数理解析研究所講究録
第837巻1993年142-149

On a classification of transcendental numbers by Sprindžuk

群馬大学教養部　天羽雅昭(Masaaki Amou)

Sprindžukは[11]に於て([12],[13]をも参照)、Mahlerによるものとは異なる、複素数の分類を定義した。この分類によって、複素数全体は4つのクラスに分けられ、それぞれ $\tilde{A}$, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{U}$ と名付けられた。これについて、$\tilde{A}=\overline{\mathbb{Q}}$, $\tilde{S}\neq\phi$ 及び $\tilde{U}\neq\phi$ は容易に分かるが、$\tilde{T}\neq\phi$ かどうかは不明であった。本稿では、$\tilde{T}\neq\phi$ であることをその特別な場合として含む、一般的な存在定理を述べる。

先ず、Sprindžukの分類の定義から始めよう。但し、代数的数は初めから除外し、超越数の分類として説明する。$\omega\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{Q}}$ とし

$$w_d(\omega,h) := \min\{|P(\omega)| ; 0\neq P(x)\in\mathbb{Z}[x], \deg P\leqq d, H(P)\leqq h\}$$

とおく。ここに、$H(P)$ は P の高さ(height)、即ち P の係数の絶対値の最大値を表す。これに対して

$$v(\omega,h) := \limsup_{d\to\infty}\frac{\log\log(1/w_d(\omega,h))}{\log d}, \quad v(\omega) := \sup_{h\in\mathbb{N}} v(\omega,h)$$

とおく。$v(\omega)$ を ω の order と呼ぶ。また

$$H_0(\omega) := \inf\{ h \in \mathbb{N} \ ; \ v(\omega, h) = \infty \}$$

とおく。このとき，Sprindžukの分類は次のように定義される:

$$\omega \in \widetilde{S} \iff 1 \leqq v(\omega) < \infty \ ;$$

$$\omega \in \widetilde{T} \iff v(\omega) = \infty \ , \ H_0(\omega) = \infty \ ;$$

$$\omega \in \widetilde{U} \iff v(\omega) = \infty , \ H_0(\omega) < \infty \ .$$

$\widetilde{S}$の定義で $1 \leqq v(\omega)$ となっているが、$\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ ならば $1 \leqq v(\omega)$ となるのでこれでよい。Sprindžuk [11] は、2次元（1次元）ルベグ測度の意味で、ほとんど全ての複素数（実数）はorderが2以下の$\widetilde{S}$-数（$\widetilde{S}$に属する数を$\widetilde{S}$-数と呼ぶ。他のクラスの数についても同様。）であることを示した。これに関して、Chudnovskyは[4]で、上記の上界2を1で置き換え得ることを示し、測度論的に最良の結果を得た。具体的な数については、Fel'dman [5] の結果より $v(\pi) \leqq 2$, $v(\log\alpha) \leqq 3$ $(\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}, \alpha \neq 0, 1)$ であり、Chudnovsky [4] の結果より $v(e^{\alpha}) \leqq 2$ $(\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}, \alpha \neq 0)$, $v(e^{\alpha\pi}) = 1$ $(\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \sqrt{-1}\,\mathbb{Q})$ であることなどが知られている。最後の例は、order 1 の$\widetilde{S}$-数の1系列を与えて興味深いが、もう1つ例を挙げれば、$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{r^k}$ $(r \in \mathbb{N}, r \geqq 2)$ の0以外の代数点も全てorder 1の$\widetilde{S}$-数である（[1]を参照）。

では、主結果（定理1，2）の定式化に入ろう。$\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ が与えられると、それに対して $h_0 = h_0(\omega) \in \mathbb{N}$ があって、

$h < h_0$ のとき $v(w,h) = 0$，$h \geqq h_0$ のとき $1 \leqq v(w,h) \leqq v(w,h+1) \leqq \infty$ が成り立つことが容易にわかる。この事実に照らして、$h_0 \in \mathbb{N}$ を任意に与え、数列 $\mathfrak{v} = \{v_h\}_{h \in \mathbb{N}}$（$\infty$ を含んでもよい）として

(1)　$h < h_0$ のとき $v_h = 0$，$h \geqq h_0$ のとき $1 \leqq v_h \leqq v_{h+1} \leqq \infty$

を満たすものを任意に取り、このような $\mathfrak{v}$ に対して

$$\mathcal{R}(\mathfrak{v}) := \{\omega\ ;\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ v(\omega,h) = v_h\ (h = 1,2,\cdots)\},$$

$$\mathcal{I}(\mathfrak{v}) := \{\sqrt{-1}\,\omega\ ;\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ v(\sqrt{-1}\,\omega,h) = v_h\ (h = 1,2,\cdots)\}$$

