数理解析研究所講究録
第 835 巻 1993 年 49-58

A BAYESIAN SEQUENTIAL SCHEDULING ON TWO PARALLEL MACHINES

姫路短期大学　濱田年男　(Toshio Hamada)
愛知大学経営学部　玉置光司　(Mitsushi Tamaki)

1．緒言

２種類の異なるジョブJ_0とJ_1がそれぞれm個，n個あり，これらを２つの同一の機械のいずれかで加工するものとする．J_0の加工時間はパラメータ１の指数分布に従い，J_1の加工時間はパラメータｕの指数分布に従うものとする．ｕの値は未知であるが，事前分布としてパラメータ(w,a)のガンマ分布を持つと仮定する．ｕの事前分布のパラメータが(w,a)のときに，J_1を加工したときの加工時間がｚのとき，ｕの事後分布はパラメータが(w+z,a+1)のガンマ分布となる．各機械は一度に一つのジョブしか加工できず，また各ジョブは一度に一台の機械でしか加工されないものとする．評価基準として次の２つのものを考える．

(1) expected total flowtime：各ジョブのflowtime（時刻0からそのジョブの加工完了時刻までの時間）の総和の期待値

(2) expected makespan：時刻0から最後に加工が完了するジョブの加工完了時刻までの時間の期待値

各評価基準に対して，目的はそれらの最小化である．

この問題は学習を考慮した最も簡単な並列２機械スケジューリング問題であり，単一機械の場合における expected total flowtime の最小化問題は，Hamada and Glazebrook [2] において最適解が与えられている．

ｕの値が既知の場合は stochastic scheduling 問題であり，これに関しては多くの研究がなされてきており，一般に複数種類のジョブに対して，Pinedo and Weiss [5], Bruno, Downey, and Frederickson [1], Kämpke [3] 等において最適解が得られている．すなわち，評価基準(1)に対してはSEPT(Shortest Expected Processing Time first)規則が最適であり，評価基準(2)に対しては，LEPT(Longest Expected Processing Time first)規則が最適である．

2．動的計画法による定式化

2.1 Expected total flowtimeの最小化問題

ジョブJ_0とJ_1がそれぞれm個，n個あり，uの事前分布のパラメータが(w,a)のときに，最適政策を用いることにより生じるexpected total flowtimeを$F_{m,n}(w,a)$で表すと，

$$F_{m,n}(w,a)=\min\{F(m,n,w,a,0),F(m,n,w,a,1)\} \qquad (m\geqq 1,n\geqq 1)$$

$$F_{m,0}(w,a)=F(m,0,w,a,0) \qquad (m\geqq 1)$$

$$F_{0,n}(w,a)=F(0,n,w,a,1) \qquad (n\geqq 1)$$

ここに，F(m,n,w,a,i) (i=0,1) は，ジョブJ_0とJ_1がそれぞれm個，n個あり，uの事前分布のパラメータが(w,a)であり，どちらか一方の機械においてジョブJ_iが加工中のときに，最適政策を用いることにより生じるexpected total flowtimeであり，

$$F(m,n,w,a,0)=\min\{F^0(m,n,w,a,0),F^1(m,n,w,a,0)\} \qquad (m\geqq 2,n\geqq 1)$$

$$F(1,n,w,a,0)=F^1(1,n,w,a,0) \qquad (n\geqq 1)$$

$$F(m,0,w,a,0)=(m^2+m+2)/4 \qquad (m\geqq 1)$$

$$F^0(m,n,w,a,0)=(m+n)/2+F(m-1,n,w,a,0) \qquad (m\geqq 2,n\geqq 1)$$

$$\begin{aligned}F^1(m,n,w,a,0)=&(m+n)\int_0^\infty (u+1)^{-1}w^a u^{a-1}e^{-wu}\{\Gamma(a)\}^{-1}du\\&+\int_0^\infty F(m-1,n,w+x,a,1)w^a e^{-x}(w+x)^{-a}dx\\&+\int_0^\infty F(m,n-1,w+x,a+1,0)aw^a e^{-x}(w+x)^{-a-1}dx \qquad (m\geqq 1,n\geqq 1)\end{aligned}$$

