数理解析研究所講究録
第 837 巻 1993 年 1-13



# 楕円関数論から生ずるある種の級数の $\zeta(3)$ への漸近式

新潟大・教養 秋山茂樹 (Shigeki Akiyama)

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ を $0$ でない整数列とする。$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ で. $a_1, \cdots, a_n$ の最小公倍数とする。これを評価する事は $a_1, \cdots, a_n$ にどれ程の素因子が存在するかという問題であるから歴史的価値を持っている。例えば $a_n = n$ とすれば チェビシェフの $\psi$ 関数は

$$\psi(n) = \sum_{p^e \le n} \log p = \log [1, 2, \cdots, n]$$

であるから.
素数定理と同等な命題 $\psi(n) \sim n$ は $[1, 2, \cdots n]$ の評価がほぼ $e^n$ であるという事を意味している。しかしながら. この $[a_1, \cdots, a_n]$ の評価という問題は. 非常に特殊な数列に関してしか考えられていないようである。$a_n = An + B$ については Alladi - Robinson [4] の最初の補題で.

$$\log [a_1, \cdots a_n] \sim \sum_{\substack{j=1 \\ (j, A)=1}}^{A} \frac{1}{j} \frac{A}{\phi(A)} \cdot n$$

が証明されている。また $a_n = F_n$ (Fibonacci 数列) すなわち $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = F_2 = 1$ の場合には. Matiyasevich

とGuy [7] が

$$\left(\log |F_1 \cdots F_n|\right) / \left(\log [F_1, \cdots F_n]\right) \to \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

を示した。

この漸近式は、分子は容易にevaluateできるので本質的には、分母に関しての式と見做せる。$F_n$ に真に新しい素因子がどれ程表われるかを定性的に表現しているので興味が湧く。

P. Kiss と F. Matyas [5] は、これを次のように一般化した。

$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2} \quad (A, B \in \mathbb{Z})$$

$a_0 = 0,\ a_1 = 1$ として $x^2 - Ax - B = (x-\alpha)(x-\beta)$ で $|\alpha| \geq |\beta|$ の時 $\alpha/\beta$ が1の巾根でないとする。この時 $(A, B) = 1$ ならば

$$\left(\log |a_1 a_2 \cdots a_n|\right) / \left(\log [a_1, \cdots, a_n]\right) = \zeta(2) + O\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

が成立する。

(条件により $a_n \neq 0$ $(n \geq 1)$ は明らか) 筆者はこれを [1] に於いて $(A, B) = 1$ を外し $a_1 = 1$ を $a_1 \neq 0$ という条件に置換して

$$\left(\log |a_1 \cdots a_n|\right) / \left(\log [a_1, \cdots, a_n]\right) = \frac{\zeta(2)}{1-K} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

$$K = \log |(A^2, B)| / 2\log|\alpha|$$

と一般化した。しかしながらその証明は (P. Kiss による) mysterious な技巧を用いるものであった。

この証明の後味の悪さを除きたかったので $a_n$ がどのような公理を満たせばよいかを [2] で研究した。本稿は [2] の改良版として恐らく最も良い形での結果を得る事ができたのでまずそれについて述べる。

**定理1**

0でない整数列 $(a_n)$ について次の3つの条件は同値

① 全ての $m, n$ に対して $(a_n, a_m) = |a_{(n,m)}|$

② 自然数の集合からそれ自身への写像 $\rho$ が存在して

$$a_n \equiv 0 \pmod{M} \iff n \equiv 0 \pmod{\rho(M)}$$

③ $M(i) = \prod_{d|i} a_{i/d}^{\mu(d)}$ と置くと

$$[a_1, a_2, \ldots\ a_n] = \prod_{i \le n} |M(i)|$$

ここで $\mu(\cdot)$ は Möbius 関数。これらを満す時 $(a_n)$ は強可除であるという。

ここで①と②の同値性は Ward [11] に既に述べられているし、証明も易しい。①⇒③を示そう。$n=1$ では正しいので $n-1$ まで成立を仮定する。

$$[a_1, \ldots, a_n] / [a_1, \ldots, a_{n-1}] = \underset{i=1,\ldots,n-1}{G.C.D.} \left( \frac{a_n}{(a_n, a_i)} \right)$$

$$= |a_n| \div \underset{i=1,\ldots n-1}{L.C.M}\ a_{(n,i)} = |a_n| \div \underset{d|n}{L.C.M}\ a_{n/d}$$

