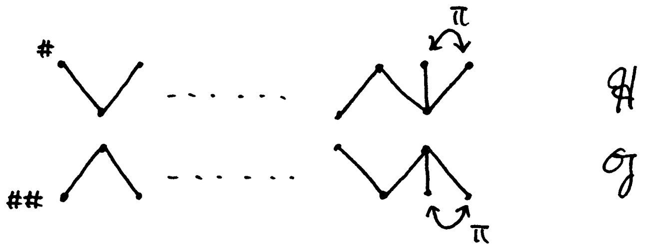
数理解析研究所講究録
第839巻 1993年 1-7

Graph の持つ symmetry より構成される subfactor

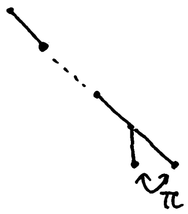
九州大学教養部　幸崎秀樹　(Hideki Kosaki)

§1 Introduction

AFD II_1 factor の index 有限な対が有限群の作用を持つ場合を考える。たとえば Dynkin 図形 D_{2n} $(n \geqq 2)$ に対応する coupling system



は $\mathbb{Z}_2$- 作用 (上図の symmetry π) を持つ。π は connection 等を保存するので、上の $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ より求まる AFDII_1 factor の対 $A \supseteq B$ は周期 2 の自己同型 $\pi \in \mathrm{Aut}(A)$, $\pi(B)=B$ を持つ。$B \subseteq A \subseteq A_1 \subseteq A_2 \cdots$ を Jones tower とし、π を $\pi(e_i)=e_i$ $(i=0,1,\cdots)$ を満たすように一意的に A_k へ拡張する。構成法より (拡張された) π の $\{A_k \cap B'\}_k$ への作用は



となる。

上の事実の応用として、次の2つの事を§2, §3で示す。

(i) 次の条件を満たすAFD III_0 factor Mが構成できる。

Mは下の条件を満たす非可算無限個のsubfactor Nを含む。

(a) M, Nは同じflow of weightsを持つ。

(b) $M \supsetneqq N$ のprincipal graphは A_{4n-3} ($\mathrm{Ind} = 4\cos^2(\pi/4n-2)$)。

(ii) AFD II_1 factorに関するよく知られた結果 " $A_5 = S_3/S_2$ " の一般化。

§2 AFD III_0 factor

$M_0 \rtimes_{\theta_0} \mathbb{Z}$ をAFD III_0 factorのdiscrete分解とする。$\mathfrak{Z}(M_0) = L^\infty(X)$ をAFD type II_∞ algebra M_0 のcenterとし、以下簡単の為に $tr \circ \theta_0 = tr(e^{-\alpha}\cdot)$ ($\alpha > 0$ 定数) とする。$(\theta_0, \mathfrak{Z}(M_0))$ に対応する ergodicな変換を (X, T) とし、M_0 のcentral decompositionを

$$M_0 = \int_X^\oplus M_0(\omega)\,d\omega$$

とする。まず (X, T) の2対1 ergodic extension $(\tilde{X}, \tilde{T})$ を用意する。つまり $\tilde{X} = X \times \{0, 1\}$ で

$$\tilde{T}^n(\omega, i) = (T^n\omega, \varphi_{\omega,n}(i))$$

と表示できる。但し $\varphi: (\omega,n) \in X\times\mathbb{Z} \to \varphi_{\omega,n} \in \Sigma_2\ (\cong \mathbb{Z}_2)$ は cocycle equation $\varphi_{T^n\omega,m}\,\varphi_{\omega,n} = \varphi_{\omega,n+m}$ を満たす。

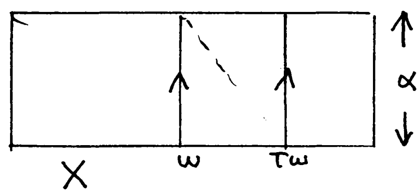
まず §1 の A,π を利用し，$A\otimes M_0$ の自己同型 θ を

$$(\theta(x))(\omega) = (\pi^{\varphi_{T^{-1}\omega,1}} \otimes (\Theta_0)_{T^{-1}\omega})(x(T^{-1}\omega))$$

と定義する。ここで $x = \int_X^{\oplus} x(\omega)d\omega\ \ (x(\omega)\in A\otimes M_0(\omega))$ 且つ $\Theta_0 = \{(\Theta_0)_\omega\}\ \ ((\Theta_0)_\omega : M_0(\omega) \xrightarrow{\cong} M_0(T\omega))$ とする。θ は部分環 $B\otimes M_0$ を (globally) invariant にする事に注意して