とおく。$\mathfrak{v}$ に対して、実数 $m_{\mathfrak{v}}$，$M_{\mathfrak{v}}$（$m'_{\mathfrak{v}}$，$M'_{\mathfrak{v}}$）を次のように定義する。$h_0 > 1$ ならば，$m_{\mathfrak{v}} = h_0$，$M_{\mathfrak{v}} = h_0 + 1$（$m'_{\mathfrak{v}} = \sqrt{h_0}$，$M'_{\mathfrak{v}} = \sqrt{h_0 + 1}$）。$h_1 > 1$ なる $h_1 \in \mathbb{N}$ で、$h < h_1$ に対しては $v_h = 1$ となり、かつ $v_{h_1} > 1$ となるものがあるならば、$m_{\mathfrak{v}} = 1/(h_1+1)$、$M_{\mathfrak{v}} = 2$（$m'_{\mathfrak{v}} = 1/\sqrt{h_1+1}$，$M'_{\mathfrak{v}} = \sqrt{2}$）。最後に、全ての $h \in \mathbb{N}$ に対して $v_h = 1$ ならば、$m_{\mathfrak{v}} = 0$，$M_{\mathfrak{v}} = 2$（$m'_{\mathfrak{v}} = 0$，$M'_{\mathfrak{v}} = \sqrt{2}$）。

また、$0 \leqq a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$E(a,b) := \{x\ ;\ x \in \mathbb{R},\ a < |x| < b\},$$

$$E'(a,b) := \{\sqrt{-1}\,x\ ;\ x \in \mathbb{R},\ a < |x| < b\}$$

とおく。以上のもとで：

定理 1.　(1) を満たす任意の $\mathfrak{v} = \{v_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ に対して：

(i)　$\mathcal{R}(\mathfrak{v})$ は $E(m_{\mathfrak{v}}, M_{\mathfrak{v}})$ の稠密な部分集合；

(ii)　$\mathcal{I}(\mathfrak{v})$ は $E'(m'_{\mathfrak{v}}, M'_{\mathfrak{v}})$ の稠密な部分集合。

この定理は、次の(a)-(c)の全てに肯定的に答える：(a) 任意に与えられた $v \geqq 1$ を order に持つ $\tilde{S}$-数の存在；(b) $\tilde{T}$-数の存在；(c) 任意に与えられた $h_0 \in \mathbb{N}$ に対して、$H_0(\omega) = h_0$ を満たす $\tilde{U}$-数 ω の存在。

さて、$w_d(\omega, h)$ は多項式が ω で取る値の絶対値を用いて定義されたが、次に ω と代数数との距離を用いて別の関数 $\tilde{w}_d(\omega, h)$ を

$$\tilde{w}_d(\omega, h) := \min\{|\omega - \alpha| ; \alpha \in \overline{\mathbb{Q}},\ \deg\alpha \leqq d,\ H(\alpha) = h\}$$

で定義する。ここに、$H(\alpha)$ は α の高さ、即ち α の $\mathbb{Z}$ 上の定義多項式（既約かつ原始的なもの）の高さを表す。このとき，$v(\omega, h)$ に対応して

$$\tilde{v}(\omega, h) := \limsup_{d \to \infty} \frac{\log\log(1/\tilde{w}_d(\omega, h))}{\log d}$$

とおく。$\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ が与えられると、それに対して $h_0 = h_0(\omega) \in \mathbb{N}$ があって、$h < h_0$ のとき $\tilde{v}(\omega, h) = 0$，$h \geqq h_0$ のとき $1 \leqq \tilde{v}(\omega, h) \leqq \infty$ が成り立つことに注意して、逆に、$h_0 \in \mathbb{N}$ を任意に与え、数列 $\mathbb{v} = \{v_h\}_{h \in \mathbb{N}}$（$\infty$ を含んでもよい）として

(2)　$h < h_0$ のとき $v_h = 0$，$h \geqq h_0$ のとき $1 \leqq v_h \leqq \infty$

を満たすものを任意に取り、このような $\mathbb{v}$ に対して

$$\tilde{\mathcal{R}}(\mathbb{v}) := \{\omega ;\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}},\ \tilde{v}(\omega, h) = v_h\ (h = 1, 2, \cdots)\},$$

$$\tilde{\mathcal{I}}(\mathbb{v}) := \{\sqrt{-1}\,\omega ;\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}},\ \tilde{v}(\sqrt{-1}\,\omega, h) = v_h\ (h = 1, 2, \cdots)\}$$

とおく。このとき，次が成り立つ。

定理 2. (2) を満たす任意の $\mathfrak{v} = \{v_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ に対して：

(i) $\widetilde{\mathcal{R}}(\mathfrak{v})$ は $E(1/(h+1), h+1) \setminus E(1/h, h)$ の稠密な部分集合；

(ii) $\widetilde{\mathcal{J}}(\mathfrak{v})$ は $E'(1/\sqrt{h+1}, \sqrt{h+1}) \setminus E'(1/\sqrt{h}, \sqrt{h})$ の稠密な部分集合。