ここで①より $n|m \Rightarrow a_n|a_m$ なので（この事を可除性という）

$$\underset{d|n}{\mathrm{L.C.M}}\ a_{n/d} = \underset{p|n}{\mathrm{L.C.M}}\ a_{n/p} \quad (p\text{は素数})$$

としてもよい。ここで一般包除原理より

$[a_1, \dots a_n]/[a_1, \dots a_{n-1}]$

$$(\text{☆})\cdots = |a_n| \frac{\prod_{p_1,p_2} (a_{n/p_1}, a_{n/p_2}) \prod_{p_1,p_2,p_3,p_4} (a_{n/p_1}, a_{n/p_2}, a_{n/p_3}, a_{n/p_4}) \cdots}{\prod_{p} |a_{n/p}| \prod_{p_1,p_2,p_3} (a_{n/p_1}, a_{n/p_2}, a_{n/p_3}) \cdots}$$

$$= |a_n| \frac{\prod_{p_1,p_2} |a_{n/p_1p_2}| \prod_{p_1,p_2,p_3,p_4} |a_{n/p_1p_2p_3p_4}| \cdots}{\prod_{p} |a_{n/p}| \prod_{p_1,p_2,p_3} |a_{n/p_1p_2p_3}| \cdots}$$

$$= |M(n)|$$

よって証明終。（☆）は $(a,b)[a,b]=ab$ の拡張であって素因子の重複度をみれば容易に証明できる。

③ ⇒ ① は難しくはないが略する。（[3] を見よ）　▨

定理1がわかると次の定理2，定理3は自然に導かれる。詳しい証明は [2]，[3] を見よ。

<u>定理2</u>

0でない整数列 $(a_n)$ が強可除であり，自然数 $l$ に対して

$$\log |a_n| = An^l + O(n^{l-1} w(n))$$

が成立しているとする。ここで

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } l > 1 \\ \log n & \text{for } l = 1 \end{cases}$$ とする。すると、

$$\left(\log|a_1 \cdot a_2 \cdots a_n|\right) \Big/ \log[a_1, \cdots a_n] = \zeta(l+1) + O\left(\frac{w(n)}{n}\right)$$

<u>定理3</u>

0でない整数列$(a_n)$が強可除で、自然数$l$に対し

$$\frac{1}{n}\log|a_1 \cdots a_n| = An^l + O(n^{l-1})$$

が成立すれば、定理2と同じ主張が成立する。

定理3は$l > 1$の時定理2の自然な拡張となっており、$\log|a_n|$そのものでなく、その<u>平均的な漸近挙動によって</u>このような事が生ずる事を主張している。以上、定理1〜3により$[a_1, \cdots a_n]$の評価の問題は、強可除で漸近挙動が分かる数列に対しては満足すべき結論を得た事になる。

<u>例1.</u> $a_n = n^l$は明らかに強可除であり、一般に$a_n$が多項式で与えられるとすれば、強可除となるのは定数倍を除いてこの場合のみとなる。この場合$[a_1, \cdots a_n]$の評価は、素数定理と同等な事柄である事は初めに述べた通りである。

<u>例2</u> P. Kiss, F. Mátyás の結果は定理1〜3に含まれる。実際、$a_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$と書けるので可除性は明らかで、$(n, m) = r = np - mq$なる整数$p, q$に対して

$$(\alpha^{mq} + \beta^{mq})\,a_{np} - (\alpha^{np} + \beta^{np})\,a_{mq} = 2\alpha^{mp}\beta^{mp}\,a_r$$

に注意し，$(\alpha\beta, a_n)=1$ と偶奇性をよく見ればこの式は

$$(a_n,\ a_m)\ |\ a_r$$

を意味している。逆に $a_r | a_n$，$a_r | a_m$ は可除性より出るので $a_n$ は強可除となる。漸近挙動については，

$$\log|a_n| = n\log|\alpha| + \log\left|\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)\right| + O(1)$$
$$= n\log|\alpha| + O(\log n)$$

が，Baker による代数的数の log 和の評価から出るので定理2の条件を満たす。従って

$$(\log|a_1 \cdots a_n|)/(\log[a_1, \ldots a_n]) = \zeta(2) + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

が得られた。

注意しておきたいのは，誤差項が Kiss - Mátyás のものよりもかなり改善されている事であり，その理由は定理1が等式である事による。Kiss の方法では，ここはかなりな誤差項をもつ漸近式であった。これで霧が晴れたわけである。尚，平均的挙動を調べると誤差項は $O(E(n)/n^2)$ まで落せる。ここで $E(n)=\sum_{i\le n}\varphi(i) - \frac{3}{\pi^2}n^2$ である。（[6], [8] を見よ）

