数理解析研究所講究録
第835巻 1993年 110-119

特異な境界条件を持ったオイラー・ベルヌイ方程式の可制御性について

埼玉大学理学部　辻岡邦夫　(Kunio Tsujioka)

序　産業ロボットの弾性のあるアームを,モーターをとりつけた軸のまわりに同一平面上を回転させる問題の可制御性を考える。アームの長さを1とし,固定端を原点に,アームに沿ってx軸を取る。(x,t)におけるx軸に垂直方向の変位$u(x,t)$(tは時間)がオイラー・ベルヌイ方程式

(1) $u_{tt}(x,t)+2\beta u_{txxxx}(x,t)+\alpha u_{xxxx}(x,t)=g(x)f(t)$
　　$(0<x<1,\ t>0,\ \beta,\alpha$ は正の定数$)$

(2) $u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x)$

で表される場合を考えよう。固定端では

(3) $u(0,t)=u_x(0,t)=0$

とし,$x=1$でのモーメントは

(4) $u_{xx}(1,t)=0$

で与えられるものとする。ρをアームの単位長さ当りの質量mを先端$x=1$における集中質量とする。ρのみならず,mもアームの運動に影響を与える場合を扱う。そのため,$x=1$において境界条件

(5) $u_{xxx}(1,t)+k u_{xxxx}(1,t)=0$

を課す,ここで　$k=m/\rho$とする。$g(x)$は与えられた$L^2(0,1)$の関数とし$f(t)$を制御関数として,$u(x,t)$を制御する。境界条件(5)はその階数が4で，微分方程式(1)の階数に等しいという意味で特異な境界条件である。(Sakawa[3],[4],[7],[12],Sakawa-Matsuno-Fukushima[5],Sakawa-Matsuno[6],Matsuno-Fukushima-Ohsawa-Kiyohara[8],Sato-Sakawa[10],Sakawa-Luo[11],Tsujioka[13],[14])

[5] では,まず固有値問題

(6) $u^{(4)}(x)-\lambda u(x)=0,\ 0<x<1$

$$u(0)=u^{(1)}(0)=u^{(2)}(1)=u^{(3)}(1)+k\,u^{(4)}(1)=0$$

を解き

固有値 $\lambda_n=\omega_n{}^4\,(n=0,1,2,\cdots)$,
$0<\omega_0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n<\cdots\ (\omega_n\to\infty)$
固有関数 $\phi_0,\phi_1,\phi_2,\cdots$

を得た。これらの固有関数は必要に応じて定数倍することにより，ϕ_0を除いた$\phi_1,\phi_2,\cdots$が$L^2(0,1)$において，リース基底を成している。(1)－(5)の解を$\phi_n(n=1,2,\cdots)$により,$L^2(0,1)$で固有関数展開することにより,解を得た。しかし,境界条件の特異性により,得られた解が境界条件(5)を満たしているかどうかははっきりしない。

[6] では,(1)－(5)に似たより簡単な弾性項付き波動方程式

$$(7)\quad u_{tt}(x,t)-2\beta u_{txx}(x,t)-\alpha u_{xx}(x,t)=g(x)f(t)$$
$$(0<x<1,\beta,\alpha \text{ は正の定数})$$

を初期条件(2)と境界条件

$$(8)\quad u(0,t)=0$$
$$(9)\quad u_x(1,t)+k\,u_{xx}(1,t)=0$$

のもとで解いた。方法は固有関数展開によらない。ここでは(1)－(5)を同様の方法で扱い,可制御性についても論じる。以後，次の仮定をする。

(10)　$g(x)$は$x=1$の近傍で連続な$L^2(0,1)$の関数。

境界条件(5)に現れる4階の項を消去するため,先ず解は十分に滑らかとする。このとき,$x=1$を(1)に代入して

$$u_{tt}(1,t)+2\beta u_{txxxx}(1,t)+\alpha u_{xxxx}(1,t)=g(1)f(t)$$

これと,(5)より得られる　$u_{xxxx}(1,t)=-(1/k)u_{xxx}(1,t)$

から次式が得られる。

$$(11)\quad u_{tt}(1,t)-(2\beta/k)u_{txxx}(1,t)-(\alpha/k)u_{xxx}(1,t)$$
$$=g(1)f(t)$$

ここで　$U(x,t)=(u(x,t),u(1,t))$,
$AU(x,t)=(u_{xxxx}(x,t),-(1/k)u_{xxx}(1,t))$

とおけば,(9),(11)は

$$(12)\quad U_{tt}(x,t)+2\beta AU_t(x,t)+\alpha AU(x,t)=G(x)f(t),\quad G(x)=(g(x),g(1))$$

