数理解析研究所講究録
第 835 巻 1993 年 173-180

On Markovian Jump Linear Systems

愛媛大学工学部　大橋　守 (Mamoru OHASHI)

1　はじめに

コンポーネントの故障や修理等によってシステムの構造やパラメータが変化するダイナミック線形システムを考える．このようなランダムパラメータをもつ線形システムは Wonham [6], Mariton [5], Ji and Chizeck [3] 等によって研究されている．ここではレギュレータ問題を中心に考察する．

次の Markovian Jump を考慮した線形システム

$$\dot{x}(t)=A(y(t))x(t)+B(y(t))u(t), \qquad t\in[t_0,T], \tag{1}$$

$$x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0$$

を考える．ただし，状態変数を $x(t)\in R^n$，入力変数 $u(t)\in R^m$，$n\times n$ 係数行列 $A(y(t))$，$n\times m$ 係数行列 $B(y(t))$，マルコフ連鎖 $\{y(t),t\geq 0\}$ とする．マルコフ連鎖の状態空間 S={1, 2, ..., s} は有限で生成行列 Λ を

$$\Lambda=\begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1s} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{22} & \dots & \lambda_{2s} \\ \dots & & & \\ \lambda_{s1} & \lambda_{s2} & \dots & -\lambda_{ss} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\lambda_{ii}=\sum_{j\neq i}\lambda_{ij},\ \lambda_{ij}\geq 0$$

とする．このマルコフ連鎖によって，コンポーネントの故障や修理等によるシステムパラメータの変化を表す．今後、記号を簡単にするために $y(t)=i$ であるとき $A(y(t))$, $B(y(t))$ を A_i, B_i と書くことにする．

入力 $u(t)$ は次の条件を満たす admissible control とする．

$$\phi:[t_0,T]\times R^n\times S\longrightarrow R^m,$$

$$|\,\phi(t,x,y)-\phi(t,\tilde{x},y)\,|\leq k\,|\,x-\tilde{x}\,|,$$

$$\phi(t,x,y)\leq k(1+|\,x\,|), \quad (k>0).$$

この admissible control のクラスを Φ で表す．Wonham [6] は

$$u(t)=\phi(t,x(t),y(t))\in\Phi$$

のとき (1), (2) の解が存在し，

$$z(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

とおくと、$\{z(t),\ t\leq 0\}$ がマルコフ過程になることを示した．

次の節で Markovian Jump パラメータをもつ線形システムの安定性について議論し, 連立 Lyapunov 方程式と安定性の関係を示す．3 節では Markovian Jump パラメータをもつ線形システムのレギュレータ問題を取扱い，最適制御法則を示す．

2 Stable

Markovian Jump パラメータをもつ線形システム (1), (2) において, $u(t) = 0$ の場合, すなわち, 線形システム

$$\dot{x}(t) = A(y(t))x(t), \qquad t \in [t_0, T] \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0, \ y(t_0) = y_0$$

の安定性について考察する.

定義 2.1 Markovian Jump パラメータをもつ線形システム (2), (3) の $x(t)$ が

$$\lim_{T\to\infty} \int_{t_0}^{T} \mathrm{E}[| \ x(t) \ |^2 \ | \ x_0, y_0] dt < \infty \tag{4}$$

であるとき、A は stochastically stable という.

定義 2.2 Markovian Jump パラメータをもつ線形システム (2), (3) の $x(t)$ が

$$\mathrm{E}[| \ x(t) \ |^2 \ | \ x_0, y_0] \leq C \ | \ x_0 \ |^2 e^{-\alpha t}, \qquad C > 0, \quad \alpha > 0 \tag{5}$$

であるとき, A は stochastically and exponentially stable という.

補題 2.1 任意の $i \in S$ に対して

$$(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)' P_i + P_i(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I) + \sum_{j\neq i} \lambda_{ij} P_j + I = 0 \tag{6}$$

となる対称正定行列 P_i, $i \in S$ が存在するとき, A は stochastically and exponentially stable となる.