以上で当初の問題意識は解決したが，次の問題として，強可除な数列で漸近挙動のわかるものは他にどのようなものがあるのか？という疑問が生ずる。強可除という性質はかなり制限がきついものであるが，素因子に着目するならば，例はい

くらでもabstractには作る事ができる。しかし意味のあるものはもっと他にないだろうか？

命題1　$(a_n)$, $(b_n)$ が強可除のとき $((a_n, b_n))$ も強可除である。また $b_n$ が正である時は $(a_{b_n})$ も強可除である。

この命題により例えば $(a_n)$ が定理2の条件を満たしていれば $(a_{n^\ell})$ もまた定理2の条件を満たす。Kiss－Mátyás の例の場合.

$$(\log|a_{1^\ell}\cdots a_{n^\ell}|)/(\log[a_{1^\ell},\cdots,a_{n^\ell}]) = \zeta(\ell+1) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

が $\ell > 1$ では成立している。

しかしこのようにして作られる数列は言わば Lucas－Fibonacci type の数列をひねっただけであるので真に新しい数列という感じがしない。そこで楕円関数が登場する。

$\mathcal{L} = 2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_3\mathbb{Z}$ を $\mathbb{C}$ 内の lattice で $\tau = \omega_3/\omega_1$ が複素上半平面 $H$ に入るように $\omega_i$ を決める。Weierstraß の sigma 関数 $\sigma(u) = \sigma(u;\mathcal{L})$ は

$$\sigma(u) = u\prod_{w\in\mathcal{L}'}(1-u/w)\exp\left(\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}\right)$$

で定義される。ここで $\mathcal{L}' = \mathcal{L}\setminus\{0\}$ である。

さて $\sigma(u)$ 自体は楕円関数でなく、次の2つを満たす。

$$\sigma(u+2\omega_i) = -\sigma(u)\exp(2\eta_i(u+\omega_i)) \qquad i=1,3$$

ここで $\eta_1, \eta_3$ は Legendre の関係式 $\eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \frac{\pi i}{2}$ を満たす複素数である。さて $\psi_n(u) = \sigma(nu)/\sigma(u)^{n^2}$ と置くとこれは楕円関数となり次の関係式を満たす事は良く知られている。

$$\psi_{m+n}(u)\psi_{m-n}(u) = \psi_{m+1}(u)\psi_{m-1}(u)\psi_n(u) - \psi_{n+1}(u)\psi_{n-1}(u)\psi_m(u)$$

for $m \geq n \geq 1$. 当然 $\psi_0(u) = 0$, $\psi_1(u) = 1$ となる。この式を漸化式と見做してやると適当な条件の下では整数列であって強可除性をもつ事が Ward [9], [10] により示されている。以下少し Ward の結果を引用する。

(!) $h_{m+n}h_{m-n} = h_{m+1}h_{m-1}h_n^2 - h_{n+1}h_{n-1}h_m^2$,

$h_0 = 0$, $h_1 = 1$ なる関係式をとりあえず abstract に考える。すると

① $h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{Z}$ で $h_2h_3 \neq 0$, $h_2 \mid h_4$ を満たす時 $\{h_n\}$ は well defined で $h_n \in \mathbb{Z}$ となり、更に可除性をもつ。
(ここで well defined というのは、関係(!)が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $h_n$ の値を一意的に決めるという事である。楕円関数に parametrize される場合にはこの事は明白であるが一般には非自明である。)

② $(h_3, h_4) = 1$ が ① の条件に加えて成立しているならば $(h_n)$ は強可除である。

③ ①の条件に加えて $h_2h_3h_4h_5 \neq 0$ の時 全ての $n$ に対して $h_n \neq 0$

いつ楕円関数として parametrize されるかについては次でわかる。

$$h_2^8 h_3^3 \Delta = -h_2^{15} h_4 + h_2^{12} h_3^3 - 3h_2^{10} h_4^2 + 20 h_2^7 h_3^3 h_4 - 3 h_2^5 h_4^3 - 16 h_2^4 h_3^6 - 8 h_2^2 h_3^3 h_4^2 - h_4^4$$

