数理解析研究所講究録
第837巻 1993年 185-194

πとπ^2の無理数度の改良

京大総合人間 畑 政義 (Masayoshi Hata)

§1. πは最も身近な超越数でありながら、eと違い、まだその算術的性質に関して、未解決の部分が多い。特に、πの単純連分数がexplicitに知られていない現状では、πの有理数による近似の程度を量的に測った、いわゆる無理数度を評価あるいは決定することが一つの問題になる。

πの算術的性質を研究する上で生じる困難さの1つは、πを、ある種の漸化関係式を満たすような有理数を係数に持つベキ級数の有理点での値として表したとき、例えば

$$\pi = -2i\,\mathrm{Log}(i)$$

であるが、そのベキ級数の収束半径が有限であるということつまり、eの場合のように整関数にはならないということにある。この事情はπ^2の場合も同様で、例えば

$$\pi^2 = 6L_2(1)$$

であり、ここで$L_2(z)$はdilogarithm(二重対数関数)

$$L_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

であるが、$z=1$は対数型分岐点であり、正則点にすらなっていない。それゆえ、Padé近似の方法をそのまま適用しても有力な武器にはならない。ちなみに、$L_2(1/p)$の無理数性については、やはりLegendre型多項式の応用によりPadé型近似を構成し、筆者は、$p\geqq 7$および$p\leqq -5$なる任意の整数pに対して、無理数度の評価を与えた。$p=\pm 1$の場合まで出来ればよいのだが難しいようである。

さて、よく知られているように、ほとんどすべての実数xは無理数度2を持つ。つまり、任意の正数εに対し、正の整数$q(\varepsilon)$があって、

$$|x-\frac{p}{q}|\geqq q^{-2-\varepsilon}$$

が、任意の整数pと$q\geqq q(\varepsilon)$に対して成り立つ。このことをChudnovskyにならって、xは<u>$2+\varepsilon$性質</u>を持つという。解析学に登場する古典的な定数である$\log 2$, π, π^2, $\zeta(3)$のような無理数は、いわゆる自然に定義される限り、すべて上述したgenericな$2+\varepsilon$性質をもつだろうというのがLangの予想である。

本稿では、πとπ^2の無理数度に関する最良の結果を、ある意味でLegendre型といえる多項式を含む積分を用いて導出する。ここで言うLegendre多項式とは、

$$\frac{1}{n!}(x^n(1-x)^n)^{(n)}$$

すなわち、[0,1]上であらゆる$n-1$次以下の多項式と直交

するようなn次多項式である。これに関連して、重み付き直交多項式を考えることによって、別種の数の算術的性質を研究することも可能であるが、ここでは言及しない。

§2．まず、π^2の数論的研究にはつぎのBeukersによる補題が基本になる。任意の整係数多項式$F(x)$に対し、原点での零点のオーダーをord(F)、次数をdeg(F)と書く。また$1,2,\cdots,n$の最小公倍数をD_nと書く。

補題1．任意の整係数多項式$F(x)$, $G(y)$に対し、

$$\iint_S \frac{F(x)G(y)}{1-xy}\,dx\,dy = a\zeta(2)+b$$

ここで、aは整数、bは有理数で、その分母は$D_N D_M$の約数である。ただし、

$$M=\max\{\deg(F),\deg(G)\}$$

$$N=\min\{\max\{\deg(F),\deg(G)-\mathrm{ord}(F)\},\ \max\{\deg(G),\deg(F)-\mathrm{ord}(G)\}\}$$

である。Sは単位正方形$[0,1]\times[0,1]$である。

この補題に登場する2重積分をBeukers積分と呼ぶ。これは、Apéryによる$\zeta(2)$, $\zeta(3)$の無理数性の証明に刺激さ

れて、Beukersによって考察された積分で上述のLegendre多項式が用いられた。以後、このタイプの積分を利用して、π^2の無理数度はじょじょに改良されていった。次にそのリストを載せる。（＊印は証明なしでannounceされたもの）