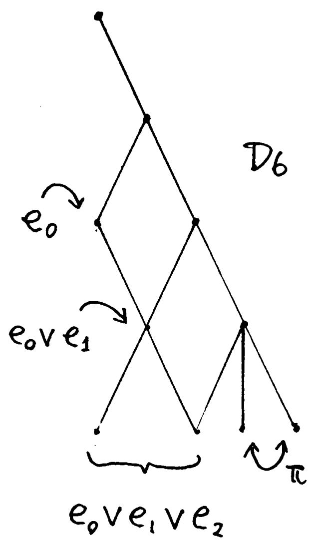
$$M = (A\otimes M_0)\rtimes_\theta \mathbb{Z} \supseteq N = (B\otimes M_0)\rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

と置く。$A\otimes M_0$ 上の $tr_A\otimes tr$ の θ による scale のされ方は、A, B, π と無関係である。従って M, N (及び $M_0\rtimes_{\Theta_0}\mathbb{Z}$) は同じ flow of weights を持つ。(右図)



"II 型部分" $A\otimes M_0 \supseteq B\otimes M_0$ は principal graph の (constant) field $\{(A_k\cap B')\otimes L^\infty(X)\}$ を与える。

たとえば $n=3$ (つまり D_6) の時，θ の定義より $\langle (1-e_0\vee e_1\vee e_2)\cdot \{(A_3\cap B')\otimes L^\infty(X)\}, \theta\rangle$ の定める (X,T) の 2 対 1 extension が始めに与えられた $(\tilde{X},\tilde{T})\to(X,T)$ となる。$(\tilde{X},\tilde{T})$ のエルゴード性より $M\supseteq N$ の principal graph $\{((A_k\cap B')\otimes L^\infty(X))_\theta\}_k$



は $\{(A_k \cap B')_\theta\}_k$ と同じで．Dynkin図形 A_{4n-3} となる。

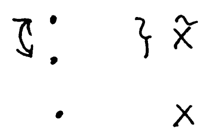
始めの extension $(\tilde{X}, \hat{T}) \to (X, T)$ が $M \supsetneqq N$ の inclusion data のみで書かれた事に注目しよう。非可算無限個の非同型（extension として）な２対１ ergodic extension を持つ (X, T) から出発しよう。非同型な $(\tilde{X}, \hat{T})$ 及び $(\tilde{X}_1, \hat{T}_1)$ から生じる２つの inclusion $M \supsetneqq N$, $M_1 \supsetneqq N_1$ は上の事より non-conjugate である。

AFD III_0 factor の index 3 の subfactor の分類（［K］）は．特に graph が A_5 で同じ flow of weights を持つ subfactor は一般に非可算無限個ある事を示している。同じ現象が A_{4n-3} でも起きている訳である。　ここでの構成法は［L］,［K-L］での例の作り方の一般化である。

§3　AFD II_1 factor

以下の結果は II_1-factor の結果として self-contained な形に書け，しかも一般化可能である。（［C-K］）　しかし、ここでは III型 factor を経由して説明する。

§2 での構成法は III_λ $(0<\lambda<1)$ の場合でも可能である。（［L］）　但しこの場合には $M_0 = R_{01}$, $\mathrm{tr} \circ \theta_0 = \lambda\, \mathrm{tr}$ となり．(X, T) は trivial になる。　この２対１ extension



より決まる $\Theta \in \mathrm{Aut}(A\otimes R_{01}, B\otimes R_{01})$ は単に

$$\Theta(a\otimes x) = \pi(a)\otimes\theta_0(x)$$

である。これより III_λ factor の（グラフ A_{4n-3} の）対

$$M = (A\otimes R_{01})\rtimes_{\pi\otimes\theta_0}\mathbb{Z} \supsetneq N = (B\otimes R_{01})\rtimes_{\pi\otimes\theta_0}\mathbb{Z}$$