$$F(m,n,w,a,1)=\min\{F^0(m,n,w,a,1),F^1(m,n,w,a,1)\} \qquad (m\geqq 1,n\geqq 2)$$

$$F(m,1,w,a,1)=F^0(m,1,w,a,1) \qquad (m\geqq 1)$$

$$F(0,n,w,a,1)=\{w/(a-1)\}(n^2+n+2)/4 \qquad (n\geqq 1)$$

$$\begin{aligned}F^0(m,n,w,a,1)=&(m+n)\int_0^\infty (u+1)^{-1}w^a u^{a-1}e^{-wu}\{\Gamma(a)\}^{-1}du\\&+\int_0^\infty F(m-1,n,w+x,a,1)w^a e^{-x}(w+x)^{-a}dx\\&+\int_0^\infty F(m,n-1,w+x,a+1,0)aw^a e^{-x}(w+x)^{-a-1}dx \qquad (m\geqq 1,n\geqq 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^1(m,n,w,a,1)=&\{w/(a-1)\}(m+n)/2\\&+\int_0^\infty F(m,n-1,w+x,a+1,1)aw^a(w+x)^{-a-1}dx \qquad (m\geqq 1,n\geqq 2)\end{aligned}$$

ここに，$F^k(m,n,w,a,i)$ $(i=0,1;k=0,1)$ は，ジョブJ_0とJ_1がそれぞれm個，n個あり，uの事前分布のパラメータが(w,a)であり，どちらか一方の機械においてジョブJ_iが加工中で，もう一方が空きの時に，まずその空いている機械でJ_kの加工を開始し，以後最適政策を用いることにより生じるexpected total flowtimeである．

2.2 Expected makespanの最小化問題

ジョブJ_0とJ_1がそれぞれm個，n個あり，uの事前分布のパラメータが(w,a)のときに，最適政策を用いることにより生じるexpected makespanを$M_{m,n}(w,a)$で表すと，

$$M_{m,n}(w,a)=\min\{M(m,n,w,a,0),M(m,n,w,a,1)\} \qquad (m\geqq 1,n\geqq 1)$$

$$M_{m,0}(w,a)=M(m,0,w,a,0) \qquad (m\geqq 1)$$

$$M_{0,n}(w,a)=M(0,n,w,a,1)\} \qquad (n\geqq 1)$$

ここに，$M(m,n,w,a,i)$ $(i=0,1)$ は，ジョブJ_0とJ_1がそれぞれm個，n個であり，uの事前分布のパラメータが(w,a)であり，さらにどちらか一方の機械においてジョブJ_iが加工中で，他方の機械が空きの状態のときに，最適政策を用いることにより生じる expected makespan であり，

$$M(m,n,w,a,0)=\min\{M^0(m,n,w,a,0),M^1(m,n,w,a,0)\} \qquad (m\geqq 2,n\geqq 1)$$

$$M(1,n,w,a,0)=M^1(1,n,w,a,0) \qquad (n\geqq 1)$$

$$M(m,0,w,a,0)=(m+1)/2 \qquad (m\geqq 1)$$

$$M^0(m,n,w,a,0)=1/2+M(m-1,n,w,a,0) \qquad (m\geqq 2,n\geqq 1)$$

$$\begin{aligned}M^1(m,n,w,a,0)=&(1/2)\int_0^\infty(u+1)^{-1}w^a u^{a-1}e^{-wu}\{\Gamma(a)\}^{-1}du\\&+\int_0^\infty M(m-1,n,w+x,a,1)w^a e^{-x}(w+x)^{-a}dx\\&+\int_0^\infty M(m,n-1,w+x,a+1,0)aw^a e^{-x}(w+x)^{-a-1}dx \qquad (m\geqq 1,n\geqq 1)\end{aligned}$$

$$M(m,n,w,a,1)=\min\{M^0(m,n,w,a,1),M^1(m,n,w,a,1)\} \qquad (m\geqq 1,n\geqq 2)$$

