変数記号の集合  $V$  の要素で表される項の集合 (項集合) と

する。書換え規則  $r$  は、2つの項  $u, v \in T$  の組で、 $\text{Var}(u) \supseteq \text{Var}(v)$  かつ、 $u \notin V$  であるものをいう。このとき、 $r$  を  $u \rightarrow v$  と表す。

ここで、 $\text{Var}(t)$  は項  $t$  に含まれる変数記号の集合を表すとする。□

### 定義 2.2 書換え規則による簡約関係

項  $t$  と項  $s$  の間に、書換え規則  $r: u \rightarrow v$  によって簡約関係  $t \rightarrow s$  が成立するとは、以下の2点が成立することをいう。

- 項  $t$  の位置  $\omega$  における変数でない部分項  $t_\omega$  と、 $r$  の書換え規則部の左辺の項  $u$  とが単一化代入  $\sigma$  によって単一化可能 (すなわち、 $t_\omega = u\sigma$ ) である。
- $s = t[\omega \leftarrow v\sigma]$  である。

また、関係  $\rightarrow$  の反射推移閉包を  $\rightarrow^*$  と表す。□

### 定義 2.3 項書換え系

項書換え系  $\Sigma$  は、以下の2字組で定義される。

$$\Sigma = \langle T, R \rangle$$

ここに、 $T$  は項集合、 $R$  は書換え規則の集合である。□

### 定義 2.4 正規形

項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  において、項  $t \in T$  に対し  $t \rightarrow s$  なる項  $s$  が存在しないとき、 $t$  は正規形であるという。項  $u \in T$  の正規形を、 $u \downarrow$  と記す。□

### 定義 2.5 項書換え系の停止性

項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  の  $R$  の規則による簡約に対し、 $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$  ( $t_1, t_2, \dots \in T$ ) なる無限の簡約列が存在しないとき、 $\Sigma$  は停止性を満たすという。□

定理 2.1 項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  が単純化順序 (simplification ordering)  $\succ$  によって以下を満たすとき、 $\Sigma$  は停止性を満たす。

- $R$  中の任意の書換え規則  $r: u \rightarrow v$  と任意の代入  $\sigma$  に対し、 $u\sigma \succ v\sigma$  が成立する。

□

ここで、単純化順序  $\succ$  は以下の2条件を満たす厳格半順序 (strict partial order) である。

- 部分項性 (subterm property):  $\forall f \in F, \forall t \in T, f(\dots, t, \dots) \succ t$
- 単調性 (compatibility):  $\forall f \in F, \forall t, t' \in T, t \succ t' \Rightarrow f(\dots, t, \dots) \succ f(\dots, t', \dots)$

単純化順序は整礎 (well-founded) である ( $t_1, t_2, \dots \in T, t_1 \succ t_2 \succ \dots$  なる無限の項の列が存在しない) ことが知られている。

### 定義 2.6 項書換え系の局所合流性, 合流性

項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  が以下を満たすとき、 $\Sigma$  は局所合流性を満たすという。

- 任意の項  $t, t_1, t_2 \in T$  に対し  $t \rightarrow t_1, t \rightarrow t_2$  であるとき、 $t_1 \rightarrow^* s, t_2 \rightarrow^* s$  なる項  $s \in T$  が存在する。

また、項書換え系  $\Sigma$  が以下を満たすとき、 $\Sigma$  は合流性を満たすという。

- 任意の項  $t, t_1, t_2 \in T$  に対し  $t \rightarrow^* t_1, t \rightarrow^* t_2$  であるとき、 $t_1 \rightarrow^* s, t_2 \rightarrow^* s$  なる項  $s \in T$  が存在する。

□

### 定義 2.7 危険対

2つの書換え規則  $r_1: u \rightarrow v, r_2: p \rightarrow q$  について、 $u$  の変数でない部分項  $u_\omega$  と  $p$  とが最汎単一化代入  $\sigma$  によって単一化可能であるとする。このとき  $r_1$  と  $r_2$  の危険対  $\langle A, B \rangle$  を次のように定義する。

$$\langle A, B \rangle = \langle v\sigma, u\sigma[\omega \leftarrow q\sigma] \rangle$$

□

定理 2.2 項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  が以下を満たすとき、 $\Sigma$  は局所合流性を満たす。

- $R$  の任意の危険対  $\langle A, B \rangle$  に対し、 $A \downarrow = B \downarrow$  が成立する。

□

定理 2.3 項書換え系  $\Sigma$  が停止性と局所合流性を満たすとき、 $\Sigma$  は合流性を満たす。□

## 2.2 条件付き項書換え系

本節の定義、定理は、特記しない限り文献 [6] に基づく。

### 定義 2.8 条件付き書換え規則<sup>[5]</sup>

条件付き書換え規則  $r$  は、以下のような構文で表される。

$$u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_n = v_n \Rightarrow u \rightarrow v$$

ここで、 $u, v, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$  は項である。□

以下特記しない限り、条件付き書換え規則  $r$  といえば、上記の  $r$  を示すものとする。

### 定義 2.9 条件付き書換え規則による簡約関係<sup>[5]</sup>

項  $t$  と項  $s$  の間に、条件付き書換え規則  $r$  によって簡約関係  $t \rightarrow s$  が成立するとは、以下の3点が成立することをいう。

