数理解析研究所講究録
第 838 巻 1993 年 98-109

Cohomology of Coxeter groups

阪大・理　秋田利之　(Toshiyuki Akita)

1. v.c.d. 有限の群

一般にtorsionをもつ離散群の分類空間のコホモロジーを具体的に計算するのはたいへん難しい。amalgamated free product groupなどの簡単な場合を除けば、具体的な計算はSoulé(1978)による$SL(3,\mathbb{Z})$の場合などが挙げられるが数は多くない。

本稿で取り上げるCoxeter群もtorsionをもつ離散群の一つである。Coxeter群の分類空間のコホモロジーは過去に幾つかの研究があり、$SL(n,\mathbb{Z})$などの数論的群以外ではかなり研究されている方だろう。Coxeter群の定義はあとで述べることにして先にv.c.d.(virtual cohomological dimension)有限という概念について説明する。

群Gのコホモロジー次元cdGを

$$cdG = \max\{n \geq 0 \mid H^n(G,M) \neq 0,\ M:\text{勝手な}G\text{加群}\}$$

と定義する。これはEilenberg-Ganeaの定理によって，K(G,1)-複体の取り得る最小次元とほとんど等しい（cd G=2のとき2次元のK(G,1)-複体が存在するか否かが未解決）。v.c.d.有限とは，有限指数でコホモロジー次元が有限の部分群が存在することである。群Gがv.c.d.有限であることと，次の幾何学的な条件は同値である（Serre, 1971）。

(i) Gは有限指数のtorsion freeな部分群をもつ。
(ii) 可縮なG-CW複体Xで，各胞体の固定部分群の位数が有限であるようなものが存在する。

明らかに有限群はv.c.d.有限である。Coxeter群がv.c.d.有限であることはSerre（1971）により示されており，これがCoxeter群の分類空間のコホモロジーに関する最初の結果の一つでもある。また種々の数論的群もv.c.d.有限であることが知られている。

torsionをもつ離散群の分類空間のコホモロジーを考えるとき，v.c.d.有限の群が比較的扱いやすいクラスだと考えられている。その理由のひとつは以下のQuillen（1971）の定理が成り立つことである。

定理（Quillen, 1971）　Gをv.c.d.有限の群，pを素数とし，$\mathcal{E}$を圏で，その対象はGのelementary abelian p-subgroup，射は射入とconjugationからなるものとする。そのとき自然な環準同型

$$\rho : H^*(BG.\mathbb{Z}/p) \to \mathrm{lim.inv.}\ H^*(BE, \mathbb{Z}/p)$$

は次の条件をみたす。

(i) $u \in \ker\rho$ ならuはベキ零元。

(ii) 任意の $v \in \mathrm{lim.inv.}\ H^*(BE)$ に対してある $n \geq 0$ が存在して $v^{p^n} \in \mathrm{im}\,\rho$ をみたす。

ただし逆極限は圏 $\mathcal{C}$ に対するもので $E \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ である。またこの条件を満たす環準同型をQuillenの言葉によりF-isomorphismと呼ぶ。

（上記のQuillenの定理はelementary abelian p-subgroupを全て決定するのが難しいこともあり，具体的な計算に役立つとは言えない

2. 知られている結果

以下話をCoxeter群に限定する。まずCoxeter群の定義を与えよう。

定義　Iを有限集合，m_{ij} $(i, j \in I)$ を自然数または∞で，次の条件を満たすとする：

$$\begin{cases} \text{(i)} & m_{ii}=1. \\ \text{(ii)} & i \neq j \text{ のとき } 2 \leq m_{ij} = m_{ji} \leq \infty. \end{cases}$$

そのとき表示 $G = \langle i \in I \mid (ij)^{m_{ij}} = 1,\ m_{ij} \neq \infty \rangle$ で定義される群をCoxeter群と呼ぶ。生成元の集合を強調するときには，(G, I)とかく。

Coxeter群の生成元が一つなら位数2の巡回群，生成元が2つで $m_{12} \neq \infty$ ならば対応するCoxeter群は位数 $2m_{12}$ の正2面体群，$m_{12} = \infty$ ならば2つの位数2の巡回群の自由積 $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ となる。生成元が3つのとき対応するCoxeter群は3つの数の組みあわせ (m_{12}, m_{23}, m_{31}) によって決まる。例えば $(3, 3, 2)$ に対応するものは4次の対称群に同型である。また (p, q, r) に対応するCoxeter群の位数が有限であることと $1/p + 1/q + 1/r > 1$ が成立することとは同値である。生成元が3つで無限位数のときにはとくにSchwaltz full triangle groupと呼ばれる。

有限位数のCoxeter群は完全に分類されており，表示を調べることにより簡単に判定できる。大まかに言うと各 m_{ij} $(i \neq j)$ が充分大きければ位数は無限大となる。

さてCoxeter群の分類空間のコホモロジーはSerreの後，Rusin (1984), Howlett (1988), Pride-Stöhr (1990) 等に

