数理解析研究所講究録
第838巻 1993年 9-34

L_2S^0のホモトピー群について

鳥取大教育　下村克己（Katsumi Shimomura）
岡山大理　矢部敦子（Atsuko Yabe）

§1．導入

球面のホモトピー群$\pi_*(S^0)$を決定する問題は、ホモトピー論における主問題の1つであり、それを求める方法も色々と考えられている。そのうちの1つとして一般Adamsスペクトル系列がある。この小論ではBrown-Petersonスペクトラムのv_2局所化$v_2^{-1}BP$を基にしてつくられるAdamsスペクトル系列による球面のホモトピー群の計算を行っている。$v_2^{-1}BP$に基づいたスペクトル系列では、$\pi_*(S^0)$ではなく$\pi_*(L_2S^0)$に収束している。ここにL_2S^0は球面の$v_2^{-1}BP$に関したBousfield局所化である。いままで既に、$v_0^{-1}BP$、$v_1^{-1}BP$に関しての局所化L_0S^0, L_1S^0のホモトピー群は'70年代までに決定されていた。またmod p Moore空間Mに対しては、'86年の論文[14], [16]により、$p \geqq 5$のときL_2Mのホモトピー群が与えられている。

$\pi_*(L_2S^0)$の計算は、Miller, Ravenel, Wilson [6]により導入され

たクロマティックスペクトル系列と、Bocksteinスペクトル系列を用いて行う。ここでは変環定理により$v_2^{-1}BP_*$のExtと$E(2)_*$のExtは同型だから、$v_2^{-1}BP$のかわりに$E(2)$を用いて計算を行っている。（ここで$E(2)$は$E(2)_*=\mathbb{Z}_{(p)}[v_1,v_2,v_2^{-1}]$となるJohnson-Wilsonスペクトラムを表す。）Bocksteinスペクトル系列による$H^*M_0^2$（$M_0^2=v_2^{-1}BP_*/(p^\infty,v_1^\infty)$）の計算結果（§8参照）は[6]で述べられているように、球面のホモトピー群のα族、β族の積に関する様々な結果、及びγ族の分解可能性等への応用が考えられる。またRavenel [10]により$L_2X=L_2S^0\wedge X$が示されているのでホモトピー群$\pi_*(L_2S^0)$の結果はL_2局所化されたスペクトラムのホモトピー圏の理解の第一歩ともなっている。これらの応用に関しては今後の課題としておく。

ここでは、計算の道具、計算の流れがわかるように細かい計算部分及び証明抜きで荒筋を書いていく。

§2. 主結果

$E(2)$を3より大きい素数pにおけるJohnson-Wilsonスペクトラムとする。そのホモトピー群は$E(2)_*=\mathbb{Z}_{(p)}[v_1,v_2,v_2^{-1}]$である。このとき、$\pi_*(L_2S^0)$に収束するAdams-Novikovスペクトル系列が得られることが知られている。（cf. [2], [10]）そのE_2項は

$$H^{s,t}E(2)_* = \mathrm{Ext}^{s,t}_{E(2)_*(E(2))}(E(2)_*, E(2)_*)$$

である。ここで L_2 は $E(2)$ に関する Bousfield 局所化関手を意味している。$i+n \leqq 2$ に対し、次で定義される余加群 N_n^i, M_n^i について考える。

$$M_n^i = v_{n+i}^{-1} N_n^i \ , \quad N_n^{2-n} = M_n^{2-n}$$

$$N_0^0 = E(2)_* \ , \ N_1^0 = E(2)_*/(p) \ , \ N_0^1 = E(2)_*/(p^\infty)$$

$$N_2^0 = E(2)_*/(p, v_1) \ , \ N_1^1 = E(2)_*/(p, v_1^\infty) \ , \ N_0^2 = E(2)_*/(p^\infty, v_1^\infty)$$

このとき、我々の目的である E_1 項が $H^t M_0^s$ となる $H^{s,t}E(2)_*$ に収束するクロマティックスペクトル系列が得られる。$s<2$ に対して E_1 項は、[6] において既にわかっている。$H^* M_0^2$ を決定するために、$n=0,1$ に対し E_1 項が $H^t M_{n+1}^{1-n}$ となる $H^* M_n^{2-n}$ に収束する v_1-, mod p-Bockstein スペクトル系列を用いて計算する。

Ravenel は次のことを示した。

定理 2.1 ([9]) $H^* M_2^0 = \mathbb{F}_p[v_2, v_2^{-1}]\{1, h_0, h_1, g_0, g_1, h_0 g_1\} \otimes E(\zeta)$

ここで $\mathbb{F}_p$ は標数 p の素体で、$\mathbb{Z}/p$ と同一視する。また、$R\{x\}$ は x によって生成される R 加群を、$E(x)$ は x によって生成される外積代数を意味している。v_1-Bockstein スペクトル系列により定理 2.1 を用い $H^* M_1^1$ を計算する。わかりやすくするため、Hopkins, Mahowald 等が行っているように、生成元の形はそれを代表するコサイクルの最初の項で書く。

$$X = \mathbb{F}_p[v_1]\{v_2^{sp^n}/v_1^{a_n} \mid n \geqq 0, \ s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}\}$$

$$X_\infty = F_p\{1/v_1^j \mid j>0\} \cong F_p[v_1, v_1^{-1}]/F_p[v_1]$$

$$Y_0 = F_p[v_1]\{v_2^m h_0/v_1^{A_n+2} \mid m \in \mathbb{Z}(0),\ n=\nu_p(m)\}$$

$$Y_1 = F_p[v_1]\{v_2^m h_0/v_1^{A'_n+2} \mid m \in \mathbb{Z}(2),\ n=\nu_p(m)\}$$

$$Y = F_p[v_1]\{v_2^{tp-1} h_1/v_1^{p-1} \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

$$Y_\infty = F_p\{h_0/v_1^j \mid j>0\} \cong F_p[v_1, v_1^{-1}]/F_p[v_1]$$

$$G = F_p[v_1]\{v_2^{sp^n-(p^{n-1}-1)/(p-1)} g_1/v_1^{a_n},\ v_2^s g_0/v_1 \mid n \geqq 1,\ s+1 \in \mathbb{Z}-p\mathbb{Z}\}$$

とおく。ここで$\nu_p(m)=\max\{k \mid p^k|m\}$であり整数$a_n$, A_n, A'_nは

$$a_0=1,\quad a_n=p^n+p^{n-1}-1$$

$$A_n=(p+1)(p^n-1)/(p-1)$$

$$A'_n=(p+1)(p^{n+1}-p^n+(p^n-1)/(p-1))$$

で与えられ、また整数の部分集合$\mathbb{Z}(0)$, $\mathbb{Z}(2)$は次で与える。

$$\mathbb{Z}(0)=\{m \mid m=sp^n,\ p\nmid s(s+1)\}$$

$$\mathbb{Z}(2)=\{m \mid m=(sp^2-1)p^n\}$$

このとき$H^*M_1^1$の構造は次のようになる.

