数理解析研究所講究録
第839巻 1993年 63-87

作用素環の束の可微分性について

大阪女子大学　　大内本夫 (Moto O'uchi)

1. はじめに

C^*-環の理論では、表現の分解や接合積の構成において C^*-環の束（bundle または field）がしばしば現れる。最近では、トーラス上の回転環 A_θが C^*-環の continuous field $(A_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ になるという事実に基づいた証明 [2] や，C^*-力学系に関連した C^*-環の束の連続性についての研究 [21] がある。具体的に構成される作用素環の多くは基礎となる空間が可微分多様体であり、現れる群は離散的でなければ Lie 群である。従ってそのような作用素環に関連した束にたいして微分構造を考えることは不自然なことではない。

一方、C^*-環の理論ではトポロジーや微分幾何学的な概念が数多く導入されている。代表的なものとして、K-理論と Connes の非可環微分幾何があげられる。C^*-環の K-理論は与えられた C^*-環上の projective module の同値類を対象としている。また Connes の非可環微分幾何においても接続 (connection) や曲率の概念が作用する群が Lie 群であるような C^*-力学系に対して導入されている。この場合でもこれらの概念は与えられた C^*-環の C^∞級の元からなる部分環上の projective module を基礎として定義されている（[5],[6]）。古典的な K-理論でも微分幾何においてもこれらの概

念は研究対象となる位相空間 X上のベクトル束 E に関連して考えられている。有限次元のベクトル束 E にたいしては、連続な切断の集合$\Gamma(E)$ は X上の連続関数の作る環 $C(X)$ 上の有限生成の projective module になり、有限次元ベクトル束を考えることとこのような projective module を考えることとは同値になる（ [1] §1.4 の最後の Proposition ）。従って、これらの理論を代数的な方法で C^*-環に導入するためには projective module を基礎に置くのは自然なことである。しかし無限次元の C^*-環の理論においてはベクトル束的な考え方と projective module 的な考え方は同値になるという保証はない。筆者の目標はベクトル束的な考え方でどの程度まで微分幾何学的概念が C^*-環の理論に導入でき、有効なものになるかを調べることである。その第一歩として [17] で、C^*-環の可微分束とその接続、更にそのような接続の曲率を定義した。ここでは、Lie 群の多様体への作用から reduced 接合積を作る際に自然に表れる C^*-環の束の可微分性について考察してみたい。更に、もとの Lie 群の作用を横断的な部分多様体に制限することによって、離散的な軌道を持つ groupoid が得られ、このような groupoid から作られる reduced C^*-環は横断多様体が異なれば一般に同型ではない。上で述べたような束の接続の曲率を考えることにより、このような C^*-環の不変量を構成したいというのが筆者の希望である。先ずこの問題に関連して筆者が念頭に置いている具体例について述べてみたい。

2. 研究対象

(i) 無理数回転環と Kronecker 葉層

無理数θに対して、二次元トーラス $\mathbf{T}^2=\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$上の $\mathbf{R}$ の作用 $\{F_t^\theta\}$ を $F_t^\theta(x,y)=(x+t,y+\theta t)$ によって定義する。このとき、各$\xi\in\mathbf{T}^2$を通る $\mathbf{R}$の軌道 $L_\xi=\{F_t^\theta(\xi);t\in\mathbf{R}\}$ を葉とするような葉層構造 $(\mathbf{T}^2,\mathcal{F}_\theta)$, 但し $\mathcal{F}_\theta=\{L_\xi;\xi\in\mathbf{T}^2\}$, が得られる。これを Kronecker 葉層と呼ぶ。$(\mathbf{T}^2,\mathcal{F}_\theta)$ の holonomy groupoid $\mathcal{G}_\theta=\mathbf{T}^2\times\mathcal{R}$ から作られる reduced C^*-環 $C_r^*(\mathcal{G}_\theta)$ が葉層 C^*-環 $C^*(\mathbf{T}^2,\mathcal{F}_\theta)$ である ([3],[4])。横断多様体 $T=\{0\}\times\mathbf{T}$ への $\mathcal{G}_\theta$の reduction を $\mathcal{G}_\theta|T$で表すと、これは $\mathbf{T}$ 上の角度θの回転によって得られる groupoid と同型になる。このことは、$\mathbf{Z}$ の $\mathbf{T}$ 上への作用βを $\beta_n(x)=x+n\theta$ $(x\in\mathbf{T},n\in\mathbf{Z})$ によって定義すると、

$$L_{(0,x)}\cap T=\{\beta_n(x);n\in\mathbf{Z}\}$$

となることを意味する。このβによる作用から接合積によって構成される C^*-環が無理数回転環 A_θである。上の議論から A_θと $C_r^*(\mathcal{G}|T)$ が同型であることがわかる。

