数理解析研究所講究録
第 835 巻 1993 年 244-250

ファジィ線形計画における双対定理

九大 理　　古川 長太 (Nagata Furukawa)

1.　ファジィ・ベクトルの空間における内積

shape function L に基づくL－ファジィ数の全体からなる集合を F_L で表す.

<u>定 義 1. 1</u> $A=(m, \alpha)_L$, $B=(n, \beta)_L$ を F_L の任意の2元, λ を任意の実数とし, それらの間の演算を次のように定義する.

(1)　$A \oplus B = (m+n, \alpha+\beta)_L$,

(2)　$\lambda \cdot A = (\lambda m, \lambda \alpha)_L$.

<u>定 義 1. 2</u> F_L におけるノルムを次式で定義する. すなわち $A=(m, \alpha)_L$ に対し

$$\|A\| = |m| + |\alpha| .$$

<u>補 題 1. 1</u> 定義 1.1の演算の下で, F_L は線形ノルム空間をなす.

<u>定 義 1. 3</u> F_L の2元の積を次式で定義する.

$$(m, \alpha)_L \otimes (n, \beta)_L = (mn+\alpha\beta, m\beta+\alpha n)_L .$$

<u>補 題 1. 2</u> $A, B, C \in F_L$, $r \in R$ に対し次の式が成り立つ.

(1)　$A \otimes B = B \otimes A$,

(2)　$(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$,

(3)　$A \otimes (r, 0)_L = r \cdot A$,

(4)　$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$,

(5)　$A \otimes \theta = \theta$.

shape function Lを任意に与えた上で, F_L の元を成分とするp次元ベクトルの空間を F_L^p で表す. F_L^p のベクトル間の和とベクトルのスカラー倍は, R^p の場合と同様に定義する. F_L^p におけるゼロベクトルを Θ で表す. すなわち Θ は各成分が F_L の零元 θ であるようなp次ベクトルである.

<u>定 義 1. 4</u> F_L^p の各2元 A, B に対して F_L の元 (A, B)が定まり, 次の (I) ～ (IV) をみたすとき, (,) を F_L^p における内積と呼ぶ. ここで $\preceq$ は

Furukawaの定義によるL－ファジィ数間の半順序を表すものとする。

(Ⅰ)　$(A, A) \succeq \theta \quad \forall A \in F_L^p$　かつ

$(A, A)=\theta \Longleftrightarrow A=\Theta$,

(Ⅱ)　$(A, B) = (B, A)$,

(Ⅲ)　$(A+B, C) = (A, C)\oplus(B, C)$,

(Ⅳ)　$r\in R$ に対し，$(rA, B) = r(A, B)$.

$A=(A_1, A_2, \ldots, A_p)$, $B=(B_1, B_2, \ldots, B_p) \in F_L^p$ に対し

$$A\bullet B = \sum_{i=1}^{p} A_i \otimes B_i \tag{1.1}$$

で・を定義する．ここで Σ は定義 1.1によるL－ファジィ数間の和⊕を表す．

補題 1.3　Lの零点 x_0 が $x_0 \leqq 1$ をみたすとき，(1.1) で与えられた・は，内積の公理 (Ⅰ) ～ (Ⅳ) をみたす．

2.　ファジィ・ベクトルの空間における凸集合の分離定理

定義 2.1　$A, B \in F_L$ に対し

(1)　$A \prec B \underset{def}{\Longleftrightarrow} A\preceq B$ かつ $A\neq B$,

(2)　$A \backsim B \underset{def}{\Longleftrightarrow} A\npreceq B$ かつ $A\nsucceq B$.

ファジィ数Aに対して，Inf[A] と Sup[A] を次で定義する．

Inf[A] = inf (Support (A)) ,　Sup[A] = Sup (Support (A))

定義 2.2　$A, B \in F_L$ に対し，

(a)　Sup[A] = Sup[B] ,　(b)　Inf[A] = Inf[B] ,

(c)　Sup[A] = Inf[B] ,　(d)　Inf[A] = Sup[B] ,

のうちの少なくとも一つが成り立つとき，AとBは互いに隣接するという．

$A \prec B$ かつ AとBが互いに隣接するとき，これを記号で次のように表す．

$$A \underset{adj}{\prec} B$$

定　理　2. 1　ΩをF$_L^p$の空でない閉凸部分集合とし，F$_L^p$の点Yを　$Y \notin \Omega$　とする．このとき

$$P \cdot X_0 \succ P \cdot Y \tag{2.1}$$

をみたす　$X_0 \in \Omega$　および　$P \in F_L^p$　($P \neq \Theta$) が存在して，各$X \in \Omega$に対して次の (1)～(4) のうちの少なくとも一つが成立する．

(1)　$P \cdot X \succeq P \cdot X_0$　,

(2)　$P \cdot X \backsim P \cdot X_0$　,

(3)　$(P \cdot X - P \cdot X_0) \backsim \theta$　,

(4)　$P \cdot X \underset{adj}{\prec} P \cdot X_0$　.