定理 2.2 ([6], [16], [14])

$$H^*M_1^1=(X \oplus X_\infty \oplus Y_0 \oplus Y_1 \oplus Y \oplus Y_\infty \oplus G) \otimes E(\zeta)$$

ここでは mod p-Bockstein スペクトル系列を用い、次のようなことを得た。

定理 2.3　加群 $H^*M_0^2$ は

$$(X_\infty^\infty \oplus Y_{\infty,c}^\infty \oplus G_0^\infty) \otimes E(\zeta) \oplus X^\infty \oplus X\zeta_c^\infty \oplus Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty \oplus Y_c^\infty \oplus G^\infty$$

と同型である。

ここで先の加群は次のように定義される。0 次元のものとして、

$$X^\infty = \mathbb{Z}_{(p)}\{v_2^{sp^n}/p^{i+1}v_1^j \mid n \geqq 0,\ s \in \mathbb{Z}-p\mathbb{Z},\ i \geqq 0,\ j \geqq 1,\ p^i \mid j \leqq a_{n-i}$$
$$\text{かつ } p^{i+1} \nmid j \text{ 又は } a_{n-i-1} < j\}$$

$$X_\infty^\infty = \mathbb{Z}_{(p)}\{1/p^{i+1}v_1^j \mid i = \nu_p(j) \geqq 0\}$$

1 次元のものとして、

$$X\zeta_c^\infty = \mathbb{Z}_{(p)}\{v_2^{sp^n}\zeta/p^{i+1}v_1^j \mid s \in \mathbb{Z}-p\mathbb{Z},\ j > 0,\ p^i \mid j \leqq a_{n-i} \text{ かつ}$$
$$p^{i+1} \nmid j \text{ 又は } j > a_{n-i-1} \text{ そして } k \geqq 0 \text{ であり}$$
$$s = tp^{k+1}-1 \text{ に対し } p^{k+1} \mid j \text{ ならば } p^{i+1} \mid j\}$$

$$Y_{0,c}^\infty = \mathbb{Z}_{(p)}\{v_2^{sp^n}h_0/p^{i+1}v_1^{kp^i+1} \mid p \nmid s(s+1),\ k=0 \text{ に対し } i=n,$$
$$k>0 \text{ に対し } kp^i+1 \leqq A_{n-i}+2,$$
$$\text{もし } p \nmid k \text{ ならば } kp^i+1 > a_{n-i}, \text{ その他の}$$
$$\text{場合 } kp^i+1 > A_{n-i-1}+2\}$$

$$Y_{1,c}^\infty = \mathbb{Z}_{(p)}\{v_2^{(tp^2-1)p^n}h_0/p^\ell v_1^{kp^i+1} \mid k=0 \text{ ならば } \ell=n+1,$$
$$k>0,\ kp^i > a_{n-i} \text{ に対して}$$
$$p^{n+2}-p^n < kp^i < p^{n+2}-p^n+A_{n-i+1}+2 \text{ に対し } \ell=i>0$$
$$\text{かつ } p \mid k \text{ ならば } p^{n+2}-p^n+A_{n-i}+2 \leqq kp^i$$
$$i=0 \text{ かつ } p \nmid k+p^{n-i} \text{ 又は } kp^i \leqq p^{n+2}-p^n,$$

$0<i\leqq n$ であり $p\nmid k+p^{n-i}$ に対し $l=i+1$

$i=n$, $k\leqq p^2-1$, $p\mid k+1$ かつ $k\neq p^2-p-1$ に

対し $l=n+2$

$i=n$ かつ $k=p^2-p-1$ ならば $l=n+3\}$

$Y_c^\infty=\mathbb{Z}_{(p)}\{v_2^{tp-1}h_1/p^l v_1^j \mid j<p-1$ ならば $l=1$, $p\mid t$ かつ

$j=p-1$ ならば $l=2\}$

$Y_{\infty,c}^\infty$ は $\{h_0/p^j v_1 \mid j>0\}$ により生成される $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$ に

同型な加群

また次のものを考える。

$Y_{0,c}^{\infty,G}=\mathbb{Z}_{(p)}\{v_2^{sp^n}h_0/p^{i+1}v_1^{kp^{i+1}+1} \mid p\nmid s(s+1)$, $k\neq 0$, $i\geqq 0$ に対し

$A_{n-i-1}+1<kp^{i+1}\leqq A_{n-i}+1\}$

$Y_{1,c}^{\infty,G}=\mathbb{Z}_{(p)}\{v_2^{(tp^2-1)p^n}h_0/p^{i+1}v_1^{kp^{i+1}+1} \mid k\neq 0$, $i\geqq 0$ に対し

$p^{n+2}-p^n+A_{n-i-1}+1<kp^{i+1}\leqq p^{n+2}-p^n+A_{n-i}+1\}$

$G_c^\infty=\mathbb{Z}_{(p)}\{v_2^{sp^n}g_0/p^{n+1}v_1,\ v_2^{sp^n-(p^{n-1}-1)/(p-1)}g_1/p^l v_1^j \mid$

$p\nmid s+1$, $0<j\leqq a_n$

$s=up^i\in\mathbb{Z}(0)$ ならば $p^{i+1}\nmid j+A_{n-i-1}+1$,

$s=up^i\in\mathbb{Z}(2)$ ならば $p^i\nmid j+A_{n-i}+1$,

$n=0$, $\nu_p(s)=i$ ならば $l=i+1$

$n\geqq 1$, $\nu_p(j+A_{n-1}+1)=i$ ならば $l=i+1\}$

G_0^∞ は $\{g_0/p^j v_1 \mid j>0\}$ により生成される $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$

これにより

$$G^\infty = G_c^\infty \oplus Y\zeta^\infty$$
$$Y\zeta_c^\infty = (Y_{0,c}^{\infty,q} \oplus Y_{1,c}^{\infty,q}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\{\zeta\}$$

である。

この定理の系として、クロマティックスペクトル系列によりAdams-Novikovスペクトル系列のE_2項$H^*E(2)_*$を得る。さらに$s>4$に対し$E_2^s=0$なので、それはつぶれ、群の拡大問題も起こらない。それ故E_2項はL_2S^0のホモトピー群と同型になる。こうして次の主定理を得た。

定理 2.4　$\pi_*(L_2S^0)$は$H^*E(2)_*$に同型であり、それは

$$\mathbb{Z}_{(p)} \oplus \mathbb{Z}_{(p)}\{v_1^{sp^i}/p^{i+1} \mid i \geq 0,\ s \geq 0,\ p \nmid s\} \oplus X^\infty$$
$$\oplus Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty \oplus Y_c^\infty \oplus X\zeta_c^\infty \oplus (X_\infty^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\{\zeta\})$$
$$\oplus Y\zeta_c^\infty \oplus G_c^\infty \oplus (Y_{\infty,c}^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\{\zeta\}) \oplus G_0^\infty$$
$$\oplus (G_0^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\{\zeta\})$$