次に $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を $SL(2,\mathbf{Z})$ の元とする。Sは $\mathbf{T}^2$上の微分同相写像であり、$\tilde{F}_t=SF_t^\theta S^{-1}$もまた Kronecker 葉層 $(\mathbf{T}^2,\mathcal{F}_\rho)$ を定義する。このとき

$$SF_t^\theta S^{-1}(x,y)=(x+(a+b\theta)t,y+(c+d\theta)t)$$

だから$\rho=(c+d\theta)/(a+b\theta)$ である。このことは $C^*(\mathbf{T}^2,\mathcal{F}_\theta)$ と $C^*(\mathbf{T}^2,\mathcal{F}_\rho)$ が同型、すなわち A_θと A_ρが stably に同型であることを意味する ([19],[9])。しかし、一般には A_θと A_ρは同型ではない。例えば、$\theta=\sqrt{2}$, $S=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$とすると$\rho=(11-\sqrt{2})/7$ でθの fractional part $\{\theta\}\approx 0.1414\in[0,1/2]$ と $\{\rho\}\approx 0.3694\in[0,1/2]$ とは等しくない。よってこの時 A_θと A_ρは同型でない。([19], Theorem 2.)

ところで、$\xi \in \mathbf{T}^2 \mapsto S^{-1}\xi \in \mathbf{T}^2$ が $(\mathbf{T}^2, \mathcal{F}_\rho)$ から $(\mathbf{T}^2, \mathcal{F}_\theta)$ への同型を与えるから（$\eta = \tilde{\alpha}_t(\xi)$ なら $S^{-1}\eta = \alpha_t(S^{-1}\xi)$）、$\mathcal{G}_\rho|T$を $\mathcal{G}_\theta$の reduction $\mathcal{G}_\theta|S^{-1}T$とみなすことができる。すなわち、1 つの Kroneckr 葉層 $(\mathbf{T}^2, \mathcal{F}_\theta)$ に対して、その横断多様体は数多くあり、それらに関する $\mathcal{G}_\theta$の reduction から得られる groupoid C^*-環 A_ρは互いに同型であるとは限らない。これからの研究の目標の一つとして、$C^*(\mathbf{T}^2, \mathcal{F}_\theta)$ に自然に付随する C^*-環の可微分束に、与えられた横断多様体の方向微分を何らかの意味で表す接続を構成し、その曲率によって、対応する環 A_ρの不変量である $\{\rho\}$ または $1 - \{\rho\}$ $(\in [0, 1/2])$ を表したいと考えている。

最後に K-理論との関係を述べると、上の A_θと A_ρは stably に同型だから A_θと A_ρ の K_0-群は抽象群としては同型（共に $\mathbf{Z}^2$）である。しかし A_θと A_ρには一意的に決まる正規化された trace があり、その trace によって K_0-群を ordered group と考えればそれぞれの K_0-群は同型ではない。（ $\mathbf{R}$ の部分群として $\theta\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ と $\rho\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ となる。）これによって A_θと A_ρが同型でないことが示される。

(ii) ある半直積群の作用に付随した環

Sを $SL(2, \mathbf{Z})$ の元、λをその固有値、$\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}$を$\lambda$に属する固有ベクトルとする。以下$\theta$は実の無理数であるとする。集合 $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ は次のような積を与えることにより $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{R}$ の半直積群になる;

$$(n, t)(m, s) = (n + m, \lambda^{-m}t + s) \qquad (n, t),\ (m, s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$$

この群を G と書く。(i) で定義した $\mathbf{R}$ の $\mathbf{T}^2$上への作用 $F_t = F_t^\theta$と $\mathbf{T}^2$の自己同型 Sは

