数理解析研究所講究録
第819巻 1993年 12-19

互いに包含関係のないsubfactors

北海道大学　綿谷安男

0 はじめに

Jones [1]のindexの研究に始まる今までのsubfactorの研究はほとんどといってよいほど，factor Mの中の1つのsubfactor Nの包含関係に関するものであった。もちろんsubfactorの分類は主要で重要な問題ではあるが，ここでそれ以外の話題でも面白いことはないかを試行錯誤してみることは研究の前線を広げる面においても少しは価値のあるものと考えている。特にここではfactor Mの中の互いに包含関係のない複数コのsubfactor達 $N_1, N_2, \cdots, N_K$ の間の相対的な位置関係を研究の対象として考えてみたい。もちろん今までの1つのsubfactorの研究の成果が大いに役に立つことは，言うまでもないことである。

① 中間subfactorのなす束

Mをfactorとし、Nをそのsubfactorとする。今ここで $N'\cap M=\mathbb{C}$ を仮定する。

Def $\mathrm{Lat}(N\subset M)$

$$\underset{\mathrm{def}}{\equiv}\{K \mid K \text{は} N\subset K\subset M \text{なる中間subfactor}\}$$

とおくと、$\mathrm{Lat}(N\subset M)$ は次の演算で束になる；

$$\begin{cases} K_1\vee K_2=(K_1\cup K_2)'' \\ K_1\wedge K_2=K_1\cap K_2 \end{cases}$$

実際 $N'\cap M=\mathbb{C}$ より $N\subset K\subset M$ なる任意の von Neumann subalgebra K は自動的に factor になるからである。

$$K'\cap K\subset N'\cap M=\mathbb{C}.$$

そこで問題となるのはこの束 $\mathrm{Lat}(N\subset M)$ の構造である。さらに包含関係 $N\subset M$ の構造がこの束 $\mathrm{Lat}(N\subset M)$ の構造にどう反映しているかを調べてみたい。ガロア理論の視点からは、次の例が重要である；

$\boxed{例}$（中村－武田）[2]

① N を II_1-factor，G を有限群，$\alpha: G \to \mathrm{Aut}\,N$ を outer action とする．$M = N \rtimes_\alpha G$ をその接合積とする．$\mathcal{L}(G) = \{H \mid H$ は G の subgroup$\}$ に

$$\begin{cases} H_1 \vee H_2 = (H_1 \text{と} H_2 \text{から生成される subgroup}) \\ H_1 \wedge H_2 = H_1 \cap H_2 \end{cases}$$

でもって束の構造を入れる．

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Lat}(N \subset M) \cong \mathcal{L}(G)$

もっとくわしく $\forall K \in \mathrm{Lat}(N \subset M)$ $\exists H! \in \mathcal{L}(G)$,

$$K = N \rtimes H$$

とかけている．

② M を II_1-factor，G を有限群，$\alpha: G \to \mathrm{Aut}\,N$. を outer action とする．その fixed point algebra $N = M^\alpha$ を考える，

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Lat}(N \subset M) \cong (\mathcal{L}(G)$ の dual lattice$)$

もっとくわしく $\forall K \subset \mathrm{Lat}(N \subset M)$ $\exists!\, H \in \mathcal{L}(G)$

$$K = M^H$$

とかけている。

(注) 上の例では特に中間 subfactor のなす束 $\mathcal{L}at\,(N \subset M)$ は《有限束》になることがわかる。このことは次のように一般化できる:

$\boxed{\text{定理 1}}$ M を II_1-factor, $N \subset M$ を subfactor とする。$N' \cap M = \mathbb{C}$ と $[M:N] < \infty$ を仮定する

$\Longrightarrow$ $\mathcal{L}at\,(N \subset M)$ は有限束である。
(特に Hasse の図式で絵がかける!)

(注) $N' \cap M = \mathbb{C}$ は必要である。例えば $M = N \otimes M_4(\mathbb{C})$ とおくと $N \subset M$ の間にある中間 subfactor は, $[M:N] < \infty$ にもかかわらず連続無限個ある。

$\boxed{\text{予想}}$ $M = N \rtimes_\alpha G$ の時は

$$\#(\mathcal{L}at\,(N \subset M)) = \#(\mathcal{L}(G)) \leqq 2^{\#G}$$

が成立している。そこで一般の subfactor $N \subset M$ の場合も中間 subfactors の個数を上から評価することが,問題となる:

$$\#(\mathcal{L}at\,(N \subset M)) \leqq 2^{[M:N]}$$

が成立するか?