となる。初期条件(2)より次の様になる。

$$(13)\quad U(x,0)=U_0(x)=(u_0(x),u_0(1)),\quad U_t(x,0)=U_1(x)=(u_1(x),u_1(1))$$

§1では(12)-(13)を適当な関数空間で考察し,(1)−(5)を解く。
§2では固有関数展開を用いて，解を表す。
§3では,近似可制御性を示す。

§1　オイラー・ベルヌイ方程式　　空間$H=L^2(0,1)\times R$に内積

$$<(u,\alpha),(v,\beta)>=(u,v)+k\alpha\beta$$

を入れたものは，ヒルベルト空間である。　但し(u,v)は$L^2(0,1)$の内積とする。Hにおける作用素Aを次のように定義する。

$$D(A)=\{(u,u(1));u\in H^4(0,1),u(0)=u'(0)=u''(1)=0\}$$
$$A(u,u(1))=(u^{(4)},-(1/k)u^{(3)}(1))$$

Aについては次の補題が成り立つ。

補題1　AはHで正値自己共役作用素で，完全連続な逆を持つ。

証明　[6]におけると同様に示される。

(12)−(13)を解くため，$V=U_t$　とおき

$$(14)\quad \tilde{U}=\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix},\quad \mathcal{A}\tilde{U}=\begin{bmatrix}0 & 1\\A & -2\beta A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix},\quad \tilde{G}=\begin{bmatrix}0\\G\end{bmatrix}$$

とおけば

$$(15)\quad \tilde{U}_t = \mathcal{A}\tilde{U} + \tilde{G} f(t)$$

$$(16)\quad \tilde{U}(0) = U_0, \qquad \tilde{U}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix}$$

(15)－(16)をヒルベルト空間$\mathfrak{X} = D(A^{1/2}) \times H$で考え，$\mathfrak{X}$における作用素$\mathcal{A}$を定義域$D(\mathcal{A}) = D(A) \times D(A)$に属するUに対し，(14)で定義する。$\mathcal{A}$は，$\mathfrak{X}$における解析的半群$S(t)$の生成作用素である(Curtain-Pritchard[1])。$T > 0$とする。$U(t)$が$0 \leqq t \leqq T$で(15)-(16)の解であるとは，

$U(t) \in C^1([0,T];\mathfrak{X})$，$0 \leqq t \leqq T$で$\tilde{U}(t) \in D(\mathcal{A})$，かつ(15)-(16)を満たす

ことである。

定理1 任意の$T > 0$，$\tilde{U}_0 \in D(\mathcal{A})$と$f(t) \in C^1[0,T]$に対し，$[0,T]$での(15)-(16)の解$\tilde{U}(t)$が一意に存在し

$$\tilde{U}(t) = S(t)\tilde{U}_0 + \int_0^t S(t-s)\tilde{G} f(s)\,ds$$

で与えられる(クレイン［１］)。

$u_0(x), u_1(x) \in D(A)$に対して $u(x,t)$が$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq T$で(1)-(5)の弱解であるとは

$$\tilde{U}_0 = \begin{bmatrix} (u_0, u_0(1)) \\ (u_1, u_1(1)) \end{bmatrix}$$

に対し

$$\tilde{U}(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ U_t(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) = (u(x,t), u(1,t))$$

が (15)-(16)の解であることである。定理１は次の様に言い換えられる。

定理2 (a) $u_0(x), u_1(x) \in D(A)$に対して，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq T$における(1)-(5)の弱解$u(x,t)$が一意的に存在する。

(b) $u(x,t)$は次の1,2,3,を満たしている。

1. $u(x,t)$は$[0,T]\to L^2(0,T)$の関数としてC^2である。
2. $u(x,t), u_t(x,t) \in D(A) \subset H^4(0,1) \subset C^3[0,1]$ $(0 \leqq t \leqq T)$ $u(1,t) \in C^2[0,T]$ 。
3. すべての$t \in [0,T]$ とほとんどすべての$x \in [0,1]$ に対して，方程式(1),(2),(3),(4)および(11)を満たす。

上の(b)では特異な境界条件(5)が方程式(11)と入れ替わっているが,その妥当性を次に示す。

定理3　$u(x,t)$が, $x=1$の近傍と$t \in [0,T]$ でtについて1回, xについて4回連続的微分可能で, $u_0(x)$が境界条件(5)を満たすならば, $u(x,t)$も(5)を満たす。

証明　(1)で$x=1$とおいて

$$u_{tt}(1,t)+2\beta u_{txxxx}(1,t)+\alpha u_{xxxx}(1,t)=g(1)f(t)$$

これと(11)により

$$w(t)=u_{xxx}(1,t)+k u_{xxxx}(1,t)$$

とおけば

$$2\beta w'(t)+\alpha w(t)=0,$$
$$w(0)=u_{xxx}(1,0)+k u_{xxxx}(1,0)=u_{0xxx}(1,0)+k u_{0xxxx}(1,0)=0$$

