数理解析研究所講究録
第 835 巻 1993 年 11-15

2-パラメータ最適停止問題に対応する Bellman 方程式の解について

九州大学理学部 田中輝雄 (Teruo Tanaka)

1 序

Markov 過程に対する 1-パラメータの最適停止問題の最適値関数は次の型の Bellman 方程式によって特徴付けられる :

$$f = \max\{g, Tf\}。$$

但し、g は利得関数、T は Markov 過程の推移作用素とする。Grigelionis and Shiryayev [2]、Grigelionis [1]、Shiryayev [8] はこの型の方程式の解や一意性について議論をした。

Mazziotto [7] は bi-Markov 過程を定義し、それに対する 2-パラメータの最適停止問題の最適値関数は次の型の Bellman 方程式によって特徴付けられることを示した :

$$f = \max\{g, T^1 f, T^2 f\} = \max\{g, \max_{i=1,2} T^i f\}。\tag{1}$$

これは、continuous control problem において現われる型である。T^i については以下で定義する。

ここでは、(1) の解の存在と一意性、最適値関数との関係について考える。

2 定義と問題の定式化

$\mathbf{T} = \mathbf{N}^2 \cup \{\infty\}$（1点コンパクト化）を時間空間とし、次の半順序関係を持つものとする :

$z = (s,t), z' = (s',t') \in \mathbf{T}$ に対して

$$\begin{aligned} &z \le z' \quad \text{if and only if} \quad s \le s', t \le t', \\ &z \le \infty \quad \text{for all } z \in \mathbf{T}. \end{aligned}$$

$i = 1,2$ に対して、$X^i = (\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{F}^i_t, X^i(t), P^i_x)$ を状態空間 $(E^i, \mathcal{B}^i)$ をもつ互いに独立な 1-パラメータの Markov 過程とする。

Mazziotto [7] に従い bi-Markov 過程を次のように定義する :

- $E = E^1 \times E^2$

- $X(z) = (X^1(s), X^2(t)) \quad z = (s,t) \in \mathbf{N}^2$
- $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2$
- $P_{(x,y)} = P_x^1 \otimes P_y^2, \quad (x,y) \in E$
- $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbf{T}\}$ を $\{\mathcal{F}_s^1 \otimes \mathcal{F}_t^2, (s,t) \in \mathbf{T}\}$ を含み、完備な σ–field の列とする。

定義 2.1 (1) $\mathbf{T}$–値確率変数 T が次の条件を満たすとき stopping point であるという： 任意の $z \in \mathbf{T}$ に対して、$\{T \leq z\} \in \mathcal{F}_z$.

(2) stopping point の列 $\{\sigma_t, t \geq 0\}$ が次の条件を満たすとき strategy であるという：

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= z \\ \sigma_{t+1} &= \sigma_t + e_i \text{ for some } i \\ \sigma_{t+1} &\text{ は } \mathcal{F}_{\sigma_t}\text{-可測} \end{aligned}$$

但し、$e_1 = (1,0)$、$e_2 = (0,1)$ 。

(3) strategy $\{\sigma_t\}$ と $\mathcal{F}_{\sigma_t}$–stopping time τ の組 (σ_t, τ) を tactic であるという。但し、$\mathcal{F}_{\sigma_t} = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\sigma_t \leq z\} \in \mathcal{F}_z, \forall z\}$。

$\bar{\Sigma}$ を

$$P_{(x,y)}(\tau \leq \infty) = 1, \quad \forall \ (x,y) \in E$$

を満たす tactic 全体、

Σ を

$$P_{(x,y)}(\tau < \infty) = 1, \quad \forall \ (x,y) \in E$$

を満たす tactic 全体とする。

この時、2パラメータ最適停止問題とは

$$\begin{aligned} S(x,y) &= E_{(x,y)}[g(X(\sigma^*_{\tau^*}))] = \sup_{(\sigma_t,\tau)\in\Sigma} E_{(x,y)}[g(X(\sigma_\tau))] \\ \bar{S}(x,y) &= E_{(x,y)}[g(X(\sigma^*_{\tau^*}))] = \sup_{(\sigma_t,\tau)\in\bar{\Sigma}} E_{(x,y)}[g(X(\sigma_\tau))] \end{aligned}$$

となる $(\sigma_t^*, \tau^*) \in \Sigma(\text{resp.}\bar{\Sigma})$ を求めることである。

但し、$g(X(\infty)) = \limsup_{z\to\infty} g(X(z))$。

T^i を Markov 過程 X^i の推移作用素とすると

$$\begin{aligned} T^1 f(x,y) &= E_{(x,y)}[f(X(1,0))], \\ T^2 f(x,y) &= E_{(x,y)}[f(X(0,1))] \end{aligned}$$

