数理解析研究所講究録
第 838 巻 1993 年 88-97

On elliptic cohomology of finite groups and p-adic Thompson series

京大理　田辺　理正　(Michimasa Tanabe)

Elliptic cohomology と Moonshine との間に何らかの関係があるということが Morava 等により指摘されているが，現在までのところ両者の関係を明確に述べた結果は現われていないようである。ここでは有限群の分類空間に対して Miller の elliptic character を考察することにより，elliptic cohomology と Moonshine との関係の一面を示唆すると思われる結果を述べることにする。

1. Elliptic cohomology と elliptic character

elliptic cohomology 及び elliptic character について簡単な復習をする。(楕円曲線及び保型形式については [10], [11] を参照。)

まず elliptic cohomology の定義から始める。

(1.1) $$Ell^* = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{6}][g_2, g_3, \Delta^{-1}], \ \Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

を $|g_2|=-8$, $|g_3|=-12$ なる次数付き環とし，Ell^* 上の形式群 F_{Ell} を次のように定義する。

E を $y^2=4x^3-ax-b$ $(a,b\in\mathbb{C},\ a^3-27b^2\neq 0)$ で定義される $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線とし，$E(\mathbb{C})=\{[x,y,z]\mid y^2z=4x^3-axz^2-bz^3\}\subset\mathbb{C}P^2$ とする。この時 $E(\mathbb{C})$ は1次元複素 Lie 群で $E(\mathbb{C})\ni[x,y,z]\ (y\neq 0)\longmapsto -\frac{2x}{y}\in\mathbb{C}$ を単位元での局所座標に用いることにより得られる $\mathbb{C}$ 上の形式群を $\hat{E}$ とする。$\varphi_E : Ell^*\to\mathbb{C}$ を $\varphi_E(g_2)=a$, $\varphi_E(g_3)=b$ なる環準同型とすると，Ell^* 上の形式群 F_{Ell} で $\varphi_{E*}F_{Ell}=\hat{E}$ が任意の楕円曲線 $E: y^2=4x^3-ax-b$ に対して成立するものが一意に存在することがわかる。

MU^* を複素 cobordism 環とすると Quillen の定理により F_{Ell} は環準同型 $MU^*\to Ell^*$ を定めるが，これにより Ell^* に MU^* 加群の構造を入れることができる。そこで有限 CW 複体の圏 $\mathcal{CW}^f$ から次数付き Ell^* 代数の圏 $\mathcal{A}_{Ell^*}$ への反変関手を

$$(1.2)\qquad \mathcal{CW}^f\ni X\longmapsto Ell^*(X):=MU^*(X)\otimes_{MU^*}Ell^*\in\mathcal{A}_{Ell^*}$$

で定義すると，Landweber の完全関手定理により次を得る。

定理1.3 ([5],[2]) $Ell^*(\cdot)$ は $\mathcal{CW}^f$ 上の cohomology 論になる。

次に elliptic character を定義する。

$$(1.4)\qquad E_{2n}(q) = 1 - \frac{4n}{B_{2n}} \sum_{k \geq 1} \sigma_{2n-1}(k) q^k$$

を正規化されたEisenstein級数とする。（ただし $z/(e^z-1) = 1 - z/2 + \sum_{k\geq 1} B_{2k} z^{2k}/(2k)!$，$\sigma_n(k) = \sum_{d|k} d^n$.）この時 $E_4(q), E_6(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$ で，さらに $\Delta(q) = E_4(q)^3 - 27E_6(q)^2 = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$ が成立する。

$q \in \mathbb{C}$，$0<|q|<1$ に対し，$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 T_q を方程式 $y^2 = 4x^3 - \frac{1}{12}E_4(q)x + \frac{1}{216}E_6(q)$ で定義されるものとすると，複素 Lie 群の間の同型 $\rho_q^T : \mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cong} T_q(\mathbb{C})$ が $\rho_q^T([u]) = [\varphi(u,q), \psi(u,q), 1]$ $(u \notin q^{\mathbb{Z}})$，$[0,1,0]$ $(u \in q^{\mathbb{Z}})$ で与えられる。ただし

$$(1.5)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u,q) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n u}{(1-q^n u)^2} + \frac{1}{12} - 2\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{(1-q^n)^2} \\ \psi(u,q) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n u(1+q^n u)}{(1-q^n u)^3} \end{aligned} \right. \qquad \in \mathbb{Z}[[u,q]]$$

とする。

$\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$ から $\mathbb{C} \ni u\ (\neq -1) \mapsto [1+u] \in \mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$ を局所座標に用いて得られる形式群は $\widehat{G}_m$ $(X +_{\widehat{G}_m} Y = X+Y+XY)$ であるから，ρ_q^T は $\mathbb{C}$ 上の形式群の間の strict 同型 $\theta_q : \widehat{G}_m \xrightarrow{\cong} \widehat{T}_q = \varphi_{T_q *}F_{Ell}$ を与える。ここで q を形式的変数とみなすことにより $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]((q))$ 上定義さ

