数理解析研究所講究録
第 835 巻 1993 年 120-124

凸関数の方向微分可能性について

富山大学経済学部経営学科
白石俊輔

Abstract: 凸関数の方向微分可能性は、通常その微分商(differential quotient) $t \to [f(x+td)-f(x)]/t$ の単調性によって説明される。ここでは、凸関数を max型関数として捉えることによって、今一度その方向微分可能性について考察することを試みる。

1. 準備: $f:\mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ は下半連続な真凸関数で、$\mathrm{int}(\mathrm{dom} f) \neq \emptyset$ とする。微分不可能計画問題では、関数が微分不可能な点 x においても方向微分:

$$f'(x;d) = \lim_{t\downarrow 0} [f(x+td)-f(x)]/t,$$

が任意の方向 d に関して存在する事を前提とする事が多い。凸関数は $\mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ 上でこの性質を持つ。ここでは、凸関数を max型関数として捉えることによって，今一度方向微分可能性について考察することを試みる。そこで次のような $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の集合を用意する。

$$L(f) := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid <\alpha, z> + \beta \leq f(z),\ \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

この時次の定理が成立する。

Theorem 1. (Rockafellar [25] Theorem 12.1)

$$f(x) = \sup\{<\alpha, x> + \beta \mid (\alpha,\beta) \in L(f)\}. \tag{1}$$

即ち、凸関数は一次関数のmax型関数として表わされる。

2. 方向微分可能性: max型関数の微分可能性定理として、最も広く知られているのは次の定理であろう。

Theorem 2. (Danskin [8] Chap.III Theorem 1) 連続関数 $\varphi:\mathbb{R}^n \times T \to \mathbb{R}$ に対し新たに関数 $\Phi:\mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ と解集合写像 $M:\mathbb{R}^n \to T$ を次式で定める:

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(x,t) \mid t \in T\},$$

$$M(x) = \{t \in T \mid \varphi(x,t) = \Phi(x)\}.$$

今もし $\mathbb{R}^m \supset T$ がコンパクトで、$\nabla_x \varphi(x,t)$ が存在し、しかも両変数に関して連続であれば、Φ は任意の方向に方向微分可能であり次の式が成立する:

$$\Phi'(x;d) = \max\{<\nabla_x \varphi(x,t),d> \mid t \in M(x)\}.$$

この公式を(1)に直截適用しようとすると一箇所困難が生じる。それは，定理 2 のT にあたる $L(f)$ がコンパクトではない事にある。併し、定理 2 においてT 自身のコンパクト性は実は本質的ではなく、M に適当な有界性があればよい。

Theorem 2'. (Auslender [3] Chap.IV Theorem 1.7) 定理 2 において T は必ずしもコンパクトではないとする。その代わり、集合値関数 M が xの近傍で (i) 空ではなく、(ii) 一様有界であるとする。この時次式が成立する:

$$\Phi'(x;d) = \sup\{<\nabla_x \varphi(x,t),d> \mid t \in M(x)\}.$$

こちらの定理を(1)に適用する事によって、凸関数の方向微分可能性を帰結する。(1)で $M(x)$ にあたる集合は:

$$M_f(x) := \{(\alpha,\beta) \in L(f) \mid <\alpha,x> + \beta = f(x)\},$$

となる。この $M_f(x)$ について(i) は $(x, f(x))$ と epi$f$ との分離定理によって示される。(ii)を示すために $\varepsilon > 0$ を用いて$M_f(x)$を膨らました(有界)集合を定義する:

$$M_f^{\varepsilon}(x) := \{(\alpha,\beta) \in L(f) \mid <\alpha,x> + \beta \geq f(x) - \varepsilon\}.$$

Lemma. $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ に対し x の近傍 U があって、適当な $\varepsilon > 0$ をとれば:

$$M_f^{\varepsilon}(x) \supset \cup_{y \in U} M_f(y) \qquad (2)$$

が成立する。従って $M_f(x)$ は(ii)を満たす。

以上の結果を併せる事によって凸関数の方向微分可能性を得る。

Remark: $M_f(x)$ と $M_f^{\varepsilon}(x)$ の第一成分への射影を考えると、各々劣微分 $\partial f(x)$ および ε- 劣微分 $\partial_\varepsilon f(x)$ になることが容易に確かめられる。ここで:

$$\partial f(x) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid <\alpha, z - x> \leq f(z) - f(x),\ \forall z \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \langle\alpha, z - x\rangle \le f(z) - f(x) + \varepsilon,\ \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

従って (2) の表わす関係式は:

$$\partial_\varepsilon f(x) \supset \cup_{y \in U} \partial f(y)$$

となるが、これは微分不可能凸最小化アルゴリズムのひとつである、バンドル法の基礎となる関係式である。(Lemaréchal[20], Zowe[29])

3. 二階の方向微分: ここでは、二階の Dini の方向微分について考察する:

$$f''(x;d) = \lim_{t \downarrow 0} [f'(x + td;d) - f'(x;d)]/t \tag{3}$$

前述註により、

$$f'(x;d) = \max\{\langle\alpha, d\rangle \mid \alpha \in \partial f(x)\}$$

となることが分かる。それゆえ、二階の Dini の方向微分を調べる際も、max型関数 $x \to f(x;d)$ の微分可能性を考察する事になる。但し今回は制約集合がパラメトリックな形であることに注意する。この関数の連続性から調べよう。勿論この関数は連続ではないのだが、$\partial f(x)$ の単調性によって次のような連続性は成り立つ。

Proposition.