- 項  $t$  の位置  $\omega$  における変数でない部分項  $t_\omega$  と,  $r$  の書換え規則部の左辺の項  $u$  とが単一化代入  $\sigma$  によって単一化可能 (すなわち,  $t_\omega = u\sigma$ ) である.
- すべての  $i(1 \leq i \leq n)$  に対し, 以下のいずれかが成立する.
  - (I型)  $u_i$  から  $v_i$  へ到達可能である. これは, ある系列  $u_i \equiv t_1, \dots, t_j, \dots, t_{m_i} \equiv v_i$  が存在して, 任意の  $j(1 \leq j \leq m_i - 1)$  に対し,  $t_j \rightarrow t_{j+1}$ , または,  $t_{j+1} \rightarrow t_j$  が成立することである.
  - (II型)  $u_i$  と  $v_i$  とが, 互いに等しい項に書換えられる.
  - (III型)  $u_i$  から  $v_i$  への (0回以上の) 簡約過程が存在する.
  - (III $n$ 型) III型で,  $v_i$  が変数を含まない正規形である.
- $s = t[\omega \leftarrow v\sigma]$  である.

□

### 定義 2.10 条件付き項書換え系<sup>[5]</sup>

条件付き項書換え系  $\Sigma$  は以下の 2 字組で定義される.

$$\Sigma = \langle T, R \rangle$$

ここに,  $T$  は項集合,  $R$  は条件付き書換え規則の集合である. また, 例えば I 型の意味で条件の等式が成立する場合,  $\Sigma$  を I 型の条件付き項書換え系という. □

### 定義 2.11 安定な条件付き項書換え系

条件付き項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  で, すべての  $r \in R$  が出現する変数について以下の条件を満たすとき,  $r$  は安定な (steady) 条件付き項書換え系であるという.

$$\begin{aligned} \text{Var}(u) \supseteq \text{Var}(v) \\ \cup (\cup_{i=1}^n (\text{Var}(v_i) \cup \text{Var}(u_i))) \\ (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

□

安定な条件付き項書換え系とすることの意義は, 変数を含まない項を簡約する過程で, 値の代入されていない変数を出現させないことにある.

### 定義 2.12 単純化性を満たす条件付き項書換え系

条件付き項書換え系  $\Sigma$  が以下を満たすとき,  $\Sigma$  は単純化性を満たす (simplifying) という.

- ある単純化順序  $\succ$  が存在し,  $R$  の任意の書換え規則  $r$  と任意の代入  $\sigma$  に対し, 以下の 2 条件が成立する.

$$- u\sigma \succ v\sigma$$

- 任意の  $i(1 \leq i \leq n)$  に対し,  $u\sigma \succ u_i\sigma, u\sigma \succ v_i\sigma$

□

定理 2.4 安定で単純化性を満たす II 型の項書換え系は停止性を満たす. □

定理 2.5 安定で単純化性を満たす II 型の項書換え系に対し, ある項の正規形を求める手続きは決定手続きである. □

### 定義 2.13 文脈付き危険対

条件付き項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  の  $R$  中の 2 つの書換え規則  $r_1, r_2$ :

$$\begin{aligned} r_1: u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_n = v_n \Rightarrow u \rightarrow v \\ r_2: p_1 = q_1 \wedge \dots \wedge p_m = q_m \Rightarrow p \rightarrow q \end{aligned}$$

について,  $u$  の変数でない部分項  $u_\omega$  と  $p$  とが最汎単一化代入  $\sigma$  によって単一化可能であるとする.

このときの  $r_1, r_2$  の文脈付き危険対 (contextual critical pair)  $ccp$  を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} ccp &= C \Rightarrow \langle A, B \rangle \\ C &= u_1\sigma = v_1\sigma \wedge \dots \wedge u_n\sigma = v_n\sigma \\ &\quad \wedge p_1\sigma = q_1\sigma \wedge \dots \wedge p_m\sigma = q_m\sigma \\ A &= v\sigma \\ B &= u\sigma[\omega \leftarrow q\sigma] \end{aligned}$$

□

### 定義 2.14 文脈付き危険対の feasibility

文脈付き危険対  $ccp = C \Rightarrow \langle A, B \rangle$  において, ある代入  $\sigma$  が存在して, 任意の  $i(1 \leq i \leq n)$  に対し  $u_i\sigma \downarrow = v_i\sigma \downarrow$  が成立する (これを  $\models_R C\sigma$  と表す) と,  $ccp$  は feasible であるという. □

定理 2.6 安定で単純化性を満たす II 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  が以下を満たすとき,  $\Sigma$  は局所合流性を満たす.

- $R$  の任意の feasible な文脈付き危険対  $C \Rightarrow \langle A, B \rangle, \models_R C\sigma$  に対し,  $A\sigma \downarrow = B\sigma \downarrow$  が成立する.

さらに,  $\Sigma$  は安定で単純化性を満たすから停止性を満たすので,  $\Sigma$  は合流性を満たす. □

## 3 III $_{ui}$ 型の項書換え系

定義 3.1 正規形単一化可能, 正規形単一化可能条件付き項書換え系

正規形単一化可能とは, 次の 2 つの総称である.