上記2つの定理で、包含性の証明は容易である。稠密性の証明は、次に述べる命題1を用いて、Schmidt [9] による Mahler の T－数の構成法に類似の方法で行われる。

命題 1. (i) $\xi \in E(1/(h+1), h+1)$, $\xi \neq 1$ とせよ。このとき、次の性質を満たす無限個の $d \in \mathbb{N}$ が存在する：次数が d で高さが h の少くとも $(2h)^{d/10}$ 個の実代数的数 α があって，それらは全て

$$|\xi - \alpha| < \exp(-c(\xi)d)$$

を満たす。ここに，$c(\xi)$ は ξ のみによる正定数である；

(ii) $\sqrt{-1}\,\xi \in E'(1/\sqrt{h+1}, \sqrt{h+1})$, $1 \neq \xi \in \mathbb{R}$ とせよ。このとき、次の性質を満たす無限個の $d \in \mathbb{N}$ が存在する：次数が d で高さが h の少くとも $(2h)^{d/20}$ 個の純虚代数的数 α があって，それらは全て

$$|\sqrt{-1}\,\xi - \alpha| < \exp(-c(\xi)d)$$

を満たす。ここに、$c(\xi)$ は ξ のみによる正定数である。

よく知られているように（例えば、[10] 参照）、$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha \neq 0$ の高さが h のとき、$1/(h+1) < |\alpha| < h+1$, が成り立つ。また、$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ の高さが h のとき、上記

の不等式を $1/\sqrt{h+1} < |\alpha| < \sqrt{h+1}$ と改良できることも容易に示せる。従って、高さが h の代数的数全体を $\widetilde{\mathfrak{A}}(h)$ とかくと、命題1の系として次が得られる。

系. (i) $\widetilde{\mathfrak{A}}(h) \cap \mathbb{R}$ は $E(1/(h+1), h+1)$ の稠密な部分集合;

(ii) $\widetilde{\mathfrak{A}}(h) \cap \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$ は $E'(1/\sqrt{h+1}, \sqrt{h+1})$ の稠密な部分集合。

命題1の証明には、次の命題2を用いる。

命題2. $h \in \mathbb{N}$ とし、$f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[X]$ を高さが h 以下の互いに素な多項式とする。もし, $g(x)$ の次数が十分大きいならば、既約で原始的な $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ で、$P \equiv f \pmod{g}$, $\deg P < 5 \deg g$ かつ $H(P) = h$ を満たすものが存在する。

これは、Kornblum [8] によって証明された Dirichlet の算術級数定理の多項式アナログをエフェクティブにしたもので、最近の石橋 [7] の結果の1つの系である。但し、関数体上の"円分体論"(Carlitz [3], Hayes [6] を参照)も必要である。

謝辞: 石橋誠氏には文献 [7] を送って頂き、小松啓一氏には文献 [6] の存在ともども関数体上の円分体論について教えて頂きました。また、証明のチェック等全般に亘って、若林功氏には大変お世話になりました。ここに感謝の意を表します。

REFERENCES

[1] M. Amou, Algebraic independence of the values of certain functions at a transcendental number, Acta Arith. 59 (1991) 71-82.

[2] M. Amou, On a classification of transcendental numbers by Sprindzuk, in preparation.

[3] L. Carlitz, A class of polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 167-182.

[4] G.V. Chudnovsky, Contributions to the theory of transcendental numbers, A. M. S., Mathematical surveys and monographs, no. 19, Providence, R. I., 1984.

[5] N.I. Fel'dman, The approximation of some transcendental numbers I, Izv. Akad. Nauk SSSR 15 (1951), 53-74; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. 59 (1966), 224-245.

[6] D.R. Hayes, Explicit class field theory for rational function fields, Trans. Amer. Math. Soc. 189 (1974), 77-91.

[7] M. Ishibashi, Bertrand-Tschebysheff theorem in function fields over finite fields, to appear in Proceedings of the symposium on analytic number theory and related topics.

[8] H. Kornblum, Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression, Mathematische Zeitschrift 5 (1919), 100-111.

[9] W.M. Schmidt, Mahler's T-numbers, Proc. Symposia Pure Math., vol. 20 (1971), 275-286.

[10] Th. Schneider, Einführung in die transzendenten Zahlen, Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[11] V.G. Sprindzuk, On a classification of transcendental numbers, Litovsk Mat. Sb. 2 (1962), 215-219 (Russian).

[12] V.G. Sprindzuk, Mahler's problem in metric number theory, A. M. S., Translations of mathematical monographs, vol. 25, Providence, R. I., 1969.

[13] V.G. Sprindzhuk, Achievements and problems in Diophantine approximation theory, Uspekhi Mat. Nauk 35 (1980); English transl. in Russian Math. Surveys 35:4 (1980), 1-80.