が得られる訳だが、N は index 2 の subfactor

$$P = (B\otimes R_{01})\rtimes_{(\pi\otimes\theta_0)^2}(2\mathbb{Z})$$

を持つ。（P は type III_{λ^2}）　$M\supsetneq P$ の index は $2\times 4\cos^2(\pi/4n-2)$ であるが、直接計算により $M\cap P' = \mathbb{C}1$ は証明出来る。M $\supsetneq P$ に type III_μ factor（$\log\lambda/\log\mu\notin\mathbb{Q}$）を tensor し type III_1 とし、次に modular action による接合積を考える事により、AFD II_∞ factor（II_1 と言っても同値）の対が得られる。簡単な計算により、これらの II_∞ factor は次のように表示出来る事がわかる。

$$\check{M} = (A\otimes R_{01}\otimes R_{01}\otimes L^\infty(\mathbb{R}, e^t dt))\rtimes_\rho(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$$
$$\supsetneq \check{P} = (B\otimes R_{01}\otimes R_{01}\otimes L^\infty(\mathbb{R}, e^t dt))\rtimes_\rho(2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$$

但し作用 ρ は

$$\rho(a\otimes x\otimes y\otimes f) = \pi^n(a)\otimes\theta_0^n(x)\otimes\theta_\mu^m(y)\otimes f_{-n\log\lambda-m\log\mu}$$

で与えられる。ここで $\theta_\mu\in\mathrm{Aut}(R_{01})$ は $tr\circ\theta_\mu = \mu\, tr$ を満たし、f_x は $f\in L^\infty(\mathbb{R}, e^t dt)$ の x による translation を表わす。$\check{M}\supsetneq\check{P}$ の間には N より生じる II_∞ factor

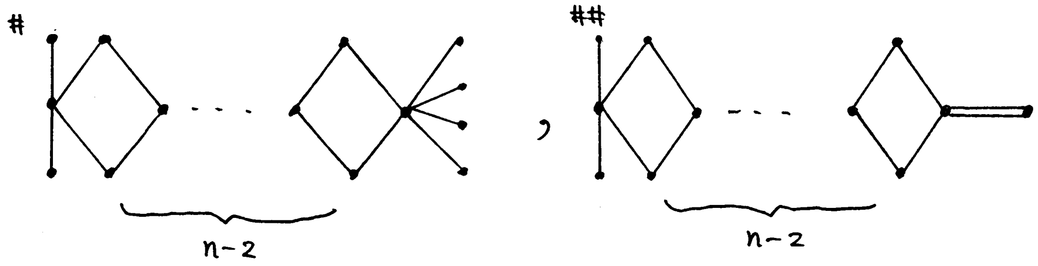
$$\check{N} = (B\otimes R_{01}\otimes R_{01}\otimes L^\infty(\mathbb{R}, e^t dt))\rtimes_\rho(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$$

が入っている。 $\check{M} \supset \check{N}$ の principal graph が A_{4n-3} である事、$\check{M}\cap(\check{P})' = \mathbb{C}1$ 等が直接計算により示せる。 $\check{M} \supset \check{P}$ の principal graph を計算する事により次の事がわかる。

$M \supset N$ を AFD II_1 factor の対で、その principal graph を A_{4n-3} とする。この時 N の index 2 の subfactor P ($[M:N] = 8\cos^2(\pi/4n-2)$) で下の条件を満たす物が取れる。

(i) $M \cap P' = \mathbb{C}1$

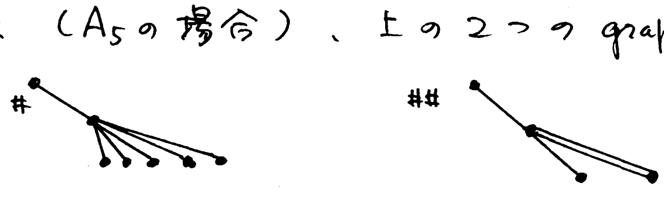
(ii) $M \supset P$ 及び $J_M P' J_M \supset M$ の principal graph は



で与えられる。

<u>Remarks</u>

(i) $n=2$ (A_5 の場合)、上の2つの graph は



となる。一番目のグラフより $M = P \rtimes G$ ($\# G = 6$) となり、二番目のグラフより $G = S_3$ がわかる。

(ii) 上の2つのグラフが異なるので、$M \supset P$ は $X_1 \otimes X_2$

$\supseteqq X_3 \otimes X_4$ (X_i は II_1-factor で $[X_1 : X_3] = 4\cos^2(\pi/4n-2)$, $[X_2 : X_4] = 2$) と conjugate である。

<u>References</u>

[C-K] M. Choda and H. Kosaki, work in progress.

[K] H. Kosaki, talk at Niigata Univ., Aug., 1991.

[K-L] H. Kosaki and R. Longo, A remark on the minimal index of subfactors, to appear in J. Funct. Anal.

[L] P. H. Loi, Automorphisms of subfactors, preprint.