[証明] 対称正定行列 P_i, $i \in S$ に対して stochastic Lyapunov 関数 $V(x, i)$ を

$$V(x, i) = x' P_i x$$

とする。マルコフ過程 $\{z(t)\}$ の weak infinitesimal operator $\tilde{A}$ は

$$\begin{aligned} \tilde{A}V(x, i) &= \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{1}{\Delta}\{\mathrm{E}[V(x(t+\Delta), y(t+\Delta)) \ | \ x(t) = x, y(t) = i] - V(x, i)\} \\ &= x' \{(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)' P_i + P_i(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I) + \sum_{j\neq i} \lambda_{ij} P_j\} x \end{aligned}$$

であるから (6) より

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}V(x, i)}{V(x, i)} &= -\frac{| \ x \ |^2}{x' P_i x} \\ &\leq -\frac{1}{\max_i \mu_{max}(P_i)} \end{aligned}$$

となる. ただし, $\mu_{max}(P_i)$ は対称正定行列 P_i の最大固有値を表す. 状態空間 S は有限集合であるから

$$\alpha = \frac{1}{\max_i \ \mu_{max}(P_i)} > 0$$

とおくと，Dynkin の公式と Gronwell の不等式より

$$\mathrm{E}[V(x(t),y(t))\ \mid\ x_0,y_0] \le e^{-\alpha t}V(x_0,y_0) \tag{7}$$

を得る．また，任意の $i \in S$ に対して P_i は対称正定行列であるから

$$x^{'}P_i x \ge \min_i\ \mu_{min}(P_i)\mid x\mid^2$$

となる．の最小固有値を表す．

$$\beta = \min_i\ \mu_{min}(P_i) > 0$$

とおくと，(7) 式は

$$\begin{aligned}\beta\mathrm{E}[\mid x(t)\mid^2\mid x_0,y_0] &\le \mathrm{E}[V(x(t),y(t))\mid x_0,y_0] \\ &\le e^{-\alpha t}x_0^{'}P(y_0)x_0 \\ &\le \max_i \mu_{max}(P_i)\mid x_0\mid^2 e^{-\alpha t} \\ &= \frac{1}{\alpha}\mid x_0\mid^2 e^{-\alpha t}\end{aligned}$$

従って，

$$\mathrm{E}[\mid x(t)\mid^2\ \mid\ x_0,y_0] \le C\mid x_0\mid^2 e^{-\alpha t}, \qquad (C = \frac{1}{\alpha\beta}).$$

注 2.1　補題 2.1 の (6) 式は次の 1 または 2 の式で置き換えることができる．

1. 任意の $i \in S$ に対して

$$(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)^{'}P_i + P_i(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I) + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j + I \le 0$$

2. 任意の対称正定行列 N_i，$i \in S$に対して

$$(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)^{'}P_i + P_i(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I) + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j + N_i = 0$$

系 2.1　補題 2.1 の条件のもとで A は stochastically stable となる．

対称正定行列 $M(T-t,i)$ を

$$x^{'}M(T-t,i)x = \mathrm{E}[\int_t^T \mid x(s)\mid^2 ds\ \mid\ x(t)=x, y(t)=i], \qquad t \in [t_0,T]$$

と定義する．

補題 2.2　A が stochastically stable ならば

$$\lim_{T-t\to\infty} M(T-t,i) = M_i$$

となる対称正定行列 M_i，$i \in S$が存在する．

[証明]　A が stochastically stable であることから $M(T-t,i)$ の定義より明かである．

補題 2.3　A が stochastically stable ならば M_i，$i \in S$ は方程式 (6) を満たす．

[証明]　Wonham より微分方程式

$$\frac{d}{dt}M(T-t,i) + (A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)'M(T-t,i) + M(T-t,i)(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I) + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}M(T-t,j) + I = 0, \quad t \in [t_0, T], \tag{8}$$

$$M(0,i) = 0$$

はただ一つの解 $M(T-t,i)$ をもつ．よって，

$$\mathrm{E}[x'(T)M(0,y(T))x(T)] = x_0 M(T-t_0,y_0)x_0 + \mathrm{E}[\int_{t_0}^{T} \tilde{A}\{x'(t)M(T-t,y(t))x(t)\}dt \mid x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0]$$