よって　$w(t)\equiv 0$ となり(5)を得る。

系1　$g(x)$, $f(t)$, $u_0(x)$, $v_0(x)$が十分に滑らかで$u_0(x)$が(5)を満たしているならば, $u(x,t)$も(5)を満たす。

§2　解の固有関数展開　　序節で述べた$\lambda_n=\omega_n^4$, ϕ_n $(n=0,1,2,\cdots)$を用いる。 必要に応じて定数倍すれば, $(\phi_n, \phi_n(1))$は固有値λ_nに対応するAの固有関数で,ヒルベルト空間Hの完全正規直交系を成す。任意の$(u,\alpha)\in H$に対して

$$(u,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\phi_n, \phi_n(1)), \quad u_n=(u,\phi_n)+k\alpha\phi_n(1)$$

と展開できる。(1)－(5)の弱解 $u(x,t)$ に対して

$$U(x,t)=(u(x,t),u(1,t))$$

を展開しよう。

$$(17)\quad (u,u(1))=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)(\phi_n,\phi_n(1))$$
$$u_n(t)=(u(x,t),\phi_n)+ku(1,t)\phi_n(1)$$

と展開し，(17)を(12),(13)に代入して

$$(18)\quad u_n''+2\beta\lambda_n u_n'+\alpha\lambda_n u_n=g_n f(t),$$
$$g_n=(g,\phi_n)+kg(1)\phi_n(1)$$
$$(19)\quad u_n(0)=(u_0,\phi_n)+ku_0(1)\phi_n(1)\equiv u_n\quad,$$
$$u_n'(0)=(u_1,\phi_n)+ku_1(1)\phi_n(1)\equiv v_n$$

(18)を解くため

$$\rho_n^{\pm}=-\beta\lambda_n\pm(\beta^2\lambda_n^2-\alpha\lambda_n)^{1/2}$$

とおく。簡単のため，$\beta^2\lambda_n-\alpha\neq 0, n=0,1,2,\cdots$ とする。同次方程式

$$(20)\quad u_n''+2\beta\lambda_n u_n'+\alpha\lambda_n u_n=0$$

の(19)を満たす解を $u_n(t)$ とすると

$$(21)\quad u_n(t)=q_n(t)u_n+r_n(t)v_n,\quad u_n'(t)=s_n(t)u_n+w_n(t)v_n$$

ここで

$$q_n(t)=\sigma_n(-\rho_n^-\exp(\rho_n^+t)+\rho_n^+(\exp(\rho_n^-t))$$
$$r_n(t)=\sigma_n(\exp(\rho_n^+t)-(\exp(\rho_n^-t)$$
$$s_n(t)=\sigma_n\alpha\lambda_n(-\exp(\rho_n^+t)+\exp(\rho_n^-t))$$
$$w_n(t)=\sigma_n(\rho_n^+\exp(\rho_n^+t)-\rho_n^-\exp(\rho_n^-t))$$
$$\sigma_n=(\rho_n^+-\rho_n^-)^{-1}=2^{-1}(\beta^2\lambda_n^2-\alpha\lambda_n)^{-1/2}$$ で

以後，$\Phi_n=(\phi_n,\phi_n(1))$ とおく。

定理4 （固有関数展開） $g(x)\equiv 0$のとき，（1)-(5)の弱解を$u(x,t)$とし

$$U(t)=U(x,t)=(u(x,t),u(1,t))$$
$$V(t)=V(x,t)=(u_t(x,t),u_t(1,t))$$

とおけば

$$\begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = S(t)\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}(q_n(t)u_n+r_n(t)v_n)\Phi_n \\ \sum_{n=0}^{\infty}(s_n(t)u_n+w_n(t)v_n)\Phi_n \end{bmatrix}$$

ただし

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\Phi_n$$
$$V=\sum_{n=0}^{\infty}v_n\Phi_n$$

§3 近似可制御性 (1)-(5)が，$T>0$に対して，近似可制御とは任意の$u_T(x)$，$v_T(x)\in L^2(0,1)$と$\varepsilon>0$に対し，$f(t)\in L^2(0,T)$を適当に選ぶことにより，(1)-(5)の解$u(x,t)$で初期条件