関係 $SF_t = F_{\lambda t}S$を満足する。この関係により、Gの $\mathbf{T}^2$上への作用を

$$(n,t)\cdot\xi = S^n F_t \xi \qquad (n,t)\in G,\ \xi\in\mathbf{T}^2$$

によって定義することができる。この作用によって得られる groupoid を $\mathcal{G}$とすると、$\mathcal{G}$は $\mathbf{T}^3$の minimal な葉層構造の holonomy groupoid の reduction と同型になる([16],Proposition 1.1)。minimal な葉層構造の葉層 C^*-環は simple ([8], Théorème 2.6. [14], Theorem 6.4 も参照) で、$C_r^*(\mathcal{G})$ はその環と stably に同型だから simple になる。$T=\{0\}\times\mathbf{T}$ を (i) と同じ $\mathbf{T}^2$の部分多様体とするとき、$B(S,\lambda)=C_r^*(\mathcal{G}|T)$ は興味深い性質を持つ。

まず、$B(S,\lambda)$ の別の構成法について述べる。$\mathbf{R}$ の部分群 $K_\theta = \mathbf{Z}+\theta\mathbf{Z}$ に対して、集合 $\mathbf{Z}\times K_\theta$は次のような積を与えることにより $\mathbf{Z}$ と K_θの半直積群になる:

$$(n,k)(m,l) = (n+m, k+\lambda^n l) \qquad (n,t),\ (m,t)\in\mathbf{Z}\times K_\theta.$$

この群を $\mathbf{Z}\times_\lambda K_\theta$と書く。上の式が積を定義することは$\lambda = a+b\theta$だから$\lambda K_\theta = K_\theta$となることが本質的である。従ってここでの議論は一般の無理数θに対しては適用できない。$\tilde{G}=\mathbf{Z}\times_\lambda K_\theta$の $\mathbf{R}$ への作用を $(n,k)\cdot t = \lambda^n t + k$ $((n,k)\in\tilde{G},\ t\in\mathbf{R})$ によって定義する。更に、$\tilde{G}$と $L^\infty(\mathbf{R})$ の $\mathcal{H}=L^2(\mathbf{R}\times\tilde{G})$ 上への表現 $u:\tilde{G}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $\rho: L^\infty(\mathbf{R})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を

$$(u(g)\xi)(t,g') = \xi(t, g^{-1}g'),$$

$$(\rho(f)\xi)(t,g') = f(g'\cdot t)\xi(t,g')$$

$(g\in\tilde{G},\ f\in L^\infty(\mathbf{R}),\ \xi\in\mathcal{H},\ (t,g')\in\mathbf{R}\times\tilde{G})$ によって定義する。$\mathbf{Z}$ は $K_\theta=\mathbf{Z}+\theta\mathbf{Z}$ の部分群であり、$\tilde{G}$の部分群でもある。それを Hと書く。$f\in C_c(\mathbf{R})$, $g\in G$ に対し

て、$X(f,g)\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$を

$$X(f,g)=\sum_{h\in H}\rho(h\cdot f)u(hgh^{-1})$$

によって定義する。但し、$(h\cdot f)(t)=f(h^{-1}\cdot t)$であり、上の和は弱収束する ([15], Proposition 1.1)。$X(f,g)$ $(f\in C_c(\mathbf{R}),\ g\in G)$全体の元で生成された$C^*$-環を$\tilde{B}(S,\lambda)$と書くと、$\tilde{B}(S,\lambda)''$の 中心は $L^\infty(\mathbf{T})$ と同型になる。そこで$\tilde{B}(S,\lambda)$の恒等表現 ι の中心的分解 $\iota=\int_{\mathbf{T}}^{\oplus}\Phi_s\,ds$ を考えることにより、C^*-環 $B_s(S,\lambda)=\Phi_s(\tilde{B}(S,\lambda))$が得られる。中心的分解によって得られる表現$\{\Phi_s;s\in\mathbf{T}\}$は$\mathbf{T}$の測度0の集合上では曖昧さが残るが、$s\to\Phi_s$が連続となるように定めると一意的に決まる。$B_s(S,\lambda)$は互いに同型であり ([17], Lemma 3.1)、しかも $B(S,\lambda)$ とも同型になる ([16], Theorem 4.3)。