系　2. 1　定理 2.1において　Ωを特にR^pの閉凸部分集合とすれば，R^pにおける通常の点と凸集合の強分離定理が導かれる．

3．　ファジィ・ベクトルの空間における二者択一の定理

はじめに若干の定義と準備をする．以後 shape function Lの零点　x_0 は　$x_0 < 1$ をみたすものとする．

$$B_L^+ \;\underset{\leftarrow}{\equiv}\; \{ (m, \alpha)_L \in F_L \;\mid\; m > 0 , |\alpha| \leqq m \}$$

$$\bar{B}_L^+ \;\underset{\leftarrow}{\equiv}\; B_L^+ \cup \{\theta\}$$

定　義　3. 1　$A = (m, \alpha)_L$　,　$B = (n, \beta)_L$　に対して

$$A \lll B \;\underset{def}{\Longleftrightarrow}\; \begin{cases} |\alpha - \beta| \leqq n - m & \text{if } \alpha\beta \geqq 0 \\ |\alpha + \beta| \leqq n - m & \text{if } \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

補　題　3. 1　　$A \lll B \;\Longrightarrow\; A \preceq B$

定　義　3. 2　$A = (m, \alpha)_L$　,　$B = (n, \beta)_L$　に対して

$$A \lll B \;\underset{def}{\Longleftrightarrow}\; \begin{cases} n > m \text{ かつ } |\alpha - \beta| \leqq n - m & \text{if } \alpha\beta \geqq 0 \\ n > m \text{ かつ } |\alpha + \beta| \leqq n - m & \text{if } \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

<u>定 義 3. 3</u> $A = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$, $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p) \in \mathbf{F}_L^p$ に対して

$$A \lesssim B \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A_i \lesssim B_i \quad \text{for } i=1,2,\ldots,p$$

$$A \ll B \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A_i \ll B_i \quad \text{for } i=1,2,\ldots,p$$

§2で与えたファジィ・ベクトルの空間における凸集合の分離定理により，次のような二者択一の定理が導かれる．

<u>定 理 3. 1</u>

$\mathbb{A}$: 与えられた $q \times p$ ファジィ行列で成分はすべてL－ファジィ数

B : 与えられた $p \times 1$ ファジィベクトルで成分はすべてL－ファジィ数

とする．このとき

(Ⅰ) $\mathbb{A}^t Y = B$, $Y \in (\bar{B}_L^+)^q$

に解Yがあるか

(Ⅱ) $\mathbb{A} X \in (\bar{B}_L^+)^p$

かつ次のいずれかが成立

(1) $B^t X \prec \theta$

(2) $B^t X \backsim \theta$

(3) $\theta \underset{\text{adj}}{\prec} B^t X$

に解 $X \neq \Theta$ がある

のいずれか一方が必ず成立し，(Ⅰ)，(Ⅱ) が共に成立することはない．

<u>定 理 3. 2</u>

$\mathbb{A}$, B は定理 3.1と同じとする． このとき

(Ⅲ) $\mathbb{A}^t Y - B \lesssim \theta$, $Y \in (\bar{B}_L^+)^q$

に解Yがあるか

(Ⅳ)　$\mathbb{A}X \in (\bar{B}_L^+)^q$,　$X \in (\bar{B}_L^+)^p$

かつ次のいずれかが成立

(1)　$B^t X \prec \theta$

(2)　$B^t X \backsim \theta$

(3)　$\theta \underset{adj}{\prec} B^t X$

に解　$X \neq \theta$　がある

のいずれか一方が必ず成立し，(Ⅲ)，(Ⅳ) が共に成立するのはそれぞれの解Y，Xが

$$Y^t \mathbb{A}X = \theta \tag{3.1}$$

をみたすときに限る.

定理 3.2は完全な二者択一とは言えないが，(3.1) で表されるファジィ行列$\mathbb{A}$を介した直交条件を除外すればという意味で，殆ど二者択一であると言える.

4.　ファジィ線形計画における双対定理

ファジィ線形計画の双対定理にはいろいろな型のものが考えられるが，ここでは最も簡単な型のものだけを与えておく.

$\mathbb{A}$　:　与えられた $p \times q$ ファジィ行列で成分はすべてL－ファジィ数

b　:　与えられた $p \times 1$ 実ベクトル

c　:　与えられた $q \times 1$ 実ベクトル

X　:　$q \times 1$ L－ファジィ変数ベクトル

Y　:　$p \times 1$ L－ファジィ変数ベクトル

として，次の２つの最適化問題を考える.

$(\mathcal{P})$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max} \quad c^t X \\ \quad \text{subject to} \\ \quad \mathbb{A}X - b \lessapprox \theta, \\ \quad X \in (\bar{B}_L^+)^q \end{array}}$$

$(\mathcal{D})$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min} \quad b^t Y \\ \quad \text{subject to} \\ \quad \mathbb{A}^t Y - c \gtrapprox \theta, \\ \quad Y \in (\bar{B}_L^+)^p \end{array}}$$

上の２つの問題において，最大化と最小化はそれぞれ Furukawa の定義によるファジィ数間の半順序に関する最大化と最小化を意味する．

ここで２つの集合を定義する．

$$\Gamma \fallingdotseq \{X \in F_L^q \quad | \quad \mathbb{A}X - b \ll \theta,\ X \in (\bar{B}_L^+)^q \}$$

$$\Delta \fallingdotseq \{Y \in F_L^p \quad | \quad \mathbb{A}^t Y - c \gg \theta,\ Y \in (\bar{B}_L^+)^p \}$$

<u>定　理　4．1</u>

$\Gamma \neq \phi$ かつ　$\Delta \neq \phi$ ならば $(\mathcal{P})$，$(\mathcal{D})$にそれぞれ最大解，最小解X_0，Y_0　が存在して，

$$c^t X_0 = b^t Y_0$$

が成立する．

あとがき：

完全な形の二者択一の定理は，ファジィ線形不等式の場合は一般には成立しないようである．しかし定理 3.2のような殆ど二者択一の定理であれば，この定理の他に色々なタイプの定理を導くことが出来る．

双対定理に関しては，定理 4.1は強すぎる仮定の下で最もシンプルな結果を導いたもので，試作品の域を出ない．検討，解決すべき問題が山積していることを付記しておく．