π^2の無理数度

Beukers	1979	11.85078···
Chudnovskys*	1984	7.325
Dvornicich, Viola	1987	10.02979···
Rukhadze*	1987	7.552
Hata	1990	7.5252
Rhin, Viola	1993	7.398537

Chudnovsky兄弟によってannounceされた値7.325が、長らく最良の数値であったが、その証明のヒントすら全く発表されなかったので、多くの研究者にとって不満であった。つまり、誰も証明も否定もできなかったのであるが、ここにやっと、その壁が乗り越えられたというわけである。もちろん、Langの予想からはほど遠いのであるが。

<u>定理</u>1．あるeffectiveな定数q_0が存在して、

$$\left|\pi^2-\frac{p}{q}\right|\geqq q^{-6.3489}$$

が、任意の整数pと任意の整数$q\geqq q_0$に対して成立する。

この定理の証明には、補題1における多項式として、

$$F(x)=\frac{1}{12n!}(x^{15n}(1-x)^{15n})^{(12n)}$$

$$G(y)=y^{2n}(1-y)^{14n}$$

を用いる。式中に登場する係数12n,14n,15nは、いわば魔法の数字であって、数百例におよぶ数値計算によって最良であろうと判断されたものである。もちろん、できればこの選択が最良であることを証明したいのだが、これはほとんど不可能に思われる。いったんこのような数字が選ばれた後は、定理の言う無理数度6.3489は、厳密に算出される数値であり、きわめて複雑な式であるために、近似値としてこれを採用しているにすぎないことを注意しておく。

上述した$F(x)$, $G(y)$の利点は、その整係数たちの最大公約数がきわめて大きいという性質にある。従って、Beukers積分から得られるπ^2の(有理係数)一次形式は、実はある大きな整数で割っておいて良いということになる。これだけではなくて、xおよびyに関するℓ回部分積分から(ここで、ℓは適当に選ぶのであるが)その一次形式をさらに、別種の素数積で割っておいて良いことがわかり、その結果、定理1の無理数度が得られるという仕組みになっている。また直ちに次の系が従う。

系１．ある整数q_1が存在して、

$$|\pi - \frac{p}{q}\sqrt{k}| \geqq q^{-12.6978}$$

が、任意の整数pと任意の整数$q \geqq q_1$に対して、kに関して一様に、成り立つ。

§３．系１の結果も、そう悪くはないのであって、例えばk＝１の場合のπの無理数度でさえ、いままでで最良の結果を与えることが、次のπに関する表からわかる。

πの無理数度

Mahler	1953	42 と 30
Mignotte	1974	20
Chudnovsky	1982	19.8899944・・・
Hata	1993	13.394

もちろん、この表に、さきに述べたπ^2の表の結果をそれぞれ２倍したものを加えるべきであるが、省略した。

上の表に述べたπの結果は、すべて、対数関数および指数関数の系に対する近似公式（HermiteおよびMahlerによる）を利用して得られたものであるが、つまり、πのベキの整数係数の線形結合を考察するのであるが、実際には、πに対す

る近似有理数を与えることで、πの無理数度を求めることが望まれていた。πのベキの線形結合からは（特に、π^2の一次形式からは）πに対する近似有理数についてのなんらの情報も得られないからである。もっと正確に言えば、

$$q_n\pi - p_n = \varepsilon_n$$

を満たすような整数列$\{p_n\}, \{q_n\}$でε_nが指数オーダーで割合に速く減少するようなものを見い出さなければならない。実際、$\varepsilon_n \sim q_n^{-\delta}$ $(\delta > 0)$であれば、（q_nの増大オーダーについてもう少し条件が必要だが）無理数度$1 + 1/\delta$が従う。これは難しい問題であった。ChudnovskyやRhinが見い出したものは、非常に悪い無理数度しか与えなかった。

問題をπ単独で考えると、どうしてもうまくいかなかったのであるが、発想を転換して、πと$\log 2$の同時近似として問題を考えることによって次の結果を得ることができる。ただし、この結果も、Langの予想には遥かに遠い。