が成立する。

3 bi–excessive 関数と最適値関数

B を $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^2$–可測な $(-\infty, +\infty]$–値関数の全体とする。

定義 3.1 $f \in \mathbf{B}$ が次を満たすとき *bi–excessive (with respect to* T^1 *and* T^2 *)* という：

for all $(x, y) \in E$, $i = 1, 2$, $T^i f(x, y)$ は *well defined* で

$$T^i f(x, y) \le f(x, y)。$$

定義 3.2 $g \in \mathbf{B}$ とする。*bi–excessive* 関数 $f \in \mathbf{B}$ が次を満たすとき *smallest bi–excessive majorant of* g という：

$f \ge g$,、
$h \ge g$ となる任意の *bi–excessive* 関数 h に対して, $f \le h$。

$Qg = \max\{g, T^1 g, T^2 g\}$ によって Q を定義するとき、

$$V = \lim_{n \to \infty} Q^n g$$

は smallest bi–excessive majorant of g となる。

定理 3.1 g が $E[\sup_z g^-(X(z))] < \infty$ を満たすとする。その時、
(i) S は *the smallest bi–excessive majorant of* g.
(ii) $S = \bar{S}$.
(iii) $S = \max\{g, T^1 S, T^2 S\}$.
(iv) $S = \lim_{n\to\infty} Q^n g = \lim_{b\to\infty} \lim_{n\to\infty} Q^n g^b$
但し、$g^b(x, y) = \min\{g(x, y), b\}$.

4 方程式 (1) の解について

(1) の解と最適値関数 S が一致するための条件として、∞ における条件を与える。

命題 4.1 g が $E[\sup_z g^-(X(z))] < \infty$、$E[\sup_z g^+(X(z))] < \infty$ を満たすとし、f は $E[\sup_z f^+(X(z))] < \infty$、$E_{(x,y)}[f^-(X(e_i))] < \infty$ を満たす (1) の解とする。

この時、$S = f$ となるための十分条件は

$$\limsup_z g(X(z)) = \limsup_z f(X(z))。 \tag{2}$$

注意 4.1 *1–パラメータの最適停止問題の場合は、(2) は必要十分条件である。(see Shiryayev* [8]*).*

5 方程式 (1) の解の一意性について

Grigelionis [1] が与えた条件のもとで、方程式 (1) の解の一意性を考える。

$G \in \mathcal{B}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_G f(x,y) &= \max\{T^1 1_G f(x,y), T^2 1_G f(x,y)\} \\
\rho_n(G) &= \sup_{(x,y)\in G} (\hat{T}_G)^n 1(x,y)
\end{aligned}
$$

とおく。

命題 5.1 f_1 と f_2 を、$E_{(x,y)}[f^-(X(e_i))] < \infty$ を満たす (1) の解とし、更に、

$$
\sup_{(x,y)} |f_1(x,y) - f_2(x,y)| < \infty.
$$

を満たす。もし、次を満たす $G \in \mathcal{B}$ が存在すれば、$f_1 = f_2$ である：

$$
\begin{aligned}
&\rho_n(G) < 1 \qquad \mathit{for\ some} \quad n \\
&f_1(x,y) = f_2(x,y) \quad \forall (x,y) \in E \setminus G,
\end{aligned}
$$

系 5.1 もし、

$$
\sup_{(x,y)\in E} \max\{T^1 1_{E^1}(x,y), T^2 1_{E^2}(x,y)\} < 1
$$

ならば、(1) の解は有界可測関数のクラスで一意である。

参考文献

[1] B.I. Grigelionis. Conditions for the uniqueness of the solution of Bellman's equations. *Litovsk.Matemat. Sbornik*, **8**(1968),47–52.

[2] B.I. Grigelionis and A.N. Shiryayev. On stefan's problem and optimal stopping rules for Markov processes. *Theory Prob. Application*, **11**(1966),541–558.

[3] U. Krengel and L. Sucheston. Stopping rules and tactics for processes indexed by a directed set. *J.Multivariate Anal.*, **11**(1981),199–229.

[4] N.L. Lazrieva. Solutions of the Wald–Bellman equation. *Litovsk.Matem.Sbornik*, **19**(1974),79–88.

[5] A. Mandelbaum. Discrete multi–armed bandits and multi–parameter processes. *Probab.Th.Rel.Fields*, **71**(1986),129–147.

[6] A. Mandelbaum and R.J. Vanderbei. Optimal stopping and supermaringales over partially ordered sets. *Z.Wahrsch.verw.Geiete*, **57**(1981),253–264.

[7] G. Mazziotto. Two parameter optimal stopping and bi-Markov processes. *Z.Wahrsch.verw.Geiete*, **69**(1985),99–135.

[8] A.N. Shiryayev. *Optimal stopping rules.* Springer-Verlag,Berlin, 1979.