## 1. 両正規形単一化可能

項  $s$  と  $t$  とが両正規形単一化可能  $s \sim t$  であるとは、 $s$  の正規形と  $t$  の正規形とが単一化可能であることをいう。

## 2. 片正規形単一化可能

項  $s$  と  $t$  とが片正規形単一化可能  $s \rightsquigarrow t$  であるとは、 $s$  の正規形と  $t$  とが単一化可能であることをいう。

正規形単一化可能条件付き項書換え系 (nuCTRS) は、条件付き書換え規則における条件の等式の等号の意味を正規形単一化可能とする項書換え系の総称である。

□

まず、正規形単一化可能条件付き項書換え系の部分クラスである、次の IIIu 型の項書換え系を定義する。

定義 3.2 IIIu 型の項書換え系での条件付き書換え規則による簡約関係

IIIu 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  で、項  $t$  と項  $s$  の間に、条件付き書換え規則  $r$  によって簡約関係  $t \rightarrow s$  が成立するとは、以下の 3 条件が成立することをいう。

- 項  $t$  の位置  $\omega$  における変数でない部分項  $t_\omega$  と、 $r$  の書換え規則部の左辺の項  $u$  とが単一化代入  $\sigma$  によって単一化可能 (すなわち、 $t_\omega = u\sigma$ ) である。
- すべての  $i (1 \leq i \leq n)$  に対し以下が満たされる。

— 第  $i$  条件において、左辺の項  $u_i$  に代入  $\rho_i$  を行った項と、右辺の項  $v_i$  に代入  $\rho_i$  を行った項とが片正規形単一化可能 ( $u_i\rho_i \rightsquigarrow v_i\rho_i$ ) である。このときの最汎単一化代入 (most general unifier) を  $\tau_i$  とし、 $\rho_i$  は  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n$  のうち定義されているものの合成とする。 $\rho_i$  を第  $i$  条件における計算代入という。

- $s = t[\omega \leftarrow v\rho(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n)]$  である。

ここで、代入  $\rho$  を簡約代入といい、その引数で示される代入の合成とする。

□

(注) この定義における  $\tau_i$  が一意に定まらないとき、1 つの部分項  $t_\omega$  と 1 つの条件付き書換え規則  $r$  に対し 2 つ以上の簡約関係が定義されることになる。

□

手続き 3.1 IIIu 型の項書換え系における正規形を求める手続き

以上の定義により、IIIu 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  において、項  $t$  の正規形は表 1 の手続き  $NFR(t)$  で求めることができる。

表 1 の手続き中の  $Unif(t_1, t_2)$  は 2 つの項  $t_1, t_2$  が単一化可能ならば最汎単一化代入を返し、単一化不可能ならば *failure* を返す決定手続きである。

□

## 定義 3.3 IIIui 型の項書換え系

IIIu 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  で、条件付き書換え規則  $r \in R$  の条件の等式の成立の判定順序を左から右へ (第 1 条件, 第 2 条件,  $\dots$ , 第  $n$  条件の順) とし、計算代入, 簡約代入を以下で定義するものを IIIui 型の項書換え系という。

- 第  $i$  条件 ( $1 \leq i \leq n$ ) の計算代入  $\rho_i$

$$\rho_i = \sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1}$$

ただし、 $i = 1$  のときは  $\rho_i = \sigma$  である。

- 簡約代入  $\rho$

$$\rho(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n) = \sigma\tau_1 \cdots \tau_n$$

□

手続き 3.2 IIIui 型の項書換え系における正規形を求める手続き

IIIui 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  において、項  $t$  の正規形は表 2 の手続き  $NFR(t)$  で求めることができる。

□

## 定義 3.4 安定な IIIui 型の項書換え系

IIIui 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  で、すべての  $r \in R$  が出現する変数について以下の条件を満たすとき、 $\Sigma$  は安定な IIIui 型の項書換え系であるという。

$$\begin{aligned} \text{Var}(u_i) &\subseteq \text{Var}(u) \cup (\cup_{k=1}^{i-1} \text{Var}(v_k)) \\ &\quad (1 \leq i \leq n), \text{かつ}, \\ \text{Var}(v) &\subseteq \text{Var}(u) \cup (\cup_{k=1}^n \text{Var}(v_k)) \end{aligned}$$

□

本論文では、安定な IIIui 型の項書換え系について論じる。

## 例 3.1 IIIui 型の項書換え系の例

以下のような項書換え系  $\Sigma$  を考える。

$$\begin{aligned} \Sigma &= \langle T(F, V), R \rangle \\ F &= \{f, s, +, 0, \geq, TRUE\} \\ \left( \begin{array}{lll} f, s: & int & \rightarrow int \\ +: & int \times int & \rightarrow int \\ 0: & & \rightarrow int \\ \geq: & int \times int & \rightarrow bool \\ TRUE: & & \rightarrow bool \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$V = \{x, y\}$$

$$(x, y: int)$$

$$R = \{r_1, r_2, \dots\}$$

$$r_1: x = 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} r_2: x \geq 0 &= TRUE \wedge f(x) = y \\ &\Rightarrow f(s(x)) \rightarrow s(x+y) \end{aligned}$$

```

procedure  $NF_R(t)$ 
begin
  for each  $r \in R$  do
    ( $r : u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_n = v_n \Rightarrow u \rightarrow v$ )
    if ( $(\sigma \leftarrow Unif(t_\omega, u)) \neq failure$ ) then
      begin
         $reducible \leftarrow true$ ;
        for each  $i \in [1..n]$  do
          if ( $(\tau_i \leftarrow Unif(NF_R(u_i\rho_i), v_i\rho_i)) = failure$ ) then
             $reducible \leftarrow false$ ;
          if  $reducible$  then return ( $NF_R(t[\omega \leftarrow v\rho(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n)])$ )
        end;
      end;
    return ( $t$ )
end;