$C_r^*(\mathcal{G}|T)$は simple C^*-環 $C_r^*(\mathcal{G})$ と stably に同型となるから $B(S,\lambda)=C_r^*(\mathcal{G}|T)$ も simple である。また $B(S,\lambda)$は可分で単位元を持ち無理数回転環 A_θを含む。この時、A_θの単位元は $B(S,\lambda)$の単位元である。自然な条件付き期待値 $E:B(S,\lambda)\to A_\theta$が存在するが、$A_\theta$上の一意的な trace τ との合成$\tau\circ E$は trace にならない。実際、各 $n\in\mathbf{Z}$ に対して、$x\in B(S,\lambda)$で $xA_\theta x^*=A_\theta,\ \tau(xx^*)=\lambda^n\tau(x^*x)$となるものが存在する。更に、このような x の集合は $B(S,\lambda)$を生成する。またこれらのことから異なるλにたいしては、$(B(S,\lambda),A_\theta)$は pair として同型にならない。そして同一のθに対して、同型でない pair が存在する ([15])。$(B(S,\lambda),A_\theta,E)$は A_θ上への離散群 G_0の作用αによって$(C_r^*(A_\theta,G_0),A_\theta,E_0)$と表すことはできない。但し、$E_0:C_r^*(A_\theta,G_0)\to A_\theta$は自然な条件付き期待値である。何故なら、$C_r^*(A_\theta,G_0)$の任意の元 x は $x=\sum_{g\in G_0}a_g\lambda_g$ $(a_g\in A_\theta)$

と書けるが、τは一意的だから$\tau \circ \alpha_g = \tau$なので、

$$\tau \circ E_0(x^*x) = \sum_{g \in G_0} \tau(\alpha_g(a_g^* a_g)) = \sum_{g \in G_0} \tau(a_g^* a_g)$$

$$= \sum_{g \in G_0} \tau(a_g a_g^*) = \tau \circ E_0(xx^*).$$

よって$\tau \circ E_0$は trace になり、これは既に述べた事実と矛盾する。更に $B(S,\lambda)$ は trace を持たないのではないかと予想しているが、このことはまだ証明できない。

(i) と (ii) で考えている環はどちらも Lie 群の多様体上の作用から得られる groupoid C^*-環と、その groupoid の reduction による groupoid C^*-環であるが、(ii) のほうがはるかに複雑になっている。(ii) で考えている群 G は非可換の unimodular でない群であり、連結でもない。更に G の $\mathbf{T}^2$上への作用は free ではない。($(0,0) \in \mathbf{T}^2$は S の不動点)。従って、(i) と (ii) を共に含む形で議論を進めるためには、連結でない Lie 群も考える必要がある。

3. 微分可能性について

多様体上の C^*-換の可微分束を定義するためには、多様体から C^*-環への写像の微分について明確にする必要がある。始めに $\mathbf{R}^n$のある開集合Ωから複素 Banach 空間 Cへの写像 fの微分可能性について考える。$x_1,\ldots,x_n$と $e_1,\ldots,e_n$をそれぞれ $\mathbf{R}^n$の標準的な座標系と標準的な正規直交基底とするとき、Cのノルムに関する極限

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(f(x+te_i) - f(x))$$

によって $x \in U$における fの偏微分 $(\partial f)/(\partial x_i)(x)$ を定義する。ここでノルムに関する極限を取るのは、Cが C^*-環で C_0が Cの C^*-部分環であるとき、$f : \Omega \to C_0$の偏微分 $(\partial f)/(\partial x_i)$ もまた C_0の中への写像になるなどの便利な点が多いからである。ここで問題になるのは、$f : \Omega \to C$が各座標 x_iに関して偏微分可能で偏微分 $(\partial f)/(\partial x_i) : \Omega \to C$ $(i = 1, \ldots, n)$ が連続であっても fが全微分可能かどうかわからないことである。特に$\Phi : \Omega \to \Omega$を微分同相写像とした時、$f \circ \Phi$が各 x_iに関して偏微分可能であるかどうかわからない。更に fがノルムに関して連続であるかどうかもわからない。これは Banach 空間の中への写像の場合、微分積分学における平均値の定理のようなものが存在しないからである。そこで fの微分可能性に関して [17] において次のように考えた。fが連続であるとき fを $(C^0)'$級とよぶ。$i = 1, \ldots, n$ に対して偏微分 $(\partial f)/(\partial x_i) : \Omega \to C$が存在して連続であるとき $(C^1)'$級であると呼ぶ。$i = 1, \ldots, n$ に対して、偏微分 $(\partial f)/(\partial x_i) : \Omega \to C$が $(C^{r-1})'$級であるときに、fを $(C^r)'$級と呼ぶ。この時 r階の偏導関数 $(\partial^r f)/(\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_y}) : \Omega \to C$ $(i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\})$ が自然に定義でき、これは微分の順序には無関係に集合 $\{i_1, \ldots, i_k\}$ だけで決まる。このことは C上の任意の有界線形汎関数に対して、$\varphi((\partial^r)/(\partial u_{i_1} \cdots \partial u_{i_r})) = (\partial^r \varphi \circ f)/(\partial u_{i_1} \cdots \partial u_{i_r})$ であることと、C上の有界線形汎関数の集合は Cの点を分離すること、そして微積分の対応する定理を使えばすぐにわかる。次に Mを n次元の実 C^r多様体、$\mathcal{A}$を Mの微分構造を与える complete な atlas とする ([13],p.2)。則ち、$\mathcal{A}$は Mの座標近傍 (U, φ) の集合で極大なものである。ここで Uは Mの開集合、φは Uから $\mathbf{R}^n$の開集合の上への同相写像であり、(U_1, φ_1), (U_2, φ_2) を二つの座標近傍とすると$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$は $\mathbf{R}^n$の開