によって研究されている。このうちHowlettの研究は、いわゆるSchur multiplier（$H_2(BG, \mathbb{Z})$のこと）の計算である。残る2つはコホモロジー群または環の構造を扱っているが、それらを述べるために幾つか定義が必要である。

(G, I) をCoxeter群とする。Iの部分集合によって生成されるGの部分群を放物的部分群（parabolic subgroup）と呼ぶ。放物的部分群は自然なCoxeter群の構造をもつ。Iは有限集合であるから、与えられたCoxeter群の放物的部分群の数は有限個であり、全部調べるのも簡単である。

次にIの異なる3つの元により生成される放物的部分群の位数が常に無限大のとき、そのCoxeter群はasphericalであるという。asphericalなCoxeter群の簡単な例として、$I=\{1,2,3\}$, $m_{ij}=3$ $(i \neq j)$ の場合が挙げられる。

ではまずRusinの結果を述べよう。

定理（Rusin, 1984）　GをasphericalなCoxeter群で各m_{ij}は偶数とする。LをIの部分集合で有限位数の放物的部分群を生成するものからなる族とする。もし各m_{ij}が充分大きければ自然な環準同型

$$H^*(BG, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \lim_{\substack{\longleftarrow \\ J\in L}} \mathrm{inv.}\, H^*(BG_J, \mathbb{Z}/2)$$

は同型となる。ただしG_Jは$J \subseteq I$により生成される放物的部

分群をあらわす。

（Rusinは各m_{ij}の大きさに関する条件を具体的に与えているがここでは省略する）。次にPride等の結果を述べよう。

定理（Pride-Stöhr, 1990）　（G, I）をasphericalなCoxeter群，$\mathcal{E}$をIのunordered pair $\{x, y\}$の集合であって$\{x, y\}$の生成する放物的部分群が有限位数のもの全体とする。そのとき任意のG-加群Mに対して次の系列は完全である。

$$\cdots \longrightarrow \prod_{i \in I} H^k(G_{\{i\}}, M)^{a(i)} \to H^k(G, M) \longrightarrow \prod_{\{x,y\} \in \mathcal{E}} H^k(G_{\{x,y\}}, M)$$
$$\longrightarrow \prod_{i \in I} H^{k+1}(G_{\{i\}}, M)^{a(i)} \to \cdots$$

ここで$a(i)$はiに依存して組み合わせ的に決まる量である。

ここで述べた二つの研究はともに，asphericalなCoxeter群の分類空間のコホモロジーは，有限位数の放物的部分群のそれと密接な関係があることを示している。それでは一般の場合にはどうかと考えるのは自然である。Pride-Stöhrの完全系列の形はCoxeter群がasphericalであることに強く依存しているので一般化は難しく思える。それに対してもう

一方のRusinの定理にある環準同型が一般の場合（係数が$\mathbb{Z}/2$でなくCoxeter群がasphericalでないとき）どのような性質をみたすかを問うことはできる。実際次の定理が成り立つ。

定理（秋田，1992）　(G, I)をCoxeter群，pを素数とする。LをRusinの定理と同様に定義すれば自然な環準同型

$$H^*(BG, \mathbb{Z}/p) \to \operatorname*{lim.inv.}_{J \in L} H^*(BG_J, \mathbb{Z}/p)$$

はF-isomorphismとなる。

Quillenの定理と上の定理を比べたとき，上の写像の値域は具体的に計算可能である点ですぐれている。なおGがasphericalであるとき上の写像が全射であることも証明できる。上の準同型は一般には単射でも全射でもないことを注意しておく（そのような例を$p=2$のときでも構成できる）。

3. 証明の方針

以下に著者の定理の証明の基本的なアイデアを述べる。Xを有限次元G-CW複体とすると，次のLerayスペクトル列を得る：

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\sigma} H^p(BG_\sigma, \mathbb{Z}/p) \Rightarrow H_G^{p+q}(X, \mathbb{Z}/p)$$

ただしσはp-胞体の軌道の代表元を動き，$H_G^m(X, \mathbb{Z}/p)$は

Borelコホモロジー $H^n(EG\times_G X, \mathbb{Z}/p)$ をあらわす。もしXが可縮であれば $H^n_G(X)$ は $H^n(BG)$ と同型であるので、上のスペクトル系列はGの分類空間のコホモロジーに収束する。さて E_2-項での辺準同型 $\rho: H^*(BG, \mathbb{Z}/p) \to E_2^{0,*}$ はスペクトル系列の考察より次の条件を満たすことが解る（Xが有限次元であることが重要）：

$\begin{cases} \text{(i)} & u\in H^*(BG) \text{ が } u\in\ker\rho \text{ ならば } u \text{ はベキ零元。} \\ \text{(ii)} & \text{任意の } v\in E_2^{0,*} \text{ に対してある } n\geq 0 \text{ が存在して } v^{p^n}\in \operatorname{im}\rho \\ & \text{を満たす。} \end{cases}$