```

表 1: IIIu 型の項書換え系における手続き  $NF_R(t)$ 

```

procedure  $NF_R(t)$ 
begin
  for each  $r \in R$  do
    ( $r : u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_n = v_n \Rightarrow u \rightarrow v$ )
    if ( $(\sigma \leftarrow Unif(t_\omega, u)) \neq failure$ ) then
      begin
         $reducible \leftarrow true$ ;
        for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
          if ( $(\tau_i \leftarrow Unif(NF_R(u_i\sigma\tau_1 \dots \tau_{i-1}), v_i\sigma\tau_1 \dots \tau_{i-1})) = failure$ ) then
             $reducible \leftarrow false$ ;
          if  $reducible$  then return ( $NF_R(t[\omega \leftarrow v\sigma\tau_1 \dots \tau_n])$ )
        end;
      end;
    return ( $t$ )
end;

```

表 2: IIIui 型の項書換え系における手続き  $NF_R(t)$

$\Sigma$ で定義される関数  $f(x)$  は, 0 から非負整数  $x$  までの和を与えるものである (関数記号  $+$ ,  $\geq$  に関する書換え規則は省略している).  $r_2$  をみると, 書換え規則部の右辺の項に左辺の項に含まれない変数  $y$  があり, 第 2 条件により, この  $y$  には  $f(x)$  の正規形が代入される. すなわち  $r_2$  による簡約において, 簡約後の部分項のうち, 変数  $y$  に代入される項が先に評価されることになる. このような計算が可能であることから, IIIui 型の項書換え系は部分項の評価順が指定できる項書換え系であるとみなせる.  $\square$

例 3.2 IIIIn 型, II 型の項書換え系と IIIui 型の項書換え系

任意の IIIIn 型の項書換え系が, IIIui 型の項書換え系であることは明らかである.

さらに, 任意の II 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T(F, V), R \rangle$  は, 次のように IIIui 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T'(F, V'), R' \rangle$  に変換可能である.

$r \in R: u_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge u_n = v_n \Rightarrow u \rightarrow v$  に対し,  $r' \in R'$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 \wedge v_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge u_n = x_n \wedge v_n = x_n \\ &\Rightarrow u \rightarrow v \end{aligned}$$

とする. ただし,  $V \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \phi$ ,  $V' = V \cup \{x_1, \dots, x_n\}$  である.  $\square$

## 4 IIIui 型の項書換え系の停止性

定義 4.1 単純化性を満たす IIIui 型の項書換え系

IIIui 型の項書換え系  $\Sigma$  が以下を満たすとき,  $\Sigma$  は単純化性を満たすという.

- ある単純化順序  $\succ$  が存在し,  $R$  の任意の条件付き書換え規則  $r$  と, 定義 3.2 における任意の  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n$  に対し, 以下の 2 条件が成立する.

$$- u\sigma \succ v\sigma\tau_1 \cdots \tau_n \quad (A)$$

$$- \text{任意の } i(1 \leq i \leq n) \text{ に対し, } u\sigma \succ u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \quad (B)$$

$\square$

安定で単純化性を満たす IIIui 型の項書換え系に対しては, Noetherian 帰納法が適用できる.

定理 4.1 安定で単純化性を満たす IIIui 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  は停止性を満たす.  $\square$

[証明] 条件付き書換え規則  $r$  に対し,  $t_\omega = u\sigma$  であり,  $t \rightarrow s$  となるとする.

定義 4.1 の条件 (A) により, 任意の代入  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n$  に対し,

$$u\sigma \succ v\sigma\tau_1 \cdots \tau_n$$

および,  $\succ$  の単調性から,

$$t = t[\omega \leftarrow u\sigma] \succ t[\omega \leftarrow v\sigma\tau_1 \cdots \tau_n] = s$$

$R$  の任意の書換え規則が, 定義 4.1 の条件 (A) を満たすから, 任意の簡約関係  $t \rightarrow s$  に対し,  $t \succ s$  が成立する.

さらに,  $\succ$  は整礎だから,  $\Sigma$  は停止性を満たす.  $\square$

定理 4.2 安定で単純化性を満たす IIIui 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  に対し,  $NFR$  は決定手続きである.  $\square$

[証明] 項  $t \in T$  に対し, 手続き 3.2 の  $NFR(t)$  において, 手続き *Unif* の呼び出しが 2 回, 手続き  $NFR$  の呼び出しが 2 回行われる. 手続き *Unif* は決定手続きであるので, 2 つの手続き  $NFR$  が停止することを示す. 定理 4.1 より,  $\Sigma$  は停止性を満たす. したがって,  $\succ$  に関する Noetherian 帰納法による.

項  $t$  について,  $t \succ s$  なる任意の項  $s$  に対し, 手続き  $NFR(s)$  が停止すると仮定する.