$$M(m,1,w,a,1)=M^0(m,n,w,a,1) \qquad (m\geqq 1)$$

$$M(0,n,w,a,1)=\{w/(a-1)\}(n+1)/2 \qquad (n\geqq 1)$$

$$\begin{aligned}M^0(m,n,w,a,1)=&(1/2)\int_0^\infty(u+1)^{-1}w^a u^{a-1}e^{-wu}\{\Gamma(a)\}^{-1}du\\&+\int_0^\infty M(m-1,n,w+x,a,1)w^a e^{-x}(w+x)^{-a}dx\end{aligned}$$

$$+\int_0^\infty M(m,n-1,w+x,a+1,0)aw^a e^{-x}(w+x)^{-a-1}dx \qquad (m\geqq 1, n\geqq 1)$$

$$M^1(m,n,w,a,1)=\{w/(a-1)\}/2$$

$$+\int_0^\infty M(m,n-1,w+x,a+1,1)aw^a(w+x)^{-a-1}dx \qquad (m\geqq 1, n\geqq 2)$$

ここに，$M^k(m,n,w,a,i)$ $(i=0,1;k=0,1)$ は，ジョブJ_0とJ_1がそれぞれm個，n個あり，uの事前分布のパラメータが(w,a)であり，どちらか一方の機械においてジョブJ_iが加工中で，もう一方が空きの時に，まずその空いている機械でJ_kの加工を開始し，以後最適政策を用いることにより生じるexpected makespanである．

3．(n,1)-expected total flowtime最小化問題

$G_{n,k}(w,a)$を，(n,1)-expected total flowtime最小化問題で，J_0の残り個数がkとなった時，J_1を加工する政策の下での expected total flowtime とすると，

$$G_{n,k}(w,a)=(n^2+3n-2)/4+w/(a-1)+\{\sum_{i=1}^{k-1}(k+1-i)A_i(w,a)-(k-2)\}/2$$

ここで，Uをパラメータ(w,a)のガンマ確率変数とするとき，

$$A_k(w,a)=E[\{1/(1+U)\}^k \mid w,a]$$

と定義する．すなわち

$$A_k(w,a)=\int_0^\infty \{1/(1+u)\}^k w^a u^{a-1} e^{-wu}\{\Gamma(a)\}^{-1}du \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

したがって，

$$F_{n,1}(w,a)=\min_{1\leqq k\leqq n} G_{n,k}(w,a)$$

$$=(n^2+3n-2)/4+w/(a-1)+\min_{1\leqq k\leqq n}\{\sum_{i=1}^{k-1}(k+1-i)A_i(w,a)-(k-2)\}/2$$

ここで，$R_{n,k}(w,a)$を次式により定義する．

$$R_{n,k}(w,a)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{k-1}(k+1-i)A_i(w,a)-(k-2), & 1<k\leqq n\\ 1, & k=1\end{cases}$$

この時，次の補題が成立する．

［補題１］ $A_1(w,a)\geqq 1/2$ ならば

$$\min_{1\leqq k\leqq n} R_{n,k}(w,a)=R_{n,1}(w,a)$$

が成立する．換言すれば，この時はJ_1を最後に加工するのが最適である．

(証明) $R_{n,1}(w,a)=1$であるから$R_{n,k}(w,a)\geqq 1$, $1<k\leqq n$を示せばよい. $f(x)=x^i$, $1<k\leqq n$はxの凸関数であるから, Jensenの不等式より, $E[X^i]\geqq(E[X])^i$が成立する. この不等式で$X=1/(1+U)$とすることにより, $A_i(w,a)\geqq\{A_1(w,a)\}^i$が成立する. したがって, $A_1(w,a)\geqq 1/2$ ならば $A_i(w,a)\geqq(1/2)^i$. 故に$1<k\leqq n$に対して

$$
\begin{aligned}
R_{n,k}(w,a) &= \sum_{i=1}^{k-1}(k+1-i)A_i(w,a)-(k-2)\\
&\geqq \sum_{i=1}^{k-1}(k+1-i)(1/2)^i-(k-2)\\
&= 1.\square
\end{aligned}
$$

コンピュータによる数値計算の結果, $n=1,2,\cdots,10$; $a=2,3,\cdots,10$ に対して, 最適政策は次のようになる.