と同型である。

生成元の次数は定理 9.1 から次のように読みとれる。ここでホモトピー元$\xi \in \pi_*(L_2S^0)$は、$\xi \in \pi_r(L_2S^0)$ならば次数rを持ち、$|\xi| = r$と書く。このとき最初の$\mathbb{Z}_{(p)}$の元は0であり、他の元に対しては

$$|v_1^j/p^{i+1}| = jq - 1$$
$$|v_2^m/p^i v_1^j| = m(p+1)q - jq - 2$$
$$|v_2^m h_0/p^i v_1^j| = m(p+1)q + q - jq - 3$$

$$|v_2^{tp-1}h_1/p^i v_1^j| = tp(p+1)q - q - jq - 3$$

$$|v_2^m g_0/p^i v_1^j| = m(p+1)q + q - jq - 4$$

$$|v_2^m g_1/p^i v_1^j| = m(p+1)q - q - jq - 4$$

そして $z\otimes\zeta$ という形をした生成元に対しては

$$|z\otimes\zeta| = |z| - 1$$

である。

§3. ホップ擬代数

Eは環スペクトラムとし、$E_*=E_*(S^0)$ を意味しているとする。Eの $E_*(E)$ ホモロジーが E_* 上平坦ならば、対 $(E_*, E_*(E))$ は普通の意味において(cf. [1],[11]) ホップ擬代数となる。そして $E_*(E)$ 余加群の圏においてホモロジー代数をすることができる。(cf. [11, A1])

それぞれの素数 p においてそのようなスペクトラムEとして、Brown-Peterson スペクトラム BP 及び非負整数 n での Johnson-Wilson スペクトラム $E(n)$ を得る。ここで $E(n)$ が環スペクトラムであるかどうかはわからないが、任意のスペクトラム X に対し $E(n)_*(X)=E(n)_*\otimes_{BP_*}BP_*(X)$ なので、$BP_*(BP)$ の構造より誘導されるホップ擬代数 $(E(n)_*, E(n)_*(E(n)))$ を得る。ここで BP_* の $E(n)_*$ への作用は v_k $(k>n)$ を 0 にすることにより与えられる。また v_k とは Hazewinkel の元で、次の多項式の生成元で

である。

(3.1) $BP_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \cdots]$, $E(n)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, \cdots, v_n, v_n^{-1}]$ $(n>0)$

$n=0$ では $E(0)_* = \mathbb{Q}$ となる。 (cf. [11])

これらの余作用環は

(3.2) $BP_*(BP) = BP_*[t_1, t_2, \cdots]$, $E(n)_*(E(n)) = E(n)_* \otimes_{BP_*} BP(BP) \otimes_{BP_*} E(n)_*$

である。[7] (cf. [11]) により、これらのスペクトラムに関するホップ擬代数の構造写像の公式を得る。$E(n)$ に関するホップ擬代数の構造は BP_* のものから導かれる。だからここで BP の構造射を考察する。左単位元 $\eta_L : BP_* \to BP_*(BP)$ は包含写像 $BP_* \subset BP_*(BP)$ である。このとき $BP_*(BP)$ は η_L により左 BP_* 加群である。右単位元 $\eta_R : BP_* \to BP_*(BP)$ に対しては次の Landweber の公式がある。また同様に $BP_*(BP)$ は η_R により右 BP_* 加群となる。

(3.3) $\eta_R(v_n) \equiv v_n + v_{n-1} t_1^{p^{n-1}} - v_{n-1}^p t_1 \mod I_{n-1}$

但し、I_n は BP_* の素イデアル $I_n = (p, v_1, \cdots, v_{n-1})$ である。

$E(n)_*(E(n))$ については、$E(n)_*(BP) = E(n)_* \otimes_{BP_*} BP_*(BP) = E(n)_*[t_1, t_2, \cdots]$ に注意して

$$E(n)_*(E(n)) = E(n)_*(BP) \otimes_{BP_*} E(n)_* = E(n)_*[t_1, t_2, \cdots] / (\eta_R(v_i) : i > n)$$

を得る。

(A, Γ) でホップ擬代数 $(BP_*, BP_*(BP))$ 又は $(E(2)_*, E(2)_*(E(2)))$ とする。このとき余加群 M の Ext 群 $H^*M = \mathrm{Ext}_\Gamma^*(A, M)$ は、余棒複体 $(\Omega_\Gamma^* M, d_*)$ のホモロジーにより計算することができる。

v_2局所化$BP_*(BP)$余加群Mに対し、同型写像

$$\mathrm{Ext}^{**}_{BP_*(BP)}(BP_*, M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^{**}_{E(2)_*(E(2))}(E(2)_*, E(2)_*\otimes_{BP_*}M)$$

が存在することが[5]で示されている。この加群をH^*Mと表す。余加群Mの余棒複体は、$s \geq 0$に対し次数つき$Z_{(p)}$加群

$\Omega_\Gamma^{s,*}M = M\otimes_A \Gamma \otimes_A \cdots \otimes_A \Gamma$（$\Gamma$は$s$回）　と、$d_{s+1}d_s = 0$となる微分

$d_s : \Omega_\Gamma^{s,*}M \longrightarrow \Omega_\Gamma^{s+1,*}M$　との対$(\Omega_\Gamma^{*,*}M, d_*)$である。$d_s$については次の(3.4)によって帰納的に定義される。

(3.4)　$d_0(m) = \psi(m) - m\otimes 1$

$$d_1(m\otimes x) = \psi(m)\otimes x - m\otimes \Delta(x) + m\otimes x\otimes 1$$

$$d_s(m\otimes x\otimes x_{s-1}) = d_1(m\otimes x)\otimes x_{s-1} - m\otimes x\otimes d_{s-1}(x_{s-1})$$

$$m\in M,\ x\in\Gamma,\ x_s \in \Omega_\Gamma^s A = \Gamma\otimes_A \cdots \otimes_A \Gamma \ (s\text{回})$$

ここで$\psi : M \to M\otimes_A \Gamma$は$M$の余加群構造写像である。

§4. クロマティックスペクトル系列

この節ではまた、環スペクトラムBP, $E(2)$を考える。そしてEによってそれらのスペクトラムを意味することにする。このときもしXが連結ならばEに関するXのBousfield局所化のホモトピー群$\pi_*(L_E X)$に収束するAdams-Novikovスペクトル系列を得る。(cf. [1], [2])　連結p局所化スペクトラムXに対し$L_{BP}X = X$に注意する。E_2項は$H^*E_*(X) = \mathrm{Ext}^*_{E_*(E)}(E_*, E_*(X))$である。Landweberのフィルトレイション定理[4]によりE_2項は

H^*E_*/I_k の計算によって導かれる。ここで I_k は E_* の不変素イデアル $(p, v_1, \cdots, v_{k-1})$ を意味しており、$E=E(2)$ のとき $k \leqq 2$ とする。Ext 群 H^*E_*/I_k はまた、Toda-Smith スペクトラム $V(k-1)$ が存在するならばそれらのホモトピー群 $\pi_*(L_E V(k-1))$ を計算するための Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 項でもある。