条件付き書換え規則  $r \in R$  に対し,  $t_\omega = u\sigma$  であるとする.  $\succ$  の部分項性により,

$$t \succ t_\omega = u\sigma$$

第  $i(1 \leq i \leq n)$  条件について, 定義 4.1 の条件 (B) により, 任意の代入  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{i-1}$  に対し,

$$u\sigma \succ u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1}$$

したがって,

$$t \succ u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1}$$

よって, 帰納法の仮定により, 手続き  $NFR(u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1})$  は停止する.

また,  $\succ$  の単調性, および定義 4.1 の条件 (A) により, 任意の代入  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n$  に対し,

$$t = t[\omega \leftarrow u\sigma] \succ t[\omega \leftarrow v\sigma\tau_1 \cdots \tau_n]$$

よって, 帰納法の仮定により, 手続き  $NFR(t[\omega \leftarrow v\sigma\tau_1 \cdots \tau_n])$  は停止する.

以上より, 手続き  $NFR(t)$  は, 任意の入力  $t$  に対して停止する決定手続きである.  $\square$

## 5 IIIui 型の項書換え系の合流性

### 5.1 IIIui 型の項書換え系における文脈付き危険対

IIIui 型の項書換え系における文脈付き危険対は, 定義 2.13 のものと同じである.

定義 5.1 IIIui型の項書換え系における文脈付き危険対の feasibility

IIIui型の項書換え系における文脈付き危険対  $ccp$  に対し、次の式を満たす代入  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n, \nu_1, \dots, \nu_m$  が存在するとき、 $ccp$  は feasible であるという。

$$\begin{aligned} & u_1\sigma \downarrow \tau_1 = v_1\sigma\tau_1 \\ \wedge & \dots \\ \wedge & u_n\sigma\tau_1 \dots \tau_{n-1} \downarrow \tau_n \\ & = v_n\sigma\tau_1 \dots \tau_{n-1}\tau_n \\ \wedge & p_1\sigma \downarrow \nu_1 = q_1\sigma\nu_1 \\ \wedge & \dots \\ \wedge & p_m\sigma\nu_1 \dots \nu_{m-1} \downarrow \nu_m \\ & = q_m\sigma\nu_1 \dots \nu_{m-1}\nu_m \end{aligned}$$

また、このとき、以下の  $ccp' = \langle A, B \rangle$  を対応する代入を適用された危険対という。

$$\begin{aligned} & \langle A, B \rangle \\ & = \langle v\sigma\tau_1 \dots \tau_n, u\sigma[\omega \leftarrow q\sigma\nu_1 \dots \nu_m] \rangle \end{aligned}$$

□

## 5.2 IIIui型の項書換え系の合流性

補題 5.1の証明のために次の用語を定義する。

定義 5.2 局所合流的な項

項  $t$  について、任意の項  $t_1, t_2$  に対し以下が成立するとき、項  $t$  は局所合流的であるという。

- $t \rightarrow t_1, t \rightarrow t_2$  となるとき、 $t_1 \xrightarrow{*} s, t_2 \xrightarrow{*} s$  なる項  $s$  が存在する。

□

補題 5.1 安定で単純化性を満たす IIIui型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  が以下を満たすとき、 $\Sigma$  は局所合流性を満たす。

- $R$  の全ての feasible な文脈付き危険対  $ccp$  について、対応する代入を適用された危険対  $ccp' = \langle A, B \rangle$  に対し、 $A \downarrow = B \downarrow$  が成立する。

□

[証明] 背理法で証明する。いま、局所合流的でない項  $t \in T$  が存在すると仮定する。

$r_1, r_2 \in R$  が以下で示される書換え規則で、

$$\begin{aligned} r_1: & u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_n = v_n \Rightarrow u \rightarrow v \\ r_2: & p_1 = q_1 \wedge \dots \wedge p_m = q_m \Rightarrow p \rightarrow q \end{aligned}$$

項  $t$  が、 $r_1$  によって  $t_1$  に、 $r_2$  によって  $t_2$  に簡約されるとする。また、 $t_\omega = u\sigma, t_\pi = p\eta$  であるとする。

簡約関係が成立するから、

$$\begin{aligned} & u_1\sigma \downarrow \tau_1 = v_1\sigma\tau_1 \wedge \dots \\ & \wedge u_n\sigma\tau_1 \dots \tau_{n-1} \downarrow \tau_n = v_n\sigma\tau_1 \dots \tau_{n-1}\tau_n, \\ & p_1\eta \downarrow \nu_1 = q_1\eta\nu_1 \wedge \dots \\ & \wedge p_m\eta\nu_1 \dots \nu_{m-1} \downarrow \nu_m = q_m\eta\nu_1 \dots \nu_{m-1}\nu_m \end{aligned}$$

$t$  が、2通りに簡約される (これを peak<sup>[7]</sup> という) のは、以下の3つの状況 (disjoint peak, critical peak, variable peak)<sup>[7]</sup> のいずれかである。

### 1. disjoint peak

$\omega, \pi$  が、 $t$  において独立した位置である場合である。このとき、

$$\begin{aligned} t & \rightarrow t[\omega \leftarrow v\sigma\tau_1 \dots \tau_n] = t_1 \\ & \rightarrow t_1[\pi \leftarrow q\eta\nu_1 \dots \nu_m] = s \\ t & \rightarrow t[\pi \leftarrow q\eta\nu_1 \dots \nu_m] = t_2 \\ & \rightarrow t_2[\omega \leftarrow v\sigma\tau_1 \dots \tau_n] = s \end{aligned}$$