集合から $\mathbf{R}^n$の開集合上への C^r同相写像である。

定義 3.1. ([17],Definition 1.1.) fを Mから Banach 空間 Cへの写像とする。すべての $(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ に対して、$f\circ\varphi^{-1}$が $(C^r)'$級であるとき fを C^r級であると言う。

Cが有限次元の場合にはこれは普通の意味の C^r級と一致する。Φを Mからそれ自身の上への C^r微分同相写像とすると、任意の $(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ に対して $(\Phi(U),\varphi\circ\Phi^{-1}|U)$ も Mの座標近傍であり、$\mathcal{A}$が complete であるから $\mathcal{A}$に属する。従って、$f:M\to C$ が C^r級なら $f\circ\Phi\circ\varphi^{-1}$は $(C^r)'$級である。このことは $f\circ\Phi$が C^r級であることを意味する。次にΩ, Ω'を $\mathbf{R}^n$の開集合とし、ΨをΩ'からΩの上への C^r微分同相写像とする。$(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ で$\varphi(U)=\Omega$となるものに対して、$(U,\Psi^{-1}\circ\varphi)\in\mathcal{A}$ となる。従って $f:M\to C$が C^r級なら、$f\circ\varphi^{-1}\circ\Psi$は$\Omega'$で $(C^r)'$級になり、$F=f\circ\varphi^{-1}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega'$, $u=(u_1,\ldots,u_n)\in\Omega$に対して、

$$\frac{\partial(F\circ\Psi)}{\partial x_i}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_j}(\Psi(x))\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i}(x)$$

となる。また、$\Psi^{-1}:\Omega\to\Omega'$は$\Omega$の座標近傍になるから、$f\circ\varphi^{-1}$は上の定義の意味で C^r級になる。Cが C^*-環で $f,g:M\to C$が C^r級なら involution $f^*:x\mapsto f(x)^*$と積 $fg:x\mapsto f(x)g(x)$ も C^r級になる。このことは、ノルムを用いた直接的計算で容易に示すことができる。

最後に、従来からある微分可能性の概念との関係について述べる。Banach 空間への写像の微分可能性については、非線形関数解析学において研究されている。ここ

での議論は [11] の "非線形関数解析" の項を基にしている。E, Fを実 Banach 空間、Uを Eの開集合とし、(非線形) 写像 $f : U \to F$を考える。任意の $y \in E$に対して、ノルムに関する極限 $\lim_{t\to 0} t^{-1}(f(x+ty) - f(x)) = df(x,y)$ が存在する時、fは xで Gâteaux 微分可能、$df(x,y)$ を xでの fの Gâteaux 微分と言う。Eから Fへの有界線形写像全体の作る Banach 空間を $L(E,F)$ と書く。