であるから (8) 式を用いると

$$x_0' M(T-t_0,y_0)x_0 = \mathrm{E}[\int_{t_0}^{T} | x(t) |^2 \, dt \mid x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0].$$

補題 2.2 より対称正定行列

$$M_i = \lim_{T-t_0\to\infty} M(T-t_0,i)$$

が存在する．(8) 式より M_i は補題 2.1 の条件式 (6) を満たす．

注 2.2　補題 2.3 の条件のもとで注 2.1 の式も同様に示すことができる．

この補題より (6) 式を満たす対称正定行列 P_i が存在することから次の結果を得る。

系 2.2　A が stochastically stable ならば $(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)$, $i \in S$ は stable となる．

以上の補題より deterministic の場合によく知られている次の同値関係が Markovian Jump Linear System の場合にも得られる．

定理 2.1　Markovian Jump パラメータをもつ線形システム (2), (3) に対して次の 3 つは同値となる．

1. A が stochastically and exponentially stable である．
2. A が stochastically stable である．
3. (6) 式を満たす対称正定行列 P_i, $i \in S$ が存在する．

3　Linear Quadratic Control

Markovian Jump パラメータをもつ線形システム (1), (2) に対して次の評価関数

$$J(u : x_0, y_0) = \mathrm{E}[\int_{t_0}^{\infty} \{x'(t)Q(y(t))x(t) + u'(t)R(y(t))u(t)\}dt \mid x_0, y_0] \tag{9}$$

を最小にする admissible control $u(t) \in \Phi$ を求めるレギュレータ問題を考える．ただし, Q_i は対称半正定行列, R_i は対称正定行列とする．T が有限である線形二次形式問題については次の結果が得られている．

$$\frac{d}{dt}P_i(t) + (A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iK_i(t))'P_i(t) + P_i(t)(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iK_i(t))$$

$$+\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j(t)+Q_i+K_i'(t)R_i(t)K_i(t)=0, \qquad i\in S,\ t\in[t_0,T] \tag{10}$$

$$K_i(t)=R_i^{-1}B_i'P_i(t), \qquad P_i(T)=0, \qquad i\in S.$$

を満たす解 P_i, $i\in S$が存在し，入力が

$$u^*(t)=-R(y(t))^{-1}B(y(t))'P(t,y(t))x(t)$$

のとき最小で

$$J(u^*:x_0,y_0)=\inf_{u\in\Phi}J(u:x_0,y_0)$$
$$=x_0'P(y_0)x_0$$

となる.

定義 3.1 Markovian Jump パラメータをもつ線形システム (1), (2) に対して，$A-BK$が stochastically stable となる $m\times n$ 行列 K_i, $i\in S$ が存在するとき (A,B) は stochastically stabilizable という.

対称半正定行列 Q_iは $Q_i=C_i'C_i$と分解できる.

定義 3.2 Markovian Jump パラメータをもつ線形システム (1), (2), (9) に対して $A-HC$が stochastically stable となる $n\times m$ 行列 H_i, $i\in S$ が存在するとき (C,A) は stochastically detectable という.

補題 3.1 (C,A) が stochastically detectable ならば $(C_i,A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I)$, $i\in S$ は detectable となる.

[証明] 系 2.2 より明らかである.

補題 3.2 (C,A) が stochastically detectable で

$$(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I-B_iK_i)'P_i+P_i(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I-B_iK_i)+Q_i+K_i'R_iK_i\leq 0$$

ならば $(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I-B_iK_i)$ は exponentially stable である.

[証明] Ichikawa [2] の lemma 4 と系 2.2 から結果を得る.