Miller, Ravenel, Wilson [6] は Ext 群 H^*E_*/I_k を計算するためにクロマティックスペクトル系列を用いている。

クロマティックスペクトル系列の定義を与えておく。まず $N_k^0 = E_*/I_k$ とおき、N_k^s が定義されていると帰納的に仮定する。このとき $M_k^s = v_{k+s}^{-1} N_k^s$ と定義し、これは[5]により N_k^s の余加群構造から導かれる余加群構造を持つ。N_k^{s+1} は包含写像 $N_k^s \subset M_k^s$ の余核でありそれはまた、誘導された余加群構造を持つ。言い換えれば、余加群の短完全列

(4.1) $\quad 0 \longrightarrow N_k^s \xrightarrow{\subset} M_k^s \longrightarrow N_k^{s+1} \longrightarrow 0$

がある。

(4.1)の短完全列に関手 H^*- を施して次の長完全列を得る。

(4.2) $\quad 0 \to H^0N_k^s \to H^0M_k^s \to H^0N_k^{s+1} \xrightarrow{\delta_0} H^1N_k^s \cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^nN_k^s \to H^nM_k^s \to \cdots$

k, s はそれぞれ非負整数である。これらの完全列により与えられる完全対から得られるスペクトル系列をクロマティックスペクトル系列と言う。E_1 項は $E_1^{s,t} = H^tM_k^s$ であり収束先の加群は求めたい Ext 群 $H^{s,t}N_k^0 = H^{s+t}E_*/I_k$ である。E_1 項を計算

するために、Miller, Ravenel, WilsonはBocksteinスペクトル系列を導入した。ここでBocksteinスペクトル系列とは、次の短完全列に関手H^*-を施して得られる完全対によって定義されるものである。

$$0 \longrightarrow M_{k+1}^{s-1} \xrightarrow{\varphi} M_k^s \xrightarrow{v_k} M_k^s \longrightarrow 0$$

ここでφは　$\varphi(x)=x/v_k$　によって定義される余加群写像である。Bocksteinスペクトル系列はE_1項$H^*M_{k+1}^{s-1}$を持ち$H^*M_k^s$に収束する。Bocksteinスペクトル系列を研究する際、我々の場合は$(k,s)=(0,2)$であるが、主に次を用いる。

補題4.3 [6, 注意3.11]　完全対の写像を考える。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\delta_{t-1}"] & H^tM_1^1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "="] & B^t \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & B^t \arrow[r, "\delta_t"] \arrow[d, "f"] & H^{t+1}M_1^1 \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "="] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\delta_{t-1}"] & H^tM_1^1 \arrow[r, "\varphi"] & H^tM_0^2 \arrow[r, "p"] & H^tM_0^2 \arrow[r, "\delta_t"] & H^{t+1}M_1^1 \arrow[r, "\varphi_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

B^tがp捩れ群ならばfは同型である。

帰納法の第1段階はMoravaの定理である。

(4.4) [9]　$p>2$ならば　$H^*M_1^0=F_p[v_1, v_1^{-1}]\otimes E(t_1)$

　　$p>3$ならば　$H^*M_2^0=F_p[v_2, v_2^{-1}]\{1, t_1, t_1^p, g_0, g_1, g_0t_1^p\}\otimes E\{\zeta_2\}$

ここで$E(x)$は$\{x\}$で生成される外積代数、$F\{b_i\}$は基底$\{b_i\}$を持つFベクトル空間を意味している。また元g_i, ζ_2は次で与えられる。

(4.5)　$g_0=v_2^{-p}(t_1\otimes t_2^p+t_2\otimes t_1^{p^2})$,　$g_1=v_2^{-p^2-1}(t_1\otimes t_2^p+t_2\otimes t_1^{p^2})^p=v_2^{-1}g_0^p$

$$\zeta_2 = v_2^{-1}t_2 + v_2^{-p}(t_2^p - t_1^{p^2+p}) - v_2^{-p-1}v_3 t_1^p \in \Omega^1_\Gamma A$$

第2段階は次のようである。

(4.6)[6] $p>2$ ならば $t>1$ に対し $H^t M_0^1 = 0$, $H^1 M_0^1 = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$ これの位数 p^j の部分群は

$$y_{1,j} = -\sum_{k>0} \frac{(-1)^k v_1^{-k} t_1^k}{k\, p^{j+1-k}}$$

によって生成される。そして

$$H^0 M_0^1 = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)} \oplus \sum\nolimits_{i\ge 0,\,(p,s)=1} (\mathbb{Z}/p^{i+1})\langle v_1^{sp^i}/p^{i+1}\rangle$$

ここで $G\langle x\rangle$ は生成元が x の G と同型な群を意味している。

$H^* M_1^1$ の結果を述べるためにもう少し生成元を導入しておく。ここより BP 上ではなく $E(2)$ 上で考え、ホップ擬代数 (A,Γ) は $(E(2)_*, E(2)_*(E(2)))$ を意味する。生成元 $x_n \in \Omega^0_\Gamma A$ は次の(4.7)により帰納的に定義される。

(4.7) $x_0 = v_2$, $x_1 = v_2^p$, $x_2 = x_1^p - v_1^{p^2-1} v_2^{p^2-p+1}$

$$x_n = x_{n-1}^p - 2v_1^{a_n - p} v_2^{p^n - p^{n-1}+1} \quad (n>2)$$

余鎖複体の微分 d_0 に対しては

(4.8)[6] $\mathrm{mod}\ (p, v_1^{2+a_i})$

$$d_0(x_i) \equiv v_1 t_1^p \quad (i=0), \quad \equiv v_1^p v_2^{p-1}(t_1 + v_1(v_2^{-1}(t_2 - t_1^{p+1}) - \zeta_2)) \quad (i=1)$$

$$\equiv 2v_1^{a_i} v_2^{(p-1)p^{i-1}} \sigma_{i-1} \quad (i>1)$$

先の生成元 σ_n は

$$\sigma_n = t_1 - \frac{1}{2} v_1 \zeta_2^{p^n}$$

である。生成元 ζ_2 は $i\ge 0$ に対し $\Omega^1_\Gamma A/(p, v_1)$ 内で $\zeta_2^{p^i}$ にホモロー

グである。

(4.10)[15] $\Omega_\Gamma^1 A/(p, v_1)$ の ζ_2 にホモローグであるような余複体 $\Omega_\Gamma^1 A/(p^{i+1}, v_1^{mp^i})$ のコサイクル ζ が存在する。

このことにより ζ^{p^i} も含めて、$\Omega_\Gamma^1 A/(p, v_1)$ において ζ_2 とホモローグとなるような $\Omega_\Gamma^{1,0} A/(p^{i+1}, v_1^{mp^i})$ のコサイクルを ζ と表す。また次の記号を用いる。