$$\lim_{y\to 0} \|f(x+y) - f(x) - Ay\|/\|y\| = 0$$

となる $A \in L(E,F)$ が存在するとき fは xで Fréchet 微分可能、A を fの xでの Fréchet 微分と言う。fが xで Fréchet 微分可能であるための必要十分条件は fが xで Gâteaux 微分可能で $df(x,y)$ が yについて線形かつ $\sup_{y\neq 0} \|df(x,y)\|/\|y\|$ が有界になることである。xでの Fréchet 微分を $df(x)$ $(\in L(E,F))$ と書く。$df(\cdot) : U \to L(E,F)$ が連続であるとき fを (Fréchet の意味で) C^1級、$df(\cdot) : U \to L(E,F)$ が C^{r-1}級であるとき fを (Fréchet の意味で) C^r級であると呼び、r階微分を $d(d^{r-1}f)(x) = d^r f(x)$ によって帰納的に定義する。

$$d^r f(x) : E \times \cdots \times E \ (r\text{個}) \to F$$

は有界対称 r重線形写像である。Mを実 C^r多様体、Cを複素 Banach 空間とし、写像 $f : M \to C$を考える。Mの座標近傍 (U,φ) に対して、$\varphi^{-1}(U)$ は実 Banach 空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合である。fが我々の意味で C^r級 $(r \geq 1)$ なら、Cを実 Banach 空間と考えて、$f \circ \varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \to C$の $r-1$階までの偏微分が Gâteaux 微分可能になる。逆に任意の座標近傍 (U,φ) に対して、$F = f \circ \varphi^{-1}$が Gâteaux 微分可能で各 $y \in \varphi^{-1}(U)$ に対して、$x \in \varphi^{-1}(U) \mapsto dF(x,y)$ がノルムに関して連続なら fは C^1級になる。(実際、

$dF(x,e_i) = (\partial F/\partial x_i)(x)$.）特に、任意の (U,φ) に対して、$F = f \circ \varphi^{-1}$が Fréchet の意味で C^1級なら fは C^1級になる。（実際、$dF(x)e_i = dF(x,e_i) = (\partial F/\partial x_i)(x)$ より、$\|(\partial F/\partial x_i)(x) - (\partial F/\partial x_i)(y)\| = \|dF(x)e_i - dF(y)e_i\| \le \|dF(x) - dF(y)\|\|e_i\|$.）一般の C^r級の場合、

$$d^r F(x)(e_{i_1},\ldots,e_{i_r}) = \frac{\partial^r F}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_r}}(x)$$

となる。実際、$d^2F(\cdot) : U \to L(E, L(E,F))$ に対して、

$$d^2F(x)(e_{i_1},\cdot) = d(dF)(x)e_{i_1} = \frac{\partial dF}{\partial x_{i_1}}(x).$$

よって、

$$\begin{aligned} d^2F(x)(e_{i_1},e_{i_2}) &= \frac{\partial dF}{\partial x_{i_1}}(x)e_{i_2} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(dF(x)e_{i_2}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\frac{\partial F}{\partial x_{i_2}}(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(x). \end{aligned}$$

任意の rに対しても同様に帰納的に示すことができる。従って、任意の $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ に対して、$f \circ \varphi^{-1}$が Fréchet の意味で C^r級なら fは我々の意味で C^r級となる。逆が成り立つかどうかはわからない。Gâteaux 微分や Fréchet 微分と我々の意味での微分との関係はまだまだ研究する余地がある。

なお、Gâteaux 微分の定義は文献によって多少違うようである。[10] の ”線形作用素” の項には、”E, Fが複素 Banach 空間の場合 $df(x,y)$ は yに関して線形である。実の場合も線形性を仮定することが多い。” と書かれている。[7], Definition 8.2.1 には、$A = df(x,\cdot)$ が線形で連続と書いてあるが、連続性の仮定は誤りではないかと思う。何故なら、上で述べた [11] によれば、この時には Fréchet 微分になってしまうからである。

4. C^*-環の可微分束とその接続

ここでは C^*-環の可微分束とそこでの接続の定義を [17] に基づいて述べる。但し、[17] においては現れる C^*-環は可分で単位元を持つと仮定していたが、§2 で述べた環を扱う必要上、可分性も単位元を持つことも仮定しない。これらの仮定がなくても [17] の §1 の議論はそのまま成り立つ。(念のために書けば、§2 の (ii) の環 $B(S,\lambda)$ は可分で単位元を持つ。しかし、葉層 C^*-環は一般に単位元を持たない。また §2 の (ii) で連結でない群を扱う時に、可微分束を作るために環を大きくする必要があり、そのために可分でない環が現れてしまう。) 微分幾何学における従来の接続については [12] がわかりやすい。また [18] には接続についての直観的な解説がある。