補題 3.3 $(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I-B_iK_i)$ が exponentially stable で W_iが半正定行列であるとき, 半正定行列

$$P_i=\int_{t_0}^{\infty}e^{-t(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I-B_iK_i)'}W_ie^{-t(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I-B_iK_i)}dt \tag{11}$$

は方程式

$$(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I-B_iK_i)'P_i+P_i(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I-B_iK_i)+W_i=0 \tag{12}$$

を満たす。逆に, P_iが対称で方程式 (12) を満たすならば P_i は積分の形 (11) で書ける.

[証明] Ichikawa [2] の lemma 5.

補題 3.4 Markovian Jump パラメータをもつ線形システム (1), (2), (9) に対して (A,B) が stochastically stabilizable で (C,A) が stochastically detectable ならば

$$(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I)'P_i+P_i(A_i-\frac{1}{2}\lambda_{ii}I)+\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j+Q_i-P_iB_iR_i^{-1}B_i'P_i=0 \tag{13}$$

となる対称半正定行列 P_i, $i\in S$が存在する.

[証明] 方程式

$$(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iK_i)'P_i^0 + P_i^0(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iK_i) + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j^0 + Q_i + K_i'R_iK_i \leq 0. \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^{n-1})'P_i^n \\ + P_i^n(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^{n-1}) \\ + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j^{n-1} + Q_i + P_i^{n-1}B_iR_i^{-1}B_i'P_i^{n-1} = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

によって，P_i^n, $n \geq 0$ を定義する．定理 2.1 より (A, B) が stochastically stabilizable であることから，ある $m \times n$ 行列 K_i に対して方程式 (14) を満たす対称正定行列 P_i^0 が存在する．この方程式 (14) は

$$\begin{aligned}(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^0)'P_i^0 + P_i^0(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^0) \\ + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j^0 + Q_i + P_i^0B_iR_i^{-1}B_i'P_i^0 \\ \leq -(K_i - R_i^{-1}B_i'P_i^0)'R_i(K_i - R_i^{-1}B_i'P_i^0) \leq 0\end{aligned}$$

と変形できることから、補題 3.2 より $(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^0)$ は exponentially stable となる．同様に方程式 (15) は

$$\begin{aligned}(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^n)'P_i^n + P_i^n(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^n) \\ + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j^{n-1} + Q_i + P_i^nB_iR_i^{-1}B_i'P_i^n \\ = -(P_i^n - P_i^{n-1})'B_iR_i^{-1}B_i'(P_i^n - P_i^{n-1}) \leq 0\end{aligned}$$

と書くことができ，$(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^n)$ は exponentially stable となる．$M_i^n = -(P_i^n - P_i^{n-1})$ とおくと

$$\begin{aligned}(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^0)'M_i^1 + M_i^1(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^0) \\ +(K_i - R_i^{-1}B_i'P_i^0)'R_i(K_i - R_i^{-1}B_i'P_i^0) \leq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^{n-1})'M_i^n + M_i^n(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I - B_iR_i^{-1}B_i'P_i^{n-1}) \\ + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}M_j^{n-1} + M_i^{n-1}B_iR_i^{-1}B_i'M_i^{n-1} = 0\end{aligned}$$

となり，補題 3.3 より M_i^n は半正定行列となる．M_i^n の定義より P_i^n は n に関して単調非増加となる．したがって，P_i^n は対称正定行列であるから

$$\lim_{n\to\infty} P_i^n = P_i \geq 0$$

となる P_i, $i \in S$ が存在し，(13) 式を満たす．

定理 3.1 (A,B) が stochastically stabilizable で (C,A) が stochastically detectable ならば制御法則が

$$u_t^* = -R(y(t))^{-1}B(y(t))'P(y(t))x(t)$$

のとき，評価関数 (9) を最小にし

$$\begin{aligned} J(u^* : x_0, y_0) &= \inf_{u\in\Phi} J(u : x_0, y_0) \\ &= x_0'P(y_0)x_0 \end{aligned}$$