$$\lim_{t \downarrow 0} f'(x + td;d) = f'(x;d).$$

残念ながら、凸関数は一般には二階方向微分可能でないことは次の例からも分かる。

$$f(x) = |x|^r, \qquad 1 < r < 2.$$

二階の Dini 方向微分可能性が欠落するのはパラメトリックな問題:

$$\begin{aligned}&\text{maximize } \langle\alpha, d\rangle \\ &\text{s.t.} \quad f(x) + f^*(\alpha) - \langle\alpha, x\rangle \le 0.\end{aligned} \tag{4}$$

が、凸計画問題ではあるけれども、Slater 条件のような正則性条件が成立しないことに起因している。(f^* は f の共役関数) この難点を解決するためには、$\partial_\varepsilon f(x)$ に対応するいま一つのmax型関数 $x \to f_\varepsilon'(x;d) = \max\{\langle\alpha, d\rangle \mid \alpha \in \partial_\varepsilon f(x)\}$ を用いればよい。これは、(4)に摂動を与えてSlater 条件が成立するようにしたものになる:

$$\text{maximize } \langle \alpha, d\rangle$$
$$\text{s.t.} \quad f(x) + f^*(\alpha) - \langle \alpha, x\rangle \leq \varepsilon .$$

Theorem 3.(Lemaréchal & Nurminskii [21], Auslender [4]) 関数 $x \to f_\varepsilon'(x;d)$ は常に次の形で方向微分が可能である。

$$f_\varepsilon''(x;d) = \lim_{t \downarrow 0} [f_\varepsilon'(x + td;d) - f_\varepsilon'(x;d)]/t .$$

この $f_\varepsilon''(x;d)$ が我々が本来知りたかった (3)と緊密な連絡があることも分かっている。(Shiraishi [28])

References

[1] A.D. Alexandrov (1939), "The existence almost everywhere of second differential of a convex function and some associated properties of convex surfaces," (in Russian) Ucenye Zapiski Leningr. Gos. Univ. Ser. Math. 37, 3-35.

[2] V.I. Arnol'd (1992), *Catastrophe theory.* Third, revised and expanded edition. (Springer, Berlin Heidelberg New York)

[3] A. Auslender (1976), *Optimization. Méthodes numérique.* (Masson, Paris)

[4] _____ (1982), "On the differential properties of the support function of the ε-subdifferential of a convex function," Mathematical Programming 24, 257-268.

[5] H. Busemann (1958), *Convex surfaces.* (Interscience, New York)

[6] R. Cominetti and R. Correa (1990), "A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization," SIAM J. Control and Optimization 28, 789-809.

[7] J.P. Crouzeix (1977), "A relationship between the second derivative of a convex function and of its conjugate, Mathematical Programming 13, 364-365

[8] J. M. Danskin (1967), *The theory of Max-Min.* (Springer, Berlin Heidelberg New York)

[9] V.F. Dem'yanov and A.B. Pevnyi (1974), "Expansion with respect to a parameter of the extremum values of game problems," U.S.S.R. Computational Math. and math. phys. 14, 33-45.

[10] N. Furukawa (1983), "Optimality conditions in nondifferentiable programming and their applications to best approximations," Applied Math. & Optimization 9, 337-371.

[11] R.E. Greene and K. Shiohama (1981), "Convex functions on complete noncompact manifolds: Topological structure," Invent. math. 63, 129-157.

[12] _____ and _____ (1981), "Convex functions on complete noncompact manifolds: Differentiable structure," Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série 14, 357-367.

[13] J.-B. Hiriart-Urruty (1986), "A new set-valued second order derivative for convex functions," in: J.-B. Hiriart-Urruty ed., Mathematics for optimization. (Elsevier), 157-182.

[14] _____ and A. Seeger (1989), "The second-order subdifferential and the Dupin indicatrices of a non-differentiable convex function," Proc. London Math. Soc. 58, 351-365.

[15] W.W. Hogan (1973), "Point to set maps in mathematical programming," SIAM Review 15, 591-603.

[16] B. Jessen (1929), "Om konvekse Kurvers Krumning," Mat. Tidsskr. B, 50-62.

[17] H. Kawasaki (1988), "The upper and lower second order directional derivatives of a sup-type function," Mathematical Programming 41, 327-339.

[18] _____ (1992), "Second-order necessary and sufficient optimality conditions for minimizing a sup-type function," Applied Math. & Optimization 26, 195-220.

[19] N. Kinugawa (1992), "A note of second-order differentiability and boundedness of generalized Hessian," (in Japanese) Master Thesis, Waseda University.

[20] C. Lemaréchal (1989), "Nondifferentiable optimization," in: G.L. Nemhauser et al ed., *Handbooks in OR & MS, Vol. 1* (Elsevier), 529-572.

[21] _____ and E. Nurminskii (1980), "Sur la différentiabilité de la fonction d'appui du sous-différential approche," Comptes Rendus de l'Académie des sciences 290, Série A, 855-858.

[22] F. Mignot (1976), "Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques," J. Functional Analysis 22, 130-185

[23] M. Moussaoui and A. Seeger (1992), "Sensitivity analysis of optimal value functions of convex parametric programs with possibly empty solution sets," Preprint. University of Avignon.

[24] R.R. Phelps (1989), *Convex functions, monotone operators and differentiability.* (Springer)

[25] R.T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis.* (Princeton University Press, Princeton)

[26] A. Seeger (1988), "Second order directional derivative in parametric optimization problems," Math. O.R. 13, 124-139.

[27] _____ (1992), "Second derivatives of a convex function and of its Legendre-Fenchel transformate," SIAM J. Optimization 2, 405-424.

[28] S. Shiraishi (1992) "On connections between approximate second-order directional derivative and second-order Dini derivative for convex functions," to appear in Mathematical Programming.

[29] J. Zowe (1985), "Nondifferentiable Optimization," in: K. Schittkowski ed., *Computational Mathematical Programming.* (Springer, Berlin Heidelberg), 323-356.