(4.11) $\sigma = t_1 - \frac{1}{2} v_1 \zeta$

このとき σ は $\Omega_\Gamma^1 A/(p, v_1)$ において任意の n に対し σ_n にホモローグである。

整数の集合 $\mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ を3つの部分に分ける。

(4.12) $\mathbb{Z}_0 = \{ s \mid s \in \mathbb{Z},\ p \nmid s(s+1) \}$, $\mathbb{Z}_1 = \{ sp-1 \mid s \in \mathbb{Z},\ p \nmid s \}$

$\mathbb{Z}_2 = \{ sp^2 - 1 \mid s \in \mathbb{Z} \}$

また、$\mathbb{Z} - \{0\}$ を次の3つに分ける。

(4.13) $\mathbb{Z}(i) = \{ m \mid m = sp^n,\ n \geqq 0,\ s \in \mathbb{Z}_i \}$ $(i = 0, 1, 2)$

$m \in \mathbb{Z}(0) \cup \mathbb{Z}(2)$ に対し $\Omega_\Gamma^1 A$ の生成元 $y_m = v_2^m t_1 + v_1 \bar{y}_m$ を導入する。y_m は

(4.14) $d_1(y_m) \equiv -s_m v_1^{A(m)} v_2^{e(m)} g_1 \mod (p, v_1^{A(m)+1})$

を満たす[16]に定義されているものである。ここで $m = sp^n$, $p \nmid s$ に対して s_m は次のものに等しい。

(4.15) $s_m = \binom{s+1}{2}$ $(n=0,\ m \in \mathbb{Z}(0))$, $=1$ $(n=0,\ m \in \mathbb{Z}(2))$

$= \frac{(-1)^n}{2} \binom{s+1}{2}$ $(n>0,\ m \in \mathbb{Z}(0))$, $= \frac{(-1)^n}{4}$ $(n>0,\ m \in \mathbb{Z}(2))$

$m=sp^n$, $p\nmid s$ に対して次のように整数$e(m)$, $A(m)$を定義する。

(4.16)
$$e(m)=\begin{cases} m-(p^n-1)/(p-1) & (m\in \mathbb{Z}(0)) \\ m-p^n(p-1)-(p^n-1)/(p-1) & (m\in \mathbb{Z}(2)) \end{cases}$$

(4.17) $A(m)=A_n+2$ $(m=sp^n,\ m\in\mathbb{Z}(0))$, $=A_n'+2$ $(m=sp^n,\ m\in\mathbb{Z}(2))$

$=\infty$ $(m=0)$

$m\in\mathbb{Z}(0)\cup\mathbb{Z}(2)$に対し$y_m$を$y_m\equiv v_2^m t_1 \mod (p, v_1)$かつ$y_m/v_1^j$ $(j\leqq A(m))$がコサイクルとなるものとして与える([16])。またVを次で定義する。

(4.18) $pv_1V=v_2^p+v_1^p t_1^{p^2}-v_1^{p^2}t_1^p-(v_2+v_1t_1^p-v_1^pt_1)^p$

$n\geqq 0$に対しては[14]で導入された$\Omega^0 A/(p, v_1^{a_n})$のコサイクル$G_n$がある。これは次を満たすものである。

(4.19) $G_0\equiv g_0$, $G_n\equiv v_2^{-(p^{n-1}-1)/(p-1)}g_1 \mod (p, v_1)$ $n>0$

いくつかの記号を準備しておく。

$k(1)_*=F_p[v_1]$, $K(1)_*=v_1^{-1}k(1)_*=F_p[v_1, v_1^{-1}]$

$k(1)_*\{x/v_1^j \mid x\in\Lambda\}$: x/v_1^jによって生成された$k(1)_*/(v_1^j)$に同型である巡回$k(1)_*$加群の直和

$k(1)_*\{x/v_1^\infty \mid x\in\Lambda\}$: F_p基底$\{x/v_1^j \mid j>0\}$を持つ$K(1)_*/k(1)_*$に同型な加群の直和

次の$k(1)_*$加群を考える。

$X=k(1)_*\{x_n^s/v_1^{a_n} \mid n\geqq 0,\ s\in\mathbb{Z}-p\mathbb{Z}\}$

$X_\infty=k(1)_*\{1/v_1^\infty\}$

$$Y_0 = k(1)_*\{y_m/v_1^{A_n} \mid m \in \mathbb{Z}(0),\ n = \nu_p(m)\}$$

$$Y_1 = k(1)_*\{y_m/v_1^{A'_n} \mid m \in \mathbb{Z}(2),\ n = \nu_p(m)\}$$

$$Y = k(1)_*\{v_2^{tp}V/v_1^{p-1} \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

$$Y_\infty = k(1)_*\{t_1/v_1^\infty\}$$

$$G = k(1)_*\{x_n^s G_n/v_1^{a_n} \mid n \geqq 0,\ s+1 \in \mathbb{Z}-p\mathbb{Z}\}$$

このとき[6][16][14]において得られた$H^*M_1^1$の構造は次である。

(4.20) $H^*M_1^1 = (X \oplus X_\infty \oplus Y_0 \oplus Y_1 \oplus Y \oplus Y_\infty \oplus G) \otimes E(\zeta)$

§5. Cokerδ_0

この節では短完全列 $0 \to M_0^2 \to M_1^1 \xrightarrow{p} M_1^1 \to 0$ に関する連結準同型 $\delta_0 : H^0M_0^2 \to H^1M_1^1$ について考える。δ_0の像は[6, 命題6.9]において与えられている。まず結果を$H^1M_1^1$の基底を用いてもう1度書き出しておく。

補題 5.1　連結準同型 $\delta_0 : H^0M_0^2 \to H^1M_1^1$ は $0 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq m \leqq a_{k-i}$ であり、$s \in \mathbb{Z}-p\mathbb{Z}$, $j = mp^i$ において、生成元 $x_{i+k}^s/p^{i+1}v_1^j$ を次のものに移す。

$$-y_s/v_1^2 + (s-1)v_2^s\zeta/2v_1 \qquad k=0$$

$$-my_{sp^{i+1}}/v_1^{j+1} - mx_{i+1}^s\zeta/2v_1^j - sv_2^{sp^{i+1}-p}V/v_1^{j-1} + \cdots \qquad k=1$$

$$-my_{sp^{i+2}}/v_1^{j+1} - mx_{i+2}^s\zeta/2v_1^j + sy_{sp^{i+2}-1}/v_1^{j-p} + sv_2^{sp^{i+2}-p-1}V/v_1^{j-p-2} + \cdots \qquad k=2$$

$$-my_{sp^{i+k}}/v_1^{j+1} - mx_{i+k}^s\zeta/2v_1^j + 2sy_{(sp^{i+2}-1)p^{k-2}}/v_1^{j-a_{k-1}} + \cdots \qquad k>2$$

これと[6]に与えられている$H^0M_0^2$の構造、(4.20)にある$H^1M_1^1$の

の構造より次の $\mathrm{Coker}\,\delta_0$ に関する命題5.6を得る。そのために次の記号を用意する。

$$\mathbb{Z}_{(p)}\{x/p^iU_1^j \mid x\in\Lambda,\ j\in J,\ i\in I\}$$

これは生成元 $x/p^iU_1^j$ $(x\in\Lambda,\ j\in J,\ i\in I)$ によって生成される $\mathbb{Z}/(p^i)$ に同型な巡回 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 加群の直和を意味している。