となる。したがって、 $t_1 \downarrow t_2$  となり、仮定に反する。

### 2. critical peak

位置  $\omega$  は位置  $\pi$  の上にあるとしても一般性を失わない。いま、 $u$  の部分項  $u_\zeta (\pi = \omega\zeta)$  と  $p$  は、単一化代入  $\sigma \cup \eta$  で単一化可能である。ここで  $u_\zeta$  と  $p$  の最汎単一化代入を  $\gamma$  とすると、ある代入  $\delta$  が存在して、 $\sigma \cup \eta = \gamma\delta$  となる。

$r_1, r_2$  のこの場合の文脈付き危険対  $ccp = C \Rightarrow \langle A, B \rangle$  は、以下となる。

$$\begin{aligned} C & = u_1\gamma = v_1\gamma \wedge \dots \wedge u_n\gamma = v_n\gamma \\ & \wedge p_1\gamma = q_1\gamma \wedge \dots \wedge p_m\gamma = q_m\gamma \\ A & = v\gamma \\ B & = u\gamma[\omega \leftarrow q\gamma] \end{aligned}$$

ここで、

$$\gamma\delta = \sigma \cup \eta \supseteq \sigma, \eta$$

だから、

$$\begin{aligned} \gamma\delta\tau_1 \dots \tau_{i-1} & \supseteq \sigma\tau_1 \dots \tau_{i-1}, (1 \leq i \leq n) \\ \gamma\delta\nu_1 \dots \nu_{j-1} & \supseteq \eta\nu_1 \dots \nu_{j-1}, (1 \leq j \leq m) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} & u_1\gamma\delta \downarrow \tau_1 = v_1\gamma\delta\tau_1 \\ \wedge & \dots \\ \wedge & u_n\gamma\delta\tau_1 \dots \tau_{n-1} \downarrow \tau_n \\ & = v_n\gamma\delta\tau_1 \dots \tau_{n-1}\tau_n \\ \wedge & p_1\gamma\delta \downarrow \nu_1 = q_1\gamma\delta\nu_1 \\ \wedge & \dots \\ \wedge & p_m\gamma\delta\nu_1 \dots \nu_{m-1} \downarrow \nu_m \\ & = q_m\gamma\delta\nu_1 \dots \nu_{m-1}\nu_m \end{aligned}$$

となり、 $ccp$  は feasible である。

補題の条件から,

$$\begin{aligned} t_{1\omega} &= \\ v\gamma\delta\tau_1 \cdots \tau_n \downarrow u\gamma\delta[\omega \leftarrow q\gamma\delta\nu_1 \cdots \nu_m] \\ &= t_{2\omega} \end{aligned}$$

が成立し,  $t_1 \downarrow t_2$  となり, 仮定に反する.

### 3. variable peak

$\Sigma$  は単純化性を満たすから定理 4.1 により停止性を満たす. したがって  $\succ$  に関する Noetherian 帰納法により, 項  $t$  について  $t \succ t'$  なる任意の項  $t'$  が局所合流的であるとできる.

危険対分岐の場合と同様に, 位置  $\omega$  は位置  $\pi$  の上にあるとし, さらに  $\pi$  が  $u$  中の変数  $x$  の位置であったとする.

このとき,

$$\begin{aligned} t_\omega &\rightarrow t_{2\omega} = u\sigma[\pi \leftarrow q\eta\nu_1 \cdots \nu_m] \\ &\xrightarrow{*} u\sigma[x \leftarrow q\eta\nu_1 \cdots \nu_m] \end{aligned}$$

ここで,  $\sigma' = \sigma \cup \{x \leftarrow q\eta\nu_1 \cdots \nu_m\}$  とすると,

$$t_{2\omega} \xrightarrow{*} u\sigma'$$

となる. いま,

$$\begin{aligned} u_i\sigma'\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \downarrow \tau_i &= v_i\sigma'\tau_1 \cdots \tau_{i-1}\tau_i \\ (\forall i, 1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (1)$$

が成立するならば,

$$u\sigma' \rightarrow v\sigma'\tau_1 \cdots \tau_n$$

となる. 一方,

$$t_\omega \rightarrow t_{1\omega} = v\sigma\tau_1 \cdots \tau_n \xrightarrow{*} v\sigma'\tau_1 \cdots \tau_n$$

よって, (1) が成立するならば  $t_{1\omega} \downarrow t_{2\omega}$ , すなわち  $t_1 \downarrow t_2$  となり, 仮定に反する.

(1) の成立を示す. 任意の  $i(1 \leq i \leq n)$  に対し,

$$u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \downarrow \tau_i = v_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1}\tau_i$$

だが,  $r_2$  によって,

$$u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \rightarrow u_i\sigma'\tau_1 \cdots \tau_{i-1}$$

他の書換え規則によって,

$$u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \rightarrow u_i'$$

となる場合が生ずる.