2 maximal subfactor

Def M を factor, N を M の subfactor で $N \neq M$ とする

$N \subset M$ が <u>maximal subfactor</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $N \subset K \subset M$ となる中間 subfactor K は

$K = N$ か $K = M$ となる

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Lat}(N \subset M) \cong \begin{array}{l} \circ\, M \\ | \\ \circ\, N \end{array}$

例 $[M:N] < 4 \Rightarrow N \subset M$ は maximal subfactor

例 $M = N \otimes M_n(\mathbb{C})$ とすると

$N \subset M$ が maximal subfactor

$\Longleftrightarrow$ n は素数

例 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, N$: outer action

$M = N \rtimes_\alpha G$ とする

$N \subset M$ が maximal subfactor

$\Longleftrightarrow$ $\exists p$: 素数 $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

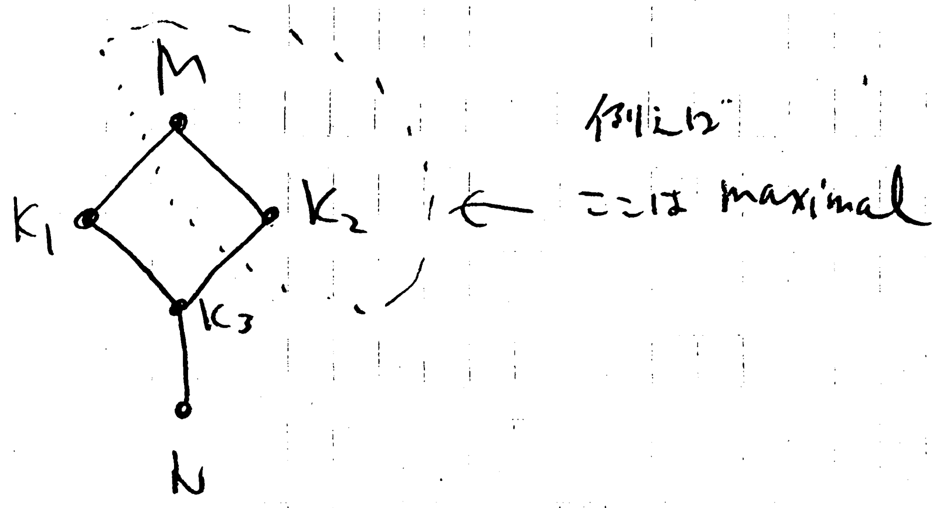
≪maximal subfactor は素数のような役割を果たす≫

一般には subfactor $N \subset M$ の研究は次の2つの研究に分解できる

① 中間 subfactor のつくる束 $\mathcal{L}(N \subset M)$ の構造の研究

② maximal な subfactor $N \subset M$ の研究。

例



上の $\mathcal{L}at(N \subset M)$ の中で $K_1 \subset M$, $K_2 \subset M$, $K_3 \subset K_1$, $K_3 \subset K_2$, $N \subset K_3$ はすべて maximal subfactors である。

注 $M = N \rtimes G$ とかけている時 G がたとえ単純群であっても $N \subset M$ は maximal とは限らない：

問題 単純群に対応することを subfactor のことばでかけ。

3 その他のこと

中間subfactorのなす束以外にも互いに包含関係のないsubfactor達の研究の方向は考えられる

⑦ MをII_1-factor, AとBをMのsubfactorsとする. AとBの間の相対位置をその《角度》でもって捉える. これについては佐野一綿谷[4]の先駆的な研究はあるが, それ以後あまりかんばしい進歩がないのが残念である.

⑧ commuting squareかつco-commuting square (i.e. commutantsがcommuting square)をなすfactorsの《4辺形》

$$\begin{matrix} A & \subset & M \\ \cup & & \cup \\ N & \subset & B \end{matrix}$$

の分類をせよ.

⑨ MをII_1-factor, AとBをMのsubfactorsとする. AとBの間に包含関係のない時にその相対エントロピー[3]

$$H(A|B)$$

をAとBの間の相対関係から計算せよ.

References

[1] V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-15

[2] M. Nakamura and Z. Takeda, A Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad. 36 (1960) 258-260

[3] M. Pimsner and S. Popa, Entropy and index for subfactors, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 19 (1986), 57-106

[4] T. Sano and Y. Watatani, Angles between two subfactors, preprint