れた形式群の間のstrict同型 $\theta : \hat{G}_m \xrightarrow{\cong} \lambda_* F_{Ell}$ を得る。ただし $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]((q)) = \{\sum_{n \gg -\infty} a_n q^n \mid a_n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]\}$ でλは環準同型

(1.6) $$\lambda : Ell^* \longrightarrow \mathbb{Z}[\tfrac{1}{6}]((q)),\ \lambda(g_2) = \frac{1}{12}E_4(q),\ \lambda(g_3) = -\frac{1}{216}E_6(q)$$

とする。(このλにより Ell^* と $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ 上定義された $SL_2(\mathbb{Z})$ に対する(有理型)保型形式の環 $M_*^{\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]}(SL_2(\mathbb{Z}))$ とを同一視することができる。)またstrict同型 $\theta(X) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]((q))[[X]]$ は

(1.7) $$\theta(X) = -2\frac{\varphi(1+X, q)}{\psi(1+X, q)}$$

で与えられる。従ってLandweber−Novikov作用素の理論により次を得る。

定理1.8([7]) $\mathcal{CW}^f$ 上のcohomology論の間の自然変換

$$\lambda(X) : Ell^*(X) \longrightarrow K^*(X)[\tfrac{1}{6}]((q))$$

で

(i) $$\lambda(pt) = \lambda : Ell^* \longrightarrow \mathbb{Z}[\tfrac{1}{6}]((q))$$

(ii) $$\lambda(\mathbb{C}P^\infty) = \varprojlim_n \lambda(\mathbb{C}P^n) : Ell^*(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow K^*(\mathbb{C}P^\infty)[\tfrac{1}{6}]((q))$$

に対し $\lambda(\mathbb{C}P^\infty)(x^{Ell})=\theta(x^K)$

なるものが一意に存在する。ただし $K^*(X)$ は $\mathbb{Z}/2$-graded 複素 K 理論とし，x^{Ell} 及び x^K はそれぞれ F_{Ell} 及び $\hat{G}_m$ を与える complex orientation とする。

2. 有限群の elliptic character と Thompson 級数

G を有限群，BG をその分類空間とする。

$$(2.1) \qquad \lambda(BG): Ell^*(BG) \longrightarrow K^*(BG)[\tfrac{1}{6}]((q))$$

を合成 $Ell^*(BG) \to \varprojlim_\alpha Ell^*(BG_\alpha) \xrightarrow{\varprojlim \lambda(BG_\alpha)} \varprojlim_\alpha K^*(BG_\alpha)[\tfrac{1}{6}]((q)) \xleftarrow{\cong} K^*(BG)[\tfrac{1}{6}]((q))$ で定義する。（ただし $\{BG_\alpha\}$ は BG の有限部分複体の集合とする。）$R(G)$ を G の複素表現環，$I(G)$ を virtual 次元 0 の virtual 表現で生成される $R(G)$ の ideal とする。$\hat{R}(G)=\varprojlim_i R(G)/I(G)^i$ とし，また素数 p に対して $R_p(G)=\varprojlim_i \hat{R}(G)/(p)^i$ とする。この時 Atiyah の定理([1])より G に関して自然な同型 $\hat{R}(G) \xrightarrow{\cong} K^*(BG)$ が存在するから

$$(2.2) \qquad \lambda_p(G): Ell^*(BG) \longrightarrow R_p(G)((q))$$

を合成 $Ell^*(BG) \xrightarrow{\lambda(BG)} K^*(BG)[\frac{1}{6}]((q)) \xleftarrow[\cong]{} \hat{R}(G)[\frac{1}{6}]((q)) \longrightarrow R_p(G)((q))$ で定義することができる。（ただし $p \geq 5$ とする。）

$Cl(G) = Map_G(G, \mathbb{C}) = G$ から $\mathbb{C}$ への類関数全体とする。$\chi : R(G) \hookrightarrow Cl(G)$ を群指標とし，$a \in R(G)$, $g \in G$ に対し $\chi(a)(g) \in \mathbb{C}$ を $a(g)$ と略記することにする。

$f(q) = \sum a_n q^n \in \mathbb{C}((q))$ が $q = e^{2\pi i \tau}$ $(\tau \in H)$ とした時 τ の関数として $\Gamma_1(N)$ に対する保型形式になっている時，簡単のため $f(q)$ のことも $\Gamma_1(N)$ に対する保型形式と呼ぶことにする。ただし $\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a \equiv d \equiv 1, c \equiv 0 \bmod N \right\}$ とする。

定義 2.3　$f(q) = \sum a_n q^n \in R(G)((q))$ が Thompson 級数であるとは任意の $g \in G$ に対しある自然数 N_g が存在し，$f_g(q) = \sum a_n(g) q^n \in \mathbb{C}((q))$ が $\Gamma_1(N_g)$ に対する保型形式になっていることとする。

注意 2.4　この Thompson 級数の定義は Mason [6] の定義とは若干異なる。[6] では $\Gamma_1(N)$ ではなく $\Gamma_0(N)$ を用いている。