(5.2) $X^\infty = \mathbb{Z}_{(p)}\{x_n^s/p^{i+1}U_1^j \mid n\geqq 0,\ s\in\mathbb{Z}-p\mathbb{Z},\ i\geqq 0,\ j\geqq 1,$

$p^i|j\leqq a_{n-i}$ かつ $p^{i+1}\nmid j$ 又は $a_{n-i-1}<j\}$

$X^\infty_\infty = \mathbb{Z}_{(p)}\{1/p^{i+1}U_1^j \mid i=\nu_p(j)\geqq 0\}$

これらの記号のもと

(5.3) [6, 定理6.1] $H^0M_0^2 = X^\infty\oplus X^\infty_\infty$

である。また(4.20)より

(5.4) $H^1M_1^1 = (X\oplus X_\infty)\otimes\mathbb{Z}/p\{\zeta\}\oplus Y_0\oplus Y_1\oplus Y_\infty\oplus Y$

である。さらに $\mathbb{Z}(2)$ の部分集合を

(5.5) $\mathbb{Z}_2^i = \{tp^{i+2}-1 \mid t\in\mathbb{Z}-p\mathbb{Z}\}$

と定義する。但し i は非負整数。このとき $\bigcup_i\mathbb{Z}_2^i=\mathbb{Z}_2$ であり $\mathbb{Z}_2^i\cap\mathbb{Z}_2^j=\phi$ $(i\neq j)$ である。

命題5.6 $\delta_0: H^0M_0^2\longrightarrow H^1M_1^1$ の余核は次のコサイクルで代表される基によってはられるベクトル空間である。

I) t_1/U_1, ζ/U_1^j $(j\geqq 1)$

II) y_{sp^n}/U_1^j : $s\in\mathbb{Z}_0\cup\mathbb{Z}_2$, $n\geqq 0$, $j\leqq A(sp^n)$

$p^i|j-1$ ならば $j=1$ 又は $j-1>a_{n-i}$

但し $s\in\mathbb{Z}_2^k$ ならば $p^{k+1}\nmid j+a_{n+1}$ 又は $j>a_{n+2}-a_{n+1}$ である。

III) $x_n^s\xi/U_1^j$: $s\in\mathbb{Z}-p\mathbb{Z}$, $n\geqq 0$, $1\leqq j\leqq a_n$,

$s\in\mathbb{Z}$ 又は $s\in\mathbb{Z}_2^k$ かつ $p^{k+1}|j$ に対し $p^\ell|j$ ならば $j>a_{n-\ell}$

IV) $U_2^{sp}V/U_1^j$: $s\in\mathbb{Z}$, $1\leqq j\leqq p-1$, $j=p-1$ ならば $p|s+1$

§6. δ_1 の計算

$H^tM_1^1$ の元の δ_1 像の計算をしなければならない。x/U_1^j は命題5.6で与えられた $\delta_{t-1}: H^{t-1}M_0^2\longrightarrow H^tM_1^1$ の余核の元の1つとする。このとき $x(j,1)=x/pU_1^j$ は $H^tM_0^2$ の零ではない生成元である。帰納的に、$px(j,\ell)=x(j,\ell-1)$ となるような零ではない生成元 $x(j,\ell)\in H^tM_0^2$ が存在するとする。$\delta_t(x(j,\ell))=0$ ならば、$d_t(x(j,\ell)/p)=d_t(\rho)$ となるようなコチェイン ρ が存在する。$x(j,\ell+1)=x(j,\ell)/p-\rho$ とおくと、$x(j,\ell+1)$ はコサイクルであり、$px(j,\ell+1)=x(j,\ell)$ であることがわかる。このようにして、$\delta_t(x(j,i))\neq 0$ となるような整数 i(無限も含む)を持つまでこのことを行う。そうすればそれぞれの余核の元 x/U_1^j に対しそのような整数 i がみつかる。

まず(4.20)の X の生成元について考える。但し $x_n^s\xi\otimes\xi/U_1^j$ は $j\leqq a_n$ のとき $-\frac{1}{2}x_n^s\xi^2/U_1^j$ によってバウンドされることに注意する。

補題5.7と

(6.1) $x \in H^{t-1}M_0^2$, $\delta_t : H^tM_0^2 \to H^{t+1}M_1^1$ に対し

$$\delta_t(x \otimes \zeta) = \delta_{t-1}(x) \otimes \zeta$$

が言えることにより、

命題 6.2 連結準同型 $\delta_1 : H^1M_0^2 \to H^2M_1^1$ は、生成元 $x_{i+k}^s\zeta(j, i+1) = x_{i+k}^s\zeta/p^{i+1}v_1^j$ を次のものに移す。但し $s \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$, $0 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq m \leqq a_{k-i}$, $j = mp^i$ である。

$$-y_s \otimes \zeta/v_1^2 \qquad k=0$$

$$-my_{sp^{i+1}} \otimes \zeta/v_1^{j+1} - sv_2^{sp^{i+1}-p}V \otimes \zeta/v_1^{j-1} + \cdots \qquad k=1$$

$$-my_{sp^{i+2}} \otimes \zeta/v_1^{j+1} + sy_{sp^{i+2}-1} \otimes \zeta/v_1^{j-p} + sv_2^{sp^{i+2}-p-1}V \otimes \zeta/v_1^{j-p-2} + \cdots \qquad k=2$$

$$-my_{sp^{i+k}} \otimes \zeta/v_1^{j+1} + 2sy_{(sp^{i+2}-1)p^{k-2}} \otimes \zeta/v_1^{j-a_{k-1}} + \cdots \qquad k>2$$

次に(4.20)の Y にある生成元について考える。§3の結果より

命題 6.3 それぞれの整数 t に対しコサイクル

$$y'_{tp}(j,1) = v_2^{tp}V/pv_1^j, \quad y'_{tp}(p-1,2) = v_2^{tp}V/p^2v_1^{p-1} - \frac{1}{2}v_2^{(t-1)p+1}t_1^{2p^2}/p^2v_1$$

があり

$$\delta_1(y'_{tp}(j,1)) = \frac{j+1}{2}(x_1^{t+1}G_1/v_1^j + v_2^{tp}V \otimes \zeta/v_1^j) + \cdots$$

$$\delta_1(y'_{tp}(p-1,2)) = \frac{1}{2}(x_1^{t+1}G_1/v_1^{p-1} + v_2^{tp}V \otimes \zeta/v_1^{p-1}) + \cdots$$