$r_2(a)<w$ の時, J_0の残り個数が1になればJ_1を加工開始する.

$r_{k+1}(a)<w<r_k(a)$ の時, J_0の残り個数がkになればJ_1を加工開始する.
$(k=2,3,\cdots,n-1)$

$0<w<r_n(a)$の時, J_0の残り個数がnになればJ_1を加工開始する.

ここに, $r_n(a)$は次の表で与えられる.

表1. $r_n(a)$ $(n=1,2,\cdots,10;\ a=2,3,\cdots,10)$

a \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1.5594	1.4217	1.3259	1.2596	1.2129	1.1791	1.1539	1.1345	1.1193
3	2.5404	2.3928	2.2885	2.2159	2.1652	2.1294	2.1034	2.0843	2.0698
4	3.5305	3.3780	3.2695	3.1941	3.1420	3.1057	3.0802	3.0619	3.0486
5	4.5245	4.3690	4.2581	4.1812	4.1285	4.0923	4.0673	4.0498	4.0374
6	5.5205	5.3630	5.2506	5.1728	5.1197	5.0837	5.0592	5.0424	5.0308
7	6.5176	6.3587	6.2453	6.1668	6.1136	6.0778	6.0538	6.0375	6.0265
8	7.5154	7.3555	7.2413	7.1624	7.1091	7.0735	7.0499	7.0341	7.0235
9	8.5137	8.3531	8.2382	8.1590	8.1057	8.0703	8.0470	8.0316	8.0214
10	9.5124	9.3511	9.2358	9.1563	9.1030	9.0678	9.0447	9.0296	9.0198

4. (n,1)-expected makespan最小化問題

$H_{n,k}(w,a)$を, (n,1)-expected makespan最小化問題で, J_0の残り個数がkとなった時, J_1を加工する政策の下でのexpected makespanとすると,

$$H_{n,k}(w,a)=(n+1)/2+w/(a-1)-\{\sum_{i=1}^{k}A_i(w,a)+A_k(w,a)\}/2$$

したがって，

$$M_{n,1}(w,a)=\min_{1\leqq k\leqq n}H_{n,k}(w,a)$$

$$=(n+1)/2+w/(a-1)-\max_{1\leqq k\leqq n}\{\sum_{i=1}^{k}A_i(w,a)+A_k(w,a)\}/2$$

ここで，

$$Q_{n,k}(w,a)=\sum_{i=1}^{k}A_i(w,a)+A_k(w,a)$$

とおくと，次の２つの補題が成立する．

［補題２］ $A_1(w,a)\geqq 1/2$ならば，$\max_{1\leqq k\leqq n}F_{n,k}(w,a)=F_{n,n}(w,a)$，すなわち$J_1$を最初に加工するのが最適である．

（証明） $1\leqq k\leqq n-1$に対して，$Q_{n,k+1}(w,a)\geqq Q_{n,k}(w,a)$を証明すればよい．$f(x)$と$g(x)$がｘに関して共に増加あるいは共に減少な関数である時，確率変数Ｘに関して，

$$E[f(X)g(X)]\geqq E[f(X)]E[g(X)]$$

が成立するという性質（Ross[6]のProposition 7.1.5参照）を用いて，

$$\begin{aligned}Q_{n,k+1}(w,a)-Q_{n,k}(w,a)&=2A_{k+1}(w,a)-A_k(w,a)\\&=E[2(1+U)^{-k-1}-(1+U)^{-k}]\\&=E[(1+U)^{-k}\{2(1+U)^{-1}-1\}]\\&\geqq E[(1+U)^{-k}]E[2(1+U)^{-1}-1]\\&=A_k(w,a)(2A_1(w,a)-1)\\&=2A_k(w,a)(A_1(w,a)-1/2)\\&\geqq 0.\ \square\end{aligned}$$