次に Thompson 級数の p 進化を考える。$G_p = \{g \in G \mid g$ の位数は p 巾$\}$ とし，$Cl_p(G) = Map_G(G_p, \mathbb{C}_p)$ とする。ただし $\mathbb{C}_p$ は p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の p 進距離 $|\;|_p$ に関する完備化とする。この時 χ の p 進化 $\chi_p : R_p(G) \hookrightarrow Cl_p(G)$ を構成することができる。（[4]

参照。) $a\in R_p(G)$, $g\in G_p$ に対して $\chi_p(a)(g)\in\mathbb{C}_p$ を $a(g)$ と略記する。

定義 2.5　$f(q)=\sum a_n q^n\in R_p(G)((q))$ が p 進 Thompson 級数であるとは任意の $g\in G_p$ に対し $f_g(q)=\sum a_n(g)q^n\in\mathbb{C}_p((q))$ が $\Gamma_1(N_g)$ に対する p 進保型形式になっていることとする。

ただし，ここでは $\Gamma_1(N)$ に対する p 進保型形式を Serre [9] の単純な一般化として次のように定義する。

定義 2.6　$f(q)=\sum a_n q^n\in\mathbb{C}_p((q))$ が $\Gamma_1(N)$ に対する重さ k の p 進保型形式であるとは，$\Gamma_1(N)$ に対する重さ k の保型形式の列 $f_m(q)=\sum_n a_{mn}q^n\in\mathbb{Q}[e^{2\pi i/N}]((q))$ $(m=1,2,\cdots)$ で $|f-f_m|_p:=\sup_n\{|a_n-a_{mn}|_p\}\to 0$ $(m\to\infty)$ を満たすものが存在することとする。

以上の定義のもと $\lambda_p(G):Ell^*(BG)\to R_p(G)((q))$ $(p\geq 5)$ に対して次の結果が成立する。

定理 2.7　任意の $x\in Ell^{2k}(BG)$ に対して $\lambda_p(G)(x)\in R_p(G)((q))$ は p 進 Thompson 級数で，さらに任意の $g\in G_p$ に対し $\lambda_p(G)(x)_g\in\mathbb{C}_p((q))$ は $\Gamma_1(|g|)$ に対する重さ $-k$ の p 進保型形式になっている。

ここではこれの証明を与えることはしないが，必要なことは初等関数論と簡単な計算だけである。また G が可換群の時は，$\lambda_p(G)$ の像についてより詳しい情報を得ることができるが，それについても述べないことにする。（詳細は [12] に書く予定。）

最後に，上の結果が示唆していると思われることについて簡単に述べる。

もし elliptic cohomology $Ell^*(X)$ 及び elliptic character $\lambda(X): Ell^*(X) \longrightarrow K^*(X)[\frac{1}{6}]((q))$ の同変化 $Ell_G^*(X)$ 及び

(2.8) $$\lambda_G(X): Ell_G^*(X) \longrightarrow K_G^*(X)[\tfrac{1}{6}]((q))$$

が存在して，しかも $\lambda_p(G): Ell^*(BG) \longrightarrow R_p(G)((q))$ を (2.8) において $X = pt$ として得られる環準同型 $\lambda_G(pt): Ell_G^*(pt) \longrightarrow K_G^*(pt)[\frac{1}{6}]((q)) = R(G)[\frac{1}{6}]((q))$ の "p 進化" と考えることができたとする。この時上の結果は $\lambda_G(pt)$ の像が Thompson 級数からなることを示唆していると思われる。このことは Moonshine を同変 elliptic cohomology の問題として捉え得るということを示しているように思われ，また Segal [8], Brylinski [3] 等による string 理論との関連において elliptic cohomology の幾何的解釈を得ようという試にもうまく適合しているように見える。

参考文献

[1] M. Atiyah : Characters and cohomology of finite groups, Publ. Math. IHES 9 (1961), 23–64.

[2] A. Baker : Hecke operators as operations in elliptic cohomology, J. Pure Appl. Alg. 63 (1990), 1–11.

[3] J-L. Brylinski : Representations of loop groups, Dirac operators on loop space, and modular forms, Topology 29 (1990), 461–480.

[4] M. Hopkins : Characters and elliptic cohomology, Lect. Note Series 139, London Math. Soc. (1989), 87–104.

[5] P. Landweber, D. Ravenel, R. Stong : Periodic cohomology theories defined by elliptic curves. (to appear)

[6] G. Mason : Finite groups and modular functions, Proc. Symp. in Pure Math. 47 (Part I), AMS (1987), 181–210.

[7] H. Miller : The elliptic character and the Witten genus, Contemp. Math. 96 (1989), 281–289.

[8] G. Segal : Elliptic cohomology, Seminaire Bourbaki 695 (1988), 187–201.

[9] J-P. Serre : Formes modulaires et fonctions zeta p-adiques, in Modular functions of one variable III, Lect. Notes in Math. 350, Springer, 1973, 191–268.

[10] G. Shimura : Introduction to the arithmetic theory of automorphic fun-

ctions, Princeton Univ. Press, 1971.

[11] J. Silverman: The arithmetic of elliptic curves, GTM106, Springer, 1986.

[12] M. Tanabe : On elliptic cohomology of finite groups and p-adic modular forms. (in preparation)