である。

$j=0$ の場合次のようになる。

命題 6.4 ([17, 命題4.4]) $n \geqq 0$, $p \nmid s$ となる $sp^n \in \mathbb{Z}(0) \cup \mathbb{Z}(2)$ に対し次を満たすコサイクル $y_{sp^n}(1, n+1)$ がある。

$$\delta_1(y_{sp^n}(1, n+1)) = \frac{s}{2}(x_0^{sp^n} G_0/v_1 - y_{sp^n} \otimes \zeta/v_1)$$

命題 6.5　s, n, i, k は $s \in \mathbb{Z}_0$, $k \geqq 1$, $n \geqq i \geqq 0$, $kp^i < A_{n-i}+2$ である整数とし、$m = sp^n$ とおく。このとき $0 \leqq \ell \leqq i+1$ に対し $y_m(kp^i+1, \ell)$ はコサイクルであり、この δ_1 像は $\ell \leqq i$ では $\delta_1(y_m(kp^i+1, \ell)) = 0$ であり、

$$\delta_1(y_m(kp^i+1, i+1)) = \frac{k}{2} y_m \otimes \zeta/v_1^{kp^i+1} + s\lambda_n x_{n-i}^{sp^i} G_{n-i}/v_1^{kp^i - A_{n-i-1}-1}$$

$$\left(-\frac{ks}{2}\lambda_n x_n^s G_n/v_1^{k-A_{n-1}-1}\ i=0\ \text{ならば}\right) + \cdots$$

ここで $\lambda_n = \frac{(-1)^n}{4}$ $(n>1)$, $= -\frac{1}{2}$ $(n=1)$ である。そして…部分は $v_1^{k-2p^{n-1}}$ 倍で消える部分である。

これはまた、$m \in \mathbb{Z}(2)$, $i=0$, $p \nmid k < A'_n+2$ $(n = \nu_p(m))$ の場合にも成り立つ。

命題 6.6　t, j は $1 \leqq j \leqq p^2+1$ となる整数とする。このとき $1 \leqq \ell \leqq i+1$ に対し次のようになるコサイクル $y_{tp^2-1}(j, \ell)$ が存在する。

$$\delta_1(y_{tp^2-1}(j, 1)) = \frac{j}{2} y_{tp^2-1} \otimes \zeta/v_1^j + \cdots$$

$$\delta_1(y_{tp^2-1}(kp, 2)) = \frac{k+1}{2} y_{tp^2-1} \otimes \zeta/v_1^{kp}$$

$$\delta_1(y_{tp^2-1}(p^2-p, 3)) = \frac{1}{2} y_{tp^2-1} \otimes \zeta/v_1^{p^2-p}$$

命題 6.7　$t, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ に対する整数 $m = (tp^2-1)p^n \in \mathbb{Z}(2)$ について考える。i, k が $kp^i < p^{n+2} - p^n + A_{n-i+1} + 2$ となる正整数ならば、$0 \leqq \ell \leqq i$ に対し $y_m(kp^i+1, \ell)$ はコサイクルであり、この δ_1 像は $\ell < i$ では $\delta_1(y_m(kp^i+1, \ell)) = 0$ によって与えられる。

そして

$$\delta_1(y_m(kp^i+1,i)) = -2\lambda_n x_{n-i+1}^{(tp-1)p^i} G_{n-i+1}/v_1^{kp^i-p^{n+2}+p^n-A_{n-i}-1} + \cdots$$

さらに $kp^i \leqq p^{n+2}-p^n$ ならば次のようなコサイクルを得る。

$$\delta_1(y_m(kp^i+1,i+1)) = (k+p^{n-i})y_m \otimes \zeta/2v_1^{kp^i+1} + \cdots$$

$$\delta_1(y_m(kp^{n+1}-p^n+1,n+2)) = (k+1)y_m \otimes \zeta/2v_1^{kp^{n+1}-p^n+1} + \cdots$$

$$\delta_1(y_m(p^{n+2}-p^{n+1}-p^n+1,n+3)) = y_m \otimes \zeta/2v_1^{p^{n+2}-p^{n+1}-p^n+1}$$

… 部分は v_1 の指数の小さい部分である。

§7. $H^1M_0^2$

補題4.3を§6の結果と合わせて適用すれば、§2の記号を用いると

定理7.1　$H^1M_0^2$ は次と同型である $\mathbb{Z}_{(p)}$ 加群である。

(7.2)　$Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty \oplus Y_c^\infty \oplus Y_{\infty,c}^\infty \oplus X\zeta_c^\infty \oplus X_c^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\{\zeta\}$

が得られる。

§8. $H^2M_0^2$

連結準同型 $\delta_2 : H^2M_0^2 \to H^3M_1^1$ の計算を行う。

命題8.1 ([17, 命題4.1, 4.3])

$$\delta_2(x_1^sG_1/pv_1^j) = -\frac{j+1}{2}x_1^sG_1 \otimes \zeta/v_1^j$$

$$\delta_2(x_1^sG_1/p^2v_1^{p-1}) = -\frac{1}{2}x_1^sG_1 \otimes \zeta/v_1^{p-1}$$

補題8.2　$x_n^sG_n(j,l)$ がコサイクルであり，

$kp^i = j + A_{n-1} + 1 \leqq A_n + 1$, $l \leqq i+1$ とする。このとき

$$\delta_2(x_n^s G_n(j,l)) = \lambda x_n^s G_n \otimes \zeta / v_1^j$$

これを用いれば、[17, 命題4.1] の一般化は次のようになる。

命題8.3　n, s, i, j は $n > 1$, $i \geqq 0$, $j, k > 0$, $p \nmid s+1$, $j \leqq a_n$, $kp^i = j + A_{n-1} + 1$ となる整数とする。このとき $0 < l \leqq i+1$ に対し $x_n^s G_n(j,l)$ はコサイクルであり

$$\delta_2(x_n^s G_n(j, i+1)) = -\frac{s}{2} x_n^s G_n \otimes \zeta / v_1^j$$

である。

また、[17, 命題4.4, 補題4.5] を用いることにより次の命題と系が示せる。

命題8.4　$p \nmid s(s+1)$ となる整数 s, n に対し

$$\delta_2(x_0^{sp^n} G_0 / p^{n+1} v_1) = \frac{s}{2} x_0^{sp^n} G_0 \otimes \zeta / v_1$$

である。

系8.5　任意の $j > 0$ に対し

$$\delta_2(G_0 / p^j v_1) = 0$$

である。

これらのことを補題4.3に適用して、§2の記号を用いると次が得られる。

定理8.6　$H^2 M_0^2 = Y\zeta_c^\infty \oplus G_c^\infty \oplus (Y_{\infty,c}^\infty \otimes Z_{(p)}\{\zeta\}) \oplus G_0^\infty$

δ_2 は $Y\zeta_c^\infty$ を $G_I \otimes Z_{(p)}\{\zeta\}$ と同型にしこのことは(6.1)命題6.5, 6.7より得られるが、G_c^∞ は $(G_c - \{G_0/v_1\}) \otimes Z/p\{\zeta\}$ に移す。

一方 $\delta_2(Y_\infty^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\{\zeta\})=0$ である。従って