［補題３］ aを固定したとき，単調列$q_1(a)=0,q_2(a),q_3(a),\cdots,q_n(a),q_{n+1}(a)=\infty$が存在して，$q_i(a)<q_{i+1}(a)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ならば，$q_i(a)<w\leqq q_{i+1}(a)$ に対して，

$$\max_{1\leqq k\leqq n}Q_{n,k}(w,a)=Q_{n,i}(w,a)$$

ただし，退化する場合もある．

（証明） あるiに対して

$$\max_{1\leqq k\leqq n}Q_{n,k}(w_1,a)=Q_{n,i}(w_1,a)$$

が成立すれば，任意の$w_2>w_1$に対して，$j=j(w_2)\geqq i$ が存在して，

$$\max_{1\leqq k\leqq n}Q_{n,k}(w_2,a)=Q_{n,j}(w_2,a)$$

となることを背理法で証明する．もし，ある$w_2>w_1$に対して，

$$\max_{1\leqq k\leqq n} Q_{n,k}(w_2,a)=Q_{n,h}(w_2,a)$$

となる$h(<i)$が存在すると仮定すると，

$$Q_{n,i}(w_2,a)\leqq Q_{n,h}(w_2,a) \tag{1}$$

ここで，任意の$w\geqq 0$に対して

$$Q_{n,i}(w,a)-Q_{n,h}(w,a)=2E[\{(1+U)^{-1}-1/2\}\sum_{k=h}^{i-1}(1+U)^{-k}] \tag{2}$$

であり，［ ］内の関数はUに関して一度だけ正から負へ符号が変化する．Uはw^{-1}に関してＭＬＲであるから，Karlin and Rubin [4] の結果より，(2)はwについて負から正へ一度だけ符号が変化する．このことと(1)，および$w_2>w_1$より，

$$Q_{n,i}(w_1,a)<Q_{n,h}(w_1,a)$$

したがって

$$\max_{1\leqq k\leqq n} Q_{n,k}(w_1,a)\neq Q_{n,i}(w_1,a)$$

これは矛盾．□

コンピュータによる数値計算の結果，n=2,3,…,10; a=2,3,…,10 であるような(n,a)に対して，$q_2(a)=q_3(a)=\cdots=q_n(a)$となり，この値を$s_n(a)$とおくと，最適政策は次のようになる．

$s_n(a)<w$ の時，J_0の残り個数がnのときにJ_1を加工開始する．

$0<w<s_n(a)$の時，J_0の残り個数が1になればJ_1を加工開始する．

表２．$s_n(a)$ (n=1,2,…,10; a=2,3,…,10)

a \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1.1312	1.0000	0.9104	0.8492	0.8064	0.7755	0.7525	0.7349	0.7210
3	2.0871	1.9425	1.8410	1.7708	1.7218	1.6872	1.6621	1.6435	1.6295
4	3.0650	2.9141	2.8073	2.7332	2.6820	2.6464	2.6212	2.6032	2.5899
5	4.0517	3.8973	3.7875	3.7114	3.6592	3.6234	3.5986	3.5812	3.5689
6	5.0429	4.8863	4.7746	4.6973	4.6446	4.6088	4.5845	4.5677	4.5561
7	6.0367	5.8784	5.7655	5.6874	5.6345	5.5989	5.5749	5.5587	5.5476
8	7.0320	6.8726	6.7587	6.6802	6.6271	6.5916	6.5680	6.5522	6.5417
9	8.0284	7.8681	7.7536	7.6746	7.6214	7.5861	7.5628	7.5474	7.5372
10	9.0255	8.8645	8.7495	8.6702	8.6170	8.5818	8.5588	8.5437	8.5338