しかし, 定義 4.1 の条件 (B) と  $\succ$  の部分項性より,

$$t \succ u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1}$$

となるから, 帰納法の仮定により,

$$u_i\sigma'\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \downarrow u_i'$$

よって,

$$\begin{aligned} u_i\sigma'\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \downarrow \tau_i &= u_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \downarrow \tau_i \\ &= v_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1}\tau_i \end{aligned}$$

また,  $v_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1}\tau_i$  は正規形だから,

$$v_i\sigma\tau_1 \cdots \tau_{i-1}\tau_i = v_i\sigma'\tau_1 \cdots \tau_{i-1}\tau_i$$

( $\sigma' - \sigma$  の要素の代入は適用されない). 以上より,

$$u_i\sigma'\tau_1 \cdots \tau_{i-1} \downarrow \tau_i = v_i\sigma'\tau_1 \cdots \tau_{i-1}\tau_i$$

((1) の証明終わり)

以上より, 任意の項  $t \in T$  は局所合流的であり, 局所合流性が満たされる.  $\square$

定理 5.1 安定で単純化性を満たす IIIui 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  が以下を満たすとき,  $\Sigma$  は合流性を満たす.

- $R$  の全ての feasible な文脈付き危険対  $ccp$  について, 対応する代入を適用された  $ccp' = \langle A, B \rangle$  に対し,  $A \downarrow = B \downarrow$  が成立する.

$\square$

[証明] 補題 5.1 の局所合流性, 定理 4.1 の停止性により示される.  $\square$

## 6 IIIui 型の項書換え系に対する完備化手続き

項書換え系に対する Knuth-Bendix の完備化手続き<sup>[1, 2, 3, 4]</sup>を基にした, IIIui 型の項書換え系に対する完備化手続きを提案する. ただし, IIIui 型の項書換え系では, 書換え規則部の右辺が左辺に比べ特別な意味をもつ (例 3.1 など参照) ので, 等式仕様から完備な項書換え系を得る手続きとはせず, 項書換え系から完備な項書換え系を得る手続きとする. また, 完備化手続きが利用できるための条件の詳細と, 手続きの正当性の証明については現在検討中である.

手続き 6.1 IIIui 型の項書換え系に対する完備化手続き

IIIui 型の項書換え系  $\Sigma = \langle T, R \rangle$  を完備化し, IIIui 型の項書換え系  $\Sigma' = \langle T, R' \rangle$  とする手続き  $CPC(R, \succ)$  を表 3 に示す.

手続き  $CPC(R, \succ)$  中の  $RulesByCCP(R', \succ)$  は,  $R'$  中の全ての文脈付き危険対を求め, それらを  $\succ$  によって条件付き書換え規則の集合  $R''$  として返す手続きである (表 4).  $\square$



(注) 手続き *CPC* 中の  $r'$  は  $r$  による簡約関係の意味を保存しない。しかし、完備化手続きの性質上、意味を保存した場合の正規形と保存しない場合の正規形は一致する。そして、完備化手続きの目的が正規形の一意性を保証するためのものであるから、意味を保存しないことに問題はない。□

## 7 あとがき

本論文では、部分項の評価順を指定できるという特徴をもつ IIIui 型の項書換え系に対し、停止性、合流性を満たすための 1 つの十分条件を与え、それらを用いた完備化手続きを提案した。

今後の課題としては、完備化手続きが利用できるための条件を与え、手続きの正当性を示すこと、IIIui 型の項書換え系の他の応用例などを検討すること、正規系単一化可能条件付き項書換え系の他のクラス (IIIu 型, 両正規系単一化可能条件を用いた IIu 型, IIui 型) について検討すること, などがあげられる。

## 参考文献

- [1] 二木 厚吉, 外山 芳人: “項書き換え型計算モデルとその応用”, 情報処理, Vol.24, No.2, pp.133-146 (1983).
- [2] 井田 哲雄: “計算モデルの基礎理論”, 第 6 章 書換えモデル, 岩波書店, pp.223-296 (1991).
- [3] 大須賀 昭彦: “項書換えシステムと完備化手続き”, 新しいプログラミングパラダイム, 井田 哲雄 編, 共立出版, pp.165-186 (1988).
- [4] 坂井 公: “Knuth-Bendix の完備化手続きとその応用”, コンピュータソフトウェア, Vol.4, No.1, pp.2-22 (1987).
- [5] Bergstra J.A. and Klop J.W.: “Conditional Rewrite Rules: Confluence and Termination”, J. of Computer and System Sciences, Vol.32, pp.323-362 (1986).
- [6] Kaplan S.: “Simplifying Conditional Term Rewriting Systems: Unification, Termination and Confluence”, J. of Symbolic Computation, 4, pp.295-334 (1987).
- [7] Dershowitz N., Okada M. and Sivakumar G.: “Confluence of Conditional Rewrite Systems”, Proc. of 1st International Workshop on Conditional Term Rewriting Systems, Orsay, France, July 1987, LNCS308, Springer Verlag, Berlin, pp.31-44 (1988).
- [8] 富樫 敦: “等式プログラミングから融合型プログラミングへ”, 新しいプログラミングパラダイム, 井田 哲雄 編, 共立出版, pp.187-218 (1988).
- [9] Mansfield G., Togashi A. and Noguchi S.: “AM-LOG: an Amalgamated Equational Logic Program Language”, J. of Information Processing, Vol.11, No.4, pp.278-287 (1988).
- [10] Toyama Y.: “Membership Conditional Term Rewriting Systems”, Trans. IEICE, E72, pp.1224-1229 (1989).
- [11] 山田 順之介: “停止性をもつメンバシップ条件付き TRS の合流性について”, 信学論, Vol.J74-D-I, No.9, pp.666-674 (1991).