で$\Delta$を定めるとき、$\Delta \neq 0$ ならば $\exists u \in \mathbb{C}$ $\exists L$ があって $h_n$ は $h_n = \psi_n(u) = \psi_n(u; L)$ と書ける。従って $h_2 h_3 \neq 0$, $\Delta \neq 0$ の時には $h_n = \psi_n(u)$ と書いてよい。$h_2 h_3 \neq 0$、$\Delta = 0$ の時はどうなるのか興味が生ずるが実際には、自然数列か Lucas-Fibonacci type の数列と本質的に同じになる。従って我々の興味の対象は、$\Delta \neq 0$ の場合で①〜③を満たす $(h_n)$ に対してその漸近挙動がどうなるのかに限局された。この漸近挙動を扱うまえに、なぜ $(h_n)$ が可除、強可除な数列を生みだすのかについて informal な議論をしておく。なぜ Lucas-Fibonacci 型の数列が可除となったかを考えよう。$a_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$ がその一般項ゆえ $n|m$ のとき $\alpha^n - \beta^n$ は $\alpha^m - \beta^m$ を"整式として"割り切る。実はこの点が可除性の本質で、これは $f_n(z) = 1 - z^n$ という複素関数について $n|m$ の時 $f_n | f_m$ (商が entire) という事から生じている。では我々の $\psi_n(u)$ はどうなっているだろう？ $f_n(z) = 0$ の零点は単位円周の等分点であり、$\sigma(nu) = 0$ となるのは lattice point の $n$ 等分点 $\frac{2\omega_1}{n}\mathbb{Z} + \frac{2\omega_3}{n}\mathbb{Z}$ である。$\sigma(u)^{n^2}$ は無視すればいわば $\sigma(nu)$ は $f_n$ の2次元版となっている。ここで $\alpha^n - \beta^n = (1 - (\frac{\beta}{\alpha})^n)\alpha^n = f_n(\frac{\beta}{\alpha})\alpha^n$ として $\alpha^n$ を無視したように $\sigma(u)^{n^2}$ は無視してもよい。つまり楕円関数にするためにのみ $\sigma(u)^{n^2}$ は分

目にあると考える。従って $\sigma(nu)$ から作った $\psi_n(u)$ は非常に自然な Lucas - Fibonacci 型数列の拡張であると思える。

では漸近挙動の方に戻る。少々天下りであるが

$$A(u) = \pi \frac{Im^2(v)}{Im(\tau)} - \log|\vartheta_1(v)| + \log|\vartheta_1'^0| - \log|2w_1|$$

と置く。ここで $\vartheta_1$ は第1種楕円 theta 関数

$$\vartheta_1(v) = \sqrt{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{2n-1} \qquad z = \exp(\pi i v)$$

であり、$v = u/2w_1$ で、$\vartheta_1'^0$ は $\vartheta_1$ を微分したものの zero 値である。するとの事は容易にわかる。（詳しくは[3]）

補題1

$A(u)$ は $u \bmod \mathcal{L}$ で定まり、$\log|\psi_n(u)| = A(u)n^2 - A(nu)$

従ってもしも $A(nu) \overset{?}{=} O(n)$ が示せれば主要項がわかり、更に $A(u) \neq 0$ ならば定理2より終了であるが、実際にはこの2点は共に難しい問題であった。補題1と theta 関数の無限積表示を用いると次がわかる。

補題2　全ての $n$ に対して $nu \notin \mathcal{L}$ の時 $A(nu)$ は $n$ の関数として下に有界で

$$A(nu) = -\min_{m\in\mathbb{Z}} \log\left|1 - \exp\left(2\pi i(m\tau + nv)\right)\right| + O(n)$$

この補題からは $A(nu) = O(n)$ が "急減少な例外を除いて" 成立している事が示せる。すなわち次がわかる。

補題3　十分大きな定数 $L$ に対し 集合 $C=\{n\in\mathbb{N} \mid A(nu)>Ln\}$ を考える。もしも $\#C=\infty$ ならば $C$ の元を $n_1<n_2<\cdots$ と大小の順に番号をつけておく。この時 次のような正数 $T$ と数列 $\nu_1<\nu_2<\cdots$ $(\nu_i\in\mathbb{N})$ が存在する。

1) $\nu_{k+1}>\exp(T\nu_k)$

2) $\nu_{k+1}>n_i\geqq\nu_k$ の時 $n_i$ は $\nu_k$ の倍数であり

$\xi(n)=-\mathrm{Min}\log|1-\exp(2\pi i(m\tau+nv))|$ と置くと $\xi(n_i)\leqq\xi(\nu_k)$