ここに，$s_n(a)$は表２で与えられ，次の性質を満たしている．

$$s_{n-1}(a) \geqq s_n(a) \qquad (n=3,4,\cdots,10;\ a=2,3,\cdots,10)$$

$$s_n(a+1) \geqq s_n(a) \qquad (n=2,3,\cdots,10;\ a=2,3,\cdots,9)$$

$$s_{n-1}(a+1) \geqq s_n(a) \qquad (n=3,4,\cdots,10;\ a=2,3,\cdots,9)$$

５．(1,n)-total flowtime最小化問題

2.1節より，次の再帰方程式が成立する．

$$F_{1,n}(w,a)=\min\{F(1,n,w,a,0),\ F(1,n,w,a,1)\} \tag{3}$$

ここで，右辺の｛　｝内の第2項は複雑であるが，第１項は

$$F(1,n,w,a,0)=F^1(1,n,w,a,0) \qquad (n\geqq 1)$$

$$F^1(1,n,w,a,0)=(1+n)\int_0^\infty (u+1)^{-1} w^a u^{a-1} e^{-wu}\{\Gamma(a)\}^{-1}du$$
$$+\int_0^\infty F(0,n,w+x,a,1) w^a e^{-x}(w+x)^{-a}dx$$
$$+\int_0^\infty F_1(1,n-1,w+x,a+1,0) a w^a e^{-x}(w+x)^{-a-1}dx \qquad (m\geqq 1, n\geqq 1)$$

$$F(0,n,w+x,a,1)=\{(w+x)/(a-1)\}(n^2+n+2)/4 \qquad (n\geqq 1)$$

により，帰納的に次のように簡単に表せる．

$$F(1,n,w,a,0)=1+\{w/(a-1)\}(n^2+n+2)/4+\sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i}B_i(w,a)$$

ここに，

$$a_{2,1}=1$$
$$a_{n,1}=a_{n-1,1}+n/2 \qquad (n\geqq 3)$$
$$a_{n,n-1}=(-1)^n \qquad (n\geqq 3)$$
$$a_{n,i}=a_{n-1,i}-a_{n-1,i-1} \qquad (n-2\geqq i\geqq 2,\ n\geqq 4)$$

である．

６．(1,n)-makespan最小化問題

パラメータ(w,a)のガンマ確率変数Uに対して

$$B_k(w,a)=\int_0^\infty \{u/(1+u)\}^k w^a u^{a-1} e^{-wu}\{\Gamma(a)\}^{-1}du \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

とおくと，2.2節より，次の再帰方程式が成立する．

$$M(1,n,w,a,1)=\min\{M^0(1,n,w,a,1),M^1(1,n,w,a,1)\} \qquad (n\geqq 2)$$

ここに

$$M^0(1,n,w,a,1)=1/2+\{w/(a-1)\}\{(n+1)/2\}+B_n(w,a)-B_{n-1}(w,a)/2$$

および

$$M^1(1,n,w,a,1)=(1/2)\{w/(a-1)\}+\int_0^\infty M_{n-1}(1,n,w+x,a+1,1)aw^a(w+x)^{-a-1}dx$$

である．たとえば

$$M(1,1,w,a,1)=w/(a-1)+B_1(w,a)$$

また，

$$M^0(1,2,w,a,1)=1/2+\{w/(a-1)\}(3/2)+B_2(w,a)-B_1(w,a)/2$$

および

$$M^1(1,2,w,a,1)=(3/2)\{w/(a-1)\}+B_1(w,a)$$

となる．一般に$n\geqq 2$に対して，

$$M^0(1,n,w,a,1)-M^1(1,n,w,a,1)=B_n(w,a)-3B_{n-1}(w,a)/2+B_{n-2}(w,a)/2$$
$$+\int_0^\infty \max\{M^0(1,n-1,w+x,a,1)-M^1(1,n-1,w+x,a,1),0\}aw^a(w+x)^{-a-1}dx$$

したがって，「もし $B_n(w,a)-3B_{n-1}(w,a)/2+B_{n-2}(w,a)/2\geqq 0$ が成立するならば，$M^0(1,n,w,a,1)-M^1(1,n,w,a,1)\geqq 0$ が成立する．」