補題 8.7　δ_2 の余核は $G_0\otimes\zeta/v_1$ によって生成される部分加群である。

補題 4.3 を用いることで、この補題と系 8.5 の系として次を得る。

定理 8.8　加群 $H^3M_0^2$ は $G_0\otimes\zeta/p^jv_1$ によって生成される $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$ に同型である。

以上を要約して次を得る。

定理 8.9　加群 $H^*M_0^2$ は次と同型である。

$$(X_\infty^\infty \oplus Y_{\infty,c}^\infty \oplus G_0^\infty)\otimes E(\zeta)\oplus X^\infty \oplus X\zeta_c^\infty \oplus Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty \oplus Y_c^\infty \oplus G^\infty$$

ここで　$G^\infty = G_c^\infty \oplus Y\zeta^\infty$　である。

$Y\zeta_c$ が G_1 に同型であることに注意すれば記号 G^∞ は妥当である。

§9. $\pi_*(L_2S^0)$

球面 S^0 の Bousfield 局所化のホモトピー群 $\pi_*(L_2S^0)$ に収束する E(2)-Adams-Novikov スペクトル系列について考える。([1], [2], cf. [10])。このときスペクトル系列の E_2 項は

$$H^{s,t}A = \mathrm{Ext}_\Gamma^{s,t}(A, A)$$

である。ここで (A,Γ) はスペクトラム E(2) に関するホップ擬代数 $(E(2)_*, E(2)_*(E(2)))$ を意味している。長完全列 (4.2) があ

る。

$$0 \to H^0N_0^0 \to H^0M_0^0 \to H^0N_0^1 \xrightarrow{\delta_0'} H^1N_0^0 \to \cdots$$
$$\to H^tN_0^0 \to H^tM_0^0 \to H^tN_0^1 \xrightarrow{\delta_t'} H^{t+1}N_0^0 \to \cdots$$
$$0 \to H^0N_0^1 \to H^0M_0^1 \to H^0M_0^2 \xrightarrow{\delta_0} H^1N_0^1 \to \cdots$$
$$\to H^tN_0^1 \to H^tM_0^1 \to H^tM_0^2 \xrightarrow{\delta_t} H^{t+1}N_0^1 \to \cdots$$

これらの長完全列において、$H^*N_0^0 = H^*A$, 加群 $H^*M_0^0$, $H^*M_0^1$, $H^*M_0^2$ はわかっている。$t>1$ に対し $H^tM_0^1=0$ なので $\delta_t : H^tM_0^2 \to H^{t+1}N_0^1$ は $t>1$ に対し同型であり $t=1$ では全射である。δ_1 の核は (4.5) より $H^1M_0^1 = Y^{\infty}_{\infty,c}$ なので $Y^{\infty}_{\infty,c}$ である。さらに上列における写像 $H^1M_0^1 \to H^1M_0^2$ は単射となり次の完全列を得る。

$$0 \to H^0N_0^1 \to H^0M_0^1 \xrightarrow{f} H^0M_0^2 \xrightarrow{\delta_0} H^1N_0^1 \to 0$$
$$0 \to H^1M_0^1 \to H^1M_0^2 \xrightarrow{\delta_1} H^2N_0^1 \to 0$$

(4.5)と定理8.9より

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{Z}_{(p)}\{v_1^{sp^i}/p^{i+1} \mid i \geqq 0,\ s \geqq 0,\ p \nmid s\} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$$
$$\mathrm{Im}\, f = X^{\infty}_{\infty}$$

である。さらに $H^tM_0^0 = 0$ $(t>0)$, $= \mathbb{Q}$ （内部次数 $t=0$）

従って次を得る。

定理 9.1　$\pi_*(L_2S^0)$ に対する Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 項 E_2^s は

(0)　$E_2^0 \cong \mathbb{Z}_{(p)}$

(1) $E_2^1 \cong \mathbb{Z}_{(p)}\{v_1^{sp^i}/p^{i+1} \mid i \geqq 0,\ s \geqq 0,\ p \nmid s\}$

(2) $E_2^2 \cong X^\infty$

(3) $E_2^3 \cong Y_{0,c}^\infty \oplus Y_{1,c}^\infty \oplus Y_c^\infty \oplus X\zeta_c^\infty \oplus (X_\infty^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\{\zeta\})$

(4) $E_2^4 \cong Y\zeta_c^\infty \oplus G_c^\infty \oplus (Y_{\infty,c}^\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\{\zeta\}) \oplus G_0^\infty$

(5) $E_2^5 \cong G_0^\infty \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$

(6) $E_2^t = 0 \quad (t > 5)$

である。

素数 p は3より大きいので、$\pi_*(L_2S^0)$ に対する Adams-Novikov スペクトル系列は E_2 項からつぶれる。だから定理 9.1 はホモトピー群の構造を与える。

参考文献

[1] J. F. Adams, *Stable homotopy and generalised homology*, University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[2] A. K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, *Topology* **18** (1979), 257–281.

[3] M. Hikida and K. Shimomura, An exact sequence related to Adams-Novikov E_2-terms of a cofibering, to appear.

[4] P. S. Landweber, Associated prime ideals and Hopf algebras, *J. Pure and Applied Algebra,* **3** (1973), 175–179.

[5] H. R. Miller and D. C. Ravenel, Morava Stabilizer Algebras and the localization of Novikov's E_2-term. *Duke Math. J.* **44** (1977), 433–447.

[6] H.R. Miller, D. C. Ravenel, and W. S. Wilson, Periodic phenomena in Adams-Novikov spectral sequence, *Ann. of Math.* **106** (1977), 469–516.

[7] D. G. Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, *Bull. A.M.S.* **75** (1969), 1293–1298.

[8] D. C. Ravenel, The structure of BP_*BP modulo an invariant prime ideal, *Topology* **15** (1976), 149–153.

[9] D. C. Ravenel, The cohomology of the Morava stabilizer algebras, *Math. Z.* **152** (1977), 287–297.

[10] D. C. Ravenel, Localization with respect to certain periodic homology theories, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 351–414.

[11] D. C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, Academic Press, 1986.

[12] D. C. Ravenel, The geometric realization of the chromatic resolution, In W. Browder, editor, *Algebraic topology and algebraic K-theory,* 1987, 168–179.

[13] D. C. Ravenel, *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory,* Ann. of Math. Studies 128, Princeton Univ. Press, 1992.

[14] K. Shimomura, On the Adams-Novikov spectral sequence and products of β-elements, *Hiroshima Math. J.* **16** (1986), 209–224.

[15] K. Shimomura, Non-triviality of some products of β-elements in the stable homotopy of spheres, *Hiroshima Math. J.* **17** (1987), 349–353.

[16] K. Shimomura and H. Tamura, Non-triviality of some compositions of β-elements in the stable homotopy of the Moore spaces, *Hiroshima Math. J.* **16** (1986), 121–133.

[17] K. Shimomura and A. Yabe, On the chromatic E_1-term $H^*M_0^2$, to appear in Proceedings of the Northwestern Conference on Group Cohomology and its applications, 1992.