従って定理を示すにはG-CW複体で、対応するLerayスペクトル系列の E_2 レベルでのファイバー項が定理に述べられた逆極限、辺準同型が自然な準同型と一致するようなものを構成すればよいことがわかる。

さて与えられたCoxeter群 (G, I) に対して求めるG-CW複体を次のように構成する。$\mathcal{S}$ を有限位数の放物的部分群の族、$\mathcal{A}$ を $\mathcal{S}$ の左剰余類の全体とする。包含関係により $\mathcal{A}$ をposetとみなす。$\mathcal{A}$ の元 gH $(g\in G, H\in\mathcal{S})$ には $g'\cdot gH = g'gH$ によりGが左から作用する。gH での固定部分群が gHg^{-1} であることは明らかである。

群Gの作用するposetが与えられれば、そこからGが単体的に作用する単体的複体を以下のように構成できる。すなわ

ち頂点は$\mathcal{A}$の元，単体は$\mathcal{A}$の元を有限個大きさの順に並べた列とし，その列に対しその部分列を辺と定義すればよい。
Gの$\mathcal{A}$への作用が上の単体的複体への作用に拡張されるのは明らかであろう。また各単体での固定部分群は有限位数の放物的部分群の共役類となっている。このように部分群や剰余類のなすposetを使ってG－単体的複体を構成するのは離散群の分類空間のコホモロジーを研究する際の常套手段の一つである。

構成したG－単体的複体に対応するLerayスペクトル系列のE_2－項のファイバー項と辺準同型が求められる条件を満たすことは，Lerayスペクトル系列の基本的性質と複体の頂点と1-単体の構造を考察することにより簡単に得られる（ただしE_1－項での微分$d_1^{0,*}$を考えなければならないので煩雑である）。

最後に構成した複体が可縮であることを示さなければならない。幸いCoxeter群が作用する空間が可縮となる条件を，Davisが研究している。Davisはasphericalな多様体でその普遍被覆がEuclid空間に同相でないものを構成するために研究したのだが我々の目的にも応用できる。以下にDavisの結果を述べる。

定理（Davis, 1983）(G, I) をCoxeter群，X をHausdroff空間，$(X_i)_{i\in I}$ を X の局所有限な閉部分空間の族とする。$I(x)=\{i\in I ; x\in X_i\}$，$X_J=\bigcap_{i\in J} X_i$ $(J\subseteq I)$ とおく。空間 $G\times X$（Gは離散空間とみる）に同値関係〜を $(g, x)\sim(g', x') \Leftrightarrow x=x'$ かつ $g^{-1}g'\in G_{I(x)}$ により定義する。

以上の記号のもとで $G\times X/\sim$ が可縮であることと次の二つの条件は同値である

$$\begin{cases} \text{(i)} & X\text{は可縮。} \\ \text{(ii)} & G_J\text{の位数が有限である}J\subseteq I\text{に対し}X_J\text{は非輪状。} \end{cases}$$

一見してわかるように定理は非常に複雑である。我々の構成した単体的複体が可縮であることを示すには，複体に上の定理の空間 $G\times X/\sim$ に相当する構造を入れなければならない。実は上の X および $(X_i)_{i\in I}$ に相当する空間がもとの複体の部分複体として実現でき，それらが可縮であることも容易に示すことができる。詳しくは著者の論文を参照してほしい。

4. 付記.

この記録で述べた定理によりCoxeter群の分類空間のコホモロジー環は有限位数の放物的部分群のそれを調べることによりかなり詳しくわかるが，完全に構造を決定するには至ら

ない。より詳しく調べるには今のところLerayスペクトル系列の考察しかないが，Lerayスペクトル系列はSerreのそれなどに比較して扱いにくいためなかなか困難である。

また定理の証明に使った手法は構成した単体的複体が可縮であることを示す部分を除いて，Coxeter群以外の群にも応用可能であり，結果はF-isomorphismという形で得られる。

参考文献

- Akita, T On the cohomology of Coxeter groups and their parabolic subgroups of finite order (Submitted to J. London Math. Soc.)
- Brown, K. Cohomology of Groups, GTM 87, Springer-Verlag 1982
- Davis, M. Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, Ann. of Math. 117 (1983) 293-324
- Howlett, R. On the Schur multipliers of Coxeter groups, J. London Math. Soc. 38 (1988), 263-279
- Pride, S.-Stöhr, R. The (co)homology of aspherical Coxeter groups, J. London. Math. Soc. 92 (1990) 49-63.

- Quillen, D. The spectrum of equivariant cohomology ring II. Ann. of Math. 94 (1971) 573-602
- Rusin, D. The cohomology of groups generated by involutions, Ph.D. thesis, Chicago University, 1984
- Serre, J.-P. Cohomologie de groupes discrets, Ann. of Math. Studies, vol. 70, Princeton University