となる．ただし，P_iは連立 Riccati 方程式 (13) の解とする．

[証明]　補題 3.4 より方程式 (13) の解 P_iは対称半正定行列であるから，マルコフ過程 $\{z(t)\}$ に対して

$$\tilde{A}\{x'P_ix\} = x'((A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)'P_i + P_i(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I) + \sum_{J\neq i}\lambda_{ij}P_j)x + u'B_i'P_ix + x'P_iB_iu$$

となる．Wonham より

$$\begin{aligned} x_0'P(y_0)x_0 \quad + \quad \mathrm{E}[\int_{t_0}^{\infty} &\{x'(t)((A(y(t)) - \frac{1}{2}\lambda_{y(t)y(t)}I)'P(y(t)) \\ &+P(y(t))(A(y(t)) - \frac{1}{2}\lambda_{y(t)y(t)}I) + \sum_{j\neq y(t)}\lambda_{y(t)j}P_j)x(t) \\ &+u'(t)B'(y(t))P(y(t))x(t) \\ &+x'(t)P(y(t))B(y(t))u(t)\}dt \mid x_0, y_0] = 0. \end{aligned}$$

を得る．このとき，評価関数は

$$\begin{aligned} J(u : x_0, y_0) \quad = \quad & x_0'P(y_0)x_0 \\ &+\mathrm{E}[\int_{t_0}^{\infty}\{x'(t)((A(y(t)) - \frac{1}{2}\lambda_{y(t)y(t)}I)'P(y(t)) \\ &\quad +P(y(t))(A(y(t)) - \frac{1}{2}\lambda_{y(t)y(t)}I) + \sum_{j\neq y(t)}\lambda_{y(t)j}P_j + Q(y(t)) \\ &\quad -P(y(t))B(y(t))R^{-1}(y(t))B'(y(t))P(y(t)))x(t) \\ &\quad +(u(t) + R^{-1}(y(t))B'(y(t))P(y(t))x(t))'R(y(t)) \\ &\quad (u(t) + R^{-1}(y(t))B'(y(t))P(y(t))x(t))\}dt \mid x_0, y_0]. \end{aligned}$$

P_i は方程式 (13) の解であるから

$$\begin{aligned} J(u : x_0, y_0) \quad = \quad & x_0'P(y_0)x_0 \\ &+\mathrm{E}[\int_{t_0}^{\infty}\{(u(t) + R^{-1}(y(t))B'(y(t))P(y(t))x(t))'R(y(t)) \\ &\quad (u(t) + R^{-1}(y(t))B'(y(t))P(y(t))x(t))\}dt \mid x_0, y_0]. \end{aligned}$$

従って，

$$u^*(t) = -R^{-1}(y(t))B'(y(t))P(y(t))x(t)$$

のとき，$J(u : x_0, y_0)$ が最小になり

$$J(u^* : x_0, y_0) = x_0'P(y_0)x_0$$

となる．

参考文献

[1] R. Datko(1970), *Extending a Theorem of A.M.Liapunov to Hilbert Space*, J. Math. Anal. Appl., vol.32, 610-616.

[2] A. Ichikawa(1982), *Stability and Optimal Control of Stochastic Evolution Equations*: Theory and Application, S.G. Tzafestas(Ed.) Pergamon Press, New York.

[3] Y. Ji and H.J. Chizeck(1990), *Controllability, Stabilizability, and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control*, IEEE Trans. Automat. Contr. vol.AC-35,777-788.

[4] E.B. Lee and L. Markus(1967), *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, New York.

[5] M. Mariton and P. Bertrand(1986), *Output Feedback for a Class of Linear Systems with Stochastic Jumping Parameters*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-31, 680-683.

[6] W.M. Wonham(1970), *Randam Differential Equations in Control Theory*: Probabilistic Methods in Applied Mathematics, vol.2, A.T. Bhancha-reid(Ed.), Academic Press, New York, 131-212.