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0(0\leqq x\leqq 1),$$

から出発したものが 最終時間Tにおいて

$$\|u(x,T)-u_T(x)\|+\|u_t(x,T)-v_T(x)\|<\varepsilon$$

を満たすように出来ることである。ここで，$\|\ \|$は$L^2(0,1)$ノルムを表す。

定理5 $g(x)$は(10)の他に

(22) 任意のnに対し $g_n=\langle g,\phi_n\rangle\neq 0$

を満たすとする。このとき，(1)-(5)は任意の$T>0$に対して，近似可制御であ

る。

証明　$u(x,t)$を

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0\ (0\leqq x\leqq 1)$$

を満たす(1)-(5)の解とし,

$$Lf=\begin{bmatrix} U(T) \\ U_t(T) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} r_n(T-s)\Phi_n g_n f(s)\,ds \\ \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} w_n(T-s)\Phi_n g_n f(s)\,ds \end{bmatrix}$$

とおく。

$$\langle Lf,\ Z\rangle_{\mathfrak{X}}=0,\ \forall f\in L^2(0,T)\rightarrow Z=0$$

を示す。

$$Z=\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} z_{0n}\Phi_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} z_{1n}\Phi_n \end{bmatrix}$$

とすると

$$\int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_n^4 r_n(T-s) z_{0n}+w_n(T-s) z_{1n} g_n) f(s)\,ds=0$$

$$\forall f\in L^2(0,T)$$

ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\omega_n^4 r_n(t) z_{0n}+w_n(t) z_{1n} g_n)=0,\quad 0\leqq t\leqq T$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\omega_n^4(\sigma_n(\exp(\rho_n^+ t)-(\exp(\rho_n^- t))z_{0n}+$$
$$(\sigma_n(\rho_n^+\exp(\rho_n^+ t)-\rho_n^-\exp(\rho_n t))z_{1n})g_n)$$
$$=0,\ 0\leqq t\leqq T$$

$$(23)\ \sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n(\omega_n^4 z_{0n}+\rho_n^+ z_{1n})\exp(\rho_n^+ t)-$$
$$(\omega_n^4 z_{0n}+\rho_n^- z_{1n})\exp(\rho_n^- t))g_n=0, 0\leqq t\leqq T$$

$\delta>0$が存在して

$$\mathrm{Re}\,\rho_n^+, \mathrm{Re}\,\rho_n^-\leqq-\delta$$

となるるから,解析接続により,(23)はRe $t>0$にまで拡張される。これより

$$\sigma_n(\omega_n^4 z_{0n}+\rho_n^+ z_{1n})g_n=(\omega_n^4 z_{0n}+\rho_n^- z_{1n})g_n=0$$

(22)により

$$\sigma_n(\omega_n^4 z_{0n}+\rho_n^+ z_{1n})=\omega_n^4 z_{0n}+\rho_n^- z_{1n}=0$$

ゆえに

$$z_{0n}=z_{1n}=0$$

参　考　文　献

[1] クレイン，牛島，辻岡訳，バナッハ空間における線形微分方程式,吉岡書店,1972
[2] Curtain-Pritchard,Infinite Dimensional Linear System Theory, Springer,1978
[3] Sakawa,Y.,Feedback control of second order evolution equations with damping SIAM J.Optim.22,343-361(1984)
[4] Sakawa,Y.,Feedback control of second order evolution equations with unbounded observation,Int.J. Control.41.717-731(1985)
[5] Sakawa,Y.,Matsuno,F.,Fukushima,S.,Modeling and feedback of a flexible arm,J.of Robotic System 2(1985)
[6] Sakawa,Y.,Matsuno,F.,Modeling and control of a flexible manipulator with a parallel drive mechanism,Int.J.Control.44, 299-313(1986)
[7] 坂和愛幸,分布定数系としてのロボットアームの弾性振動の安定化制御,昭和60年度科学研究費補助金(一般(Ｂ))研究成果報告書,1986
[8] Matsuno,F.,Fukushima,S.,Ohsawa,Y.,Kiyohara,M.,Feedback control of a flexibleamanipulator with a parallel drive mechanism,Int. J. of Robotics Research 6,76-84(1987)
[10] Sato,T.,Sakawa,Y.,Modeling and control of a flexible rotary crane,Int.J.Control.48,2085-2105(1988)
[11] Sakawa,Y.,Luo,Z.H.:Modeling and control of a coupled bending and torsional vibration of flexible beams,IEEE Transactions on Automatic Control.34,970-977,1989
[12] 坂和愛幸，柔軟ロボットの運動と力のハイブリット最適制御,昭和63年度科学研究費補助金(一般研究(Ｃ)) 研成果報告書,1989
[13] Tsujioka,K.On a hyperbolic equation in robotics with a singular boundary condition,Saitama Math.J.7,23-47(1989)A
[14] Tsujioka,K.On a damped wave equation with a singular boundary condition,Saitama Math.J.8,31-39(1990)