勿論 $\#C<\infty$ ならば $A(nu)=O(n)$ より、$\#C=\infty$ としても一般性を失なわない。さてこのような状況下では、次がわかる。

命題2

$(h_n)$ は (!) を満たし $h_2|h_4$, $h_2h_3h_4h_5\neq 0$, $\Delta\neq 0$ の時

$$\frac{1}{n}\log|h_1\cdots h_n|=An^2+O(n)$$

となる $A\geqq 0$ が存在する。

証明には補題2, 3を用いる。$A\geqq 0$ となるのは $h_n\neq 0$ という事からでる。さて最後に $A>0$ の証明が残された。これは

$$\psi_{nr}(u)=\psi_n(u)^{n^2}\psi_n(ru)$$

という簡単な関係式が Key となる。

補題4

任意の $u\in\mathbb{C}$ に対して、次の事が成立する。

任意の $\varepsilon > 0$ について $r \in \mathbb{N}$, $w \in \mathcal{L}$ なる組 $(r, w)$ が無限にあって

$$|u - ru - w| < \varepsilon$$

すなわち、$u$ と $ru$ は $\bmod \mathcal{L}$ で十分に近くにできる。

この証明には Kronecker の同時近似定理が本質的に使われる。これを用いて $h_n \neq 0$ に注意しながら議論すると

$$\overline{\lim}\, \log|\psi_{nr}(u)|/n^2 > 0 \quad \text{従って} \quad A = A(u) > 0$$

が細かい議論の末に示せる。従って最終的に次が得られた。

<u>定理4</u>

$(h_n)$ は $h_2 | h_4$　$h_2 h_3 h_4 h_5 \neq 0$, $\Delta \neq 0$ を満たす整数列で $(!)$ を満たすものとする。もしも更に $(h_3, h_4) = 1$ ならば

$$(\log|h_1 h_2 \cdots h_n|) \Big/ (\log[h_1, \cdots, h_n]) = \zeta(3) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

実際 定理3の条件を全て満たしているので明らかである。結局、漸近挙動については平均的なものしか今のところわからないが、恐らく $A(nu) = O(n)$ は全ての場合に成立しているものと予想できる。

この定理4を導く議論の副産物として $h_2 h_3 \neq 0$ $\Delta \neq 0$ であるが $h_4 h_5 = 0$ の場合には $A = A(u) = 0$ でなければならない。そのような例として

$$(h_2, h_3, h_4) = (1, 1, 0), (1, 1, 1)$$

が上げられる。$A(u)$ は

$$A(u) = re\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) + \pi\frac{Im^2(v)}{Im(\tau)} - \log|\sigma(u)|$$

という別の表現をすれば $A(u)=0$ は $\sigma(u)$ の non trivial な関係式を意味しているように見える。これも少し興味のある問題を生じさせていると筆者は考える。

## References


[1] S. Akiyama, Lehmer numbers and asymptotic formula for $\pi$, J. Number Theory **36** (1990), 328-331.

[2] S. Akiyama, A new type of inclusion exclusion principle for sequences and asymptotic formula for $\zeta(n)$, to appear in J. Number Theory

[3] S. Akiyama, A criterion to estimate the least common multiple of sequences and curious asymptotic formulas for $\zeta(3)$ arising from recursive relation of an elliptic function, preprint

[4] K. Alladi and M.L. Robinson, Legendre polynomials and irrationality, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 137-155.

[5] P. Kiss and F. Mátyás, An asymptotic formula for $\pi$, J. Number Theory **31** (1989), 255-259.

[6] P. Kiss and B. Tropak, Average order of logarithms of terms in binary recurrences, Discussion Math. **10** (1990) 29-39.

[7] Y.V. Matiyasevich and R.K. Guy, A new formula for $\pi$, Amer. Math, Monthly **93** (1986), 631-635.

[8] B. Tropak, Some asymptotic properties of Lucas numbers, Algebra and number theory, Pedagogical Univ. (1990) 49-55, ed. A Grytczuk.

[9] M. Ward, Memoir on elliptic divisibility sequence, Amer. J. Math. **70** (1948), 31-74.

[10] M. Ward, The law of repitition of primes in an elliptic divisibility sequence, Duke Math. J. **15** (1948), 941-946.

[11] M. Ward, The mapping of the positive integers into themselves which preserve division, Pacific J. Math. **5** (1955), 1013-1023.