<u>定理2</u>. あるeffectiveな定数H_0が存在して、

$$|n\pi + m\log 2 + \ell| \geq H^{-7.0161}$$

が、$H \equiv \max\{|n|, |m|\} \geq H_0$を満たす任意の整数$n, m, \ell$に対して成り立つ。

この結果から、ただちにπの無理数度8.0161が得られる。もちろん、$\pi/\log 2$の無理数度8.0161も得られる。定理2は、簡単に、1，π，log2は一次独立度7.0161を持つと言える。この定理の証明には、次の複素積分

$$\int (F(z))^n \frac{dz}{z}$$

ただし

$$F(z) = \frac{(z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2}{z^3}$$

において、$a_1=1, a_2=2, a_3=1+i$の場合が用いられる。被積分関数は、やはり一種のLegendre型の多項式を含んでいる点に注目されたい。ただし、積分路は1から2または1+iまでの滑らかな曲線で、$|F(z)|$の鞍部点(saddle)をそれぞれ通るものを考える。いわゆる、Riemannの鞍部点法を適用するのである。さらに、表面上は$F(z)$の分子の多項式には何らの共通因子もないが、実は、この積分から導かれるπとlog2の線形結合は、ある大きな素数の積で割って良いことがわかる。この点で、先のπ^2の場合と同じように、大幅に無理数度の改良が可能になったというわけである。

さらに、別の場合として、$a_1=1, a_2=\lambda, a_3=(1+\lambda)/2$と選べば、次のように$\pi/\sqrt{3}$の新しい無理数度が得られる。ただし、$\lambda=e^{\pi i/3}$である。

定理３．あるeffectiveな定数q_2が存在して、

$$\left|\pi/\sqrt{3}-\frac{p}{q}\right|\geqq q^{-4.6016}$$

が、任意の整数pと任意の整数$q\geqq q_2$に対して成立する。

この結果も、やはり、以前の結果を改良するものであって、それは次の表からわかる。（＊印は証明なしでannounceのみ）

$\pi/\sqrt{3}$の無理数度

Alladi, Robinson	1980	8.30998···
Chudnovsky	1984	5.7926
Dubitskas	1987	5.516
Rhin*	1987	4.97
Hata	1990	5.0874···

以上の結果は、系１において、k＝１とk＝３の場合には個別のさらに良い方法があって、$\pi/\sqrt{k}$の無理数度が著しく改良され得ることを示している。他のkで、そのような結果が知られている例は（おそらく唯一であろうが）、

$$k=640320$$

の場合である。Chudnovsky兄弟は、この場合12.11···の無理数度を持つのだとannounceしている。きっと、彼等が、10億桁以上もの円周率計算をした時に用いた公式と関係があるのだろう。

無理数度の改良の歴史は、その数値には現れない数々のアイデアと困難の克服の歴史でもある。通常、各研究者は自身が発見した新しい方法を、とことんまで追い詰め、考えに考えて論文にしているので、その同じ方法を使って他の研究者がより良い値を出すということはほとんどないだろう。従って、無理数度の改良は、おおむね新しい方法の出現を伴っている。それだけになかなか難しいのであるが、一方でLangの予想からはほど遠く、何か簡単で自然な方法が残っているような気がしないでもない。

参考文献については、筆者自身のものだけを載せるにとどめるが、そこに載っている参考文献の方も参照して下さい。

参考文献

M. Hata, Legendre type polynomials and irrationality measures, J. reine angew. Math. 407(1990), 99-125.

M. Hata, On the linear independence of the values of polylogarithmic functions, J. Math. Pures Appl. 69(1990), 133-173.

M. Hata, A lower bound for rational approximations to π, to appear in J. Number Theory.

M. Hata, Rational approximations to π and some other numbers, to appear in Acta Arithmetica.

M. Hata, A note on Beukers' integral, to appear in J. Australian Math. Soc.