ここで，

$$B_n(w,a)-3B_{n-1}(w,a)/2+B_{n-2}(w,a)/2$$
$$=\int_0^\infty [\{u/(1+u)\}^n-(3/2)\{u/(1+u)\}^{n-1}+(1/2)\{u/+u)\}^{n-2}]\{1/\Gamma(a)\}w^a u^{a-1}e^{-wu}du$$

であり，

$$h(u)=\{u/(1+u)\}^n-(3/2)\{u/(1+u)\}^{n-1}+(1/2)\{u/+u)\}^{n-2}$$

とすると，$u>0$の範囲でuの値を増加するとき，$h(u)$の符号が一度だけ変わることにより，wについての方程式 $B_n(w,a)-3B_{n-1}(w,a)/2+B_{n-2}(w,a)/2=0$ は唯一の正の根を持つ．これを $t_n(a)$ で表す．$n=2$ の場合の最適解は $t_2(a)$により「$0<w\leqq t_2(a)$の時，かつその時のみ，まずJ_1を行うのが最適である」で与えられる．しかし，$n\geqq 3$の場合には，$0<w\leqq t_n(a)$であるような(w,a)に対してJ_1のみを行うのが最適であることを保証する．

コンピュータによる数値計算の結果，$n=1,2,\cdots,10$; $a=2,3,\cdots,10$ に対して，$B_n(w,a)-3B_{n-1}(w,a)/2+B_{n-2}(w,a)/2=0$ の根 $t_n(a)$ は，表3のようになる．この表において，$t_n(a)$ は次の性質を満たしていることがわかる．

(i) $t_n(a) \leqq t_n(a+1)$ $(n=2,3,\cdots,10;\ a=2,3,\cdots,9)$

(ii) $t_{n-1}(a) \leqq t_n(a)$ $(n=3,4,\cdots,10;\ a=2,3,\cdots,10)$

(iii) $t_n(a) \leqq t_{n-1}(a+1)$ $(n=3,4,\cdots,10;\ a=2,3,\cdots,9)$

表３．$t_n(a)$ $(n=1,2,\cdots,10;\ a=2,3,\cdots,10)$

a＼n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1.1312	1.6406	2.1457	2.6485	3.1494	3.6482	4.1436	4.6338	5.1161
3	2.0871	2.6030	3.1133	3.6201	4.1243	4.6259	5.1246	5.6193	6.1082
4	3.0650	3.5812	4.0926	4.6008	5.1066	5.6100	6.1109	6.6086	7.1022
5	4.0517	4.5669	5.0783	5.5869	6.0934	6.5978	7.1002	7.6000	8.0967
6	5.0429	5.5568	6.0677	6.5764	7.0832	7.5882	8.0915	8.5928	9.0917
7	6.0367	6.5494	7.0597	7.5681	8.0750	8.5803	9.0842	9.5866	10.0870
8	7.0320	7.5437	8.0534	8.5615	9.0683	9.5738	10.0781	10.5811	11.0826
9	8.0284	8.5391	9.0483	9.5560	10.0626	10.5682	11.0727	11.5762	12.0784
10	9.0255	9.5355	10.0440	10.5514	11.0579	11.5634	12.0680	12.5718	13.0745

文　献

[1] Bruno, J., Downey, P., and Frederickson, G. N. (1981). Sequencing tasks with exponential service times to minimize the expected flow time or makespan. J. Assoc. Comp. Mach. Vol.28, pp.100-113.

[2] Hamada, T. and Glazebrook, K. D. A Bayesian sequential single machine scheduling problem to minimize the expected weighted sum of flowtimes of jobs with exponential processing times. (to appear)

[3] Kämpke, T. (1989). Optimal scheduling of jobs with exponential service times on identical parallel processors. Opns. Res. Vol.37, pp.126-133.

[4] Karlin, S. and Rubin, H. (1956). The theory of decision procedures for distributions with monotone likelihood ratios. Ann. Math. Statist. 27, pp.272-299.

[5] Pinedo, M. and Weiss, G. (1979). Scheduling of stochastic tasks on two parallel processors. Naval Res. Logist. Quart., Vol.26, pp.527-535.

[6] Ross, S. (1983). Stochastic Processes. Wiley, New York.