- 入力  $R$ , 厳格半順序  $\succ$
- 出力  $R'$

procedure  $CPC(R, \succ)$

begin

$R' \leftarrow \phi$ ;

while  $R \neq \phi$  do

begin

choose a rule  $r \in R$ , s.t.

$u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_n = v_n \Rightarrow u \rightarrow v$ ;

$u \downarrow_{tmp} \leftarrow NF_{R'}(u)$ ;

for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do

begin

$u_i \downarrow_{tmp} \leftarrow NF_{R'}(u_i \tau_1 \dots \tau_{i-1})$ ;

if  $(\tau_i \leftarrow Unif(u_i \downarrow_{tmp}, v_i \tau_1 \dots \tau_{i-1})) = failure$  then

$\tau_i \leftarrow \phi$

end;

$v \downarrow_{tmp} \leftarrow NF_{R'}(v \tau_1 \dots \tau_n)$ ;

if  $u \downarrow_{tmp} = v \downarrow_{tmp}$  then

$R \leftarrow R - \{r\}$

else

begin

if  $u \downarrow_{tmp} \succ v \downarrow_{tmp} \wedge \forall i (1 \leq i \leq n) u \downarrow_{tmp} \succ u_i \downarrow_{tmp}$  then

begin

make a rule  $r'$ , s.t.

$u_1 \downarrow_{tmp} = v_1 \wedge \dots \wedge u_n \downarrow_{tmp} = v_n \Rightarrow u \downarrow_{tmp} \rightarrow v \downarrow_{tmp}$ ;

$R \leftarrow R - \{r\}$ ;

$R' \leftarrow R' \cup \{r'\}$ ;

$R \leftarrow R \cup RulesByCCP(R', \succ)$

end

else if  $v \downarrow_{tmp} \succ u \downarrow_{tmp} \wedge \forall i (1 \leq i \leq n) v \downarrow_{tmp} \succ u_i \downarrow_{tmp}$  then

begin

make a rule  $r'$ , s.t.

$u_1 \downarrow_{tmp} = v_1 \wedge \dots \wedge u_n \downarrow_{tmp} = v_n \Rightarrow v \downarrow_{tmp} \rightarrow u \downarrow_{tmp}$ ;

$R \leftarrow R - \{r\}$ ;

$R' \leftarrow R' \cup \{r'\}$ ;

$R \leftarrow R \cup RulesByCCP(R', \succ)$

end

else

return(*failure*)

end

end;

return( $R'$ )

end;

表 3: 手続き  $CPC(R, \succ)$

- 入力  $R'$ , 厳格半順序  $\succ$
- 出力  $R''$

```

procedure RulesByCCP( $R', \succ$ )
begin
   $R'' \leftarrow \phi$ ;
   $CCP \leftarrow$  all Contextual Critical Pairs of  $R'$ 
  while  $CCP \neq \phi$  do
    begin
      choose a  $ccp \in CCP$ , s.t.
         $u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_n = v_n \Rightarrow \langle A, B \rangle$ ;
       $A \downarrow_{tmp} \leftarrow NF_{R'}(A)$ ;
      for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
        begin
           $u_i \downarrow_{tmp} \leftarrow NF_{R'}(u_i \tau_1 \dots \tau_{i-1})$ ;
          if ( $\tau_i \leftarrow Unif(u_i \downarrow_{tmp}, v_i \tau_1 \dots \tau_{i-1}) = failure$ ) then
             $\tau_i \leftarrow \phi$ 
          end;
        end;
       $B \downarrow_{tmp} \leftarrow NF_{R'}(v \tau_1 \dots \tau_n)$ ;
      if  $A \downarrow_{tmp} = B \downarrow_{tmp}$  then
         $CCP \leftarrow CCP - \{ccp\}$ 
      else
        begin
          if  $A \downarrow_{tmp} \succ B \downarrow_{tmp} \wedge \forall i(1 \leq i \leq n) A \downarrow_{tmp} \succ u_i \downarrow_{tmp}$  then
            begin
              make a rule  $r$ , s.t.
                 $u_1 \downarrow_{tmp} = v_1 \wedge \dots \wedge u_n \downarrow_{tmp} = v_n \Rightarrow A \downarrow_{tmp} \rightarrow B \downarrow_{tmp}$ ;
               $CCP \leftarrow CCP - \{ccp\}$ ;
               $R'' \leftarrow R'' \cup \{r\}$ ;
            end
          else if  $B \downarrow_{tmp} \succ A \downarrow_{tmp} \wedge \forall i(1 \leq i \leq n) B \downarrow_{tmp} \succ u_i \downarrow_{tmp}$  then
            begin
              make a rule  $r$ , s.t.
                 $u_1 \downarrow_{tmp} = v_1 \wedge \dots \wedge u_n \downarrow_{tmp} = v_n \Rightarrow B \downarrow_{tmp} \rightarrow A \downarrow_{tmp}$ ;
               $CCP \leftarrow CCP - \{ccp\}$ ;
               $R'' \leftarrow R'' \cup \{r\}$ ;
            end
          else
            exit procedure  $CPC$  with returning( $failure$ )
          end
        end
      end;
    end;
  return( $R''$ )
end;

```

表 4: 手続き  $RulesByCCP(R', \succ)$