以下、可微分と言えば常に C^∞級の微分可能性を表すことにする。Bを位相空間、Cを C^*-環 (可分とも単位元を持つとも仮定しない)、Mを Hausdorff かつ第 2 可算公理を満たす実可微分多様体、πを Bから M上への連続写像とする。更に、各 $x \in M$ に対して、$B_x = \pi^{-1}(x)$ が C^*-環であるとする。

定義 4.1. ([17], Definition 1.2)　Mの開集合 Uと$\pi^{-1}(U)$ から $U \times C$上への同相写像ψからなる対 (U,ψ) の族 $\mathcal{F}$が存在して、以下の性質を持つ時、(B,π,M,C) を C^*-環の可微分束とよぶ:

(i)　$\{U;(U,\psi) \in \mathcal{F}\}$ の和集合は Mである。

(ii)　$p_1 \circ \psi(b) = \pi(b)$　$(\forall b \in B)$.　但し、$p_1 : U \times C \to U$は射影である。

(iii)　$x \in U$に対して、$\psi_x : B_x \to C$を$\psi_x(b) = p_2 \circ \psi(b)$　$(b \in B_x)$ によっ

て定義する。但し、$p_2 : U \times C \to C$は射影である。この時、ψ_xは C^*-環としての同型である。

(iv) (U_1, ψ_1), $(U_2.\psi_2) \in \mathcal{F}$を $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ となるものとする。任意の可微分写像 $f : U_1 \cap U_2 \to C$に対して、$f_{1,2} : U_1 \cap U_2 \to C$を $f_{1,2}(x) = (\psi_1)_x \circ (\psi_2)_x^{-1} \circ f(x)$ $(x \in U_1 \cap U_2)$ によって定義すると、$f_{1,2}$も可微分写像になる。

写像$\xi : M \to B$が次の条件を満たすとき Bの可微分切断と呼ぶ; (i) $\pi(\xi_x) = x$ $(\forall x \in M)$, (ii) 任意の $(U, \psi) \in \mathcal{F}$に対して、$\tilde{\xi} : U \to C$を$\tilde{\xi}_x = \psi_x(\tilde{\xi}_x)$ $(x \in U)$ によって定義すると、$\tilde{\xi}$は可微分である。Bのすべての可微分切断全体の集合を$\Gamma(B)$ と表す。$\Gamma(B)$ は自然な意味で*-環になる。また$\Gamma(B)$ は左 $C^\infty(M)$-module でもある。TMを Mの tangent bundle, T^*Mを Mの cotangent bundle とし、$T_x^*M \otimes B_x$を実ベクトル空間としてのテンソル積とする。$T^*M \otimes B$を $\{T_x^*M \otimes B_x; x \in M\}$ の disjoint union とすると、上と同様に $T^*M \otimes B$の可微分切断が定義できる。$T^*M \otimes B$の可微分切断の作るベクトル空間を$\Gamma(T^*M \otimes B)$ と書く。$\Gamma(T^*M \otimes B)$ は involution を持ち、両側$\Gamma(B)$-module であり、同時に左 $C^\infty(M)$-module でもある。(各 B_xが単位元を持てば、$C^\infty(M) \subset \Gamma(B)$ であるが、単位元を持たない場合は$\Gamma(B)$-module であることと $C^\infty(M)$-module であることとは別のことである。) $C^\infty(M; \mathbf{R})$ を M上の実数値可微分関数全体の作る空間とする。([17],§1 では $C^\infty(M)$ と書いた。ここでは $C^\infty(M)$ は複素数値可微分関数全体を表す。) $\Gamma(TM)$ によって M上の可微分ベクトル場全体の

作るベクトル空間を表す。

$\mathcal{D}$を$\Gamma(B)$の$*$-部分環とする。[17],§1では接続の定義において、$\mathcal{D}_x = \{\xi_x; x \in \mathcal{D}\}$が$B_x$で稠密であると仮定したが、§2,(ii)の例を扱う必要上、$\mathcal{D}_x$の稠密性はここでは仮定しない。

定義 4.2. ([17], Definition 1.3.) $\mathcal{D}$を$\Gamma(B)$の$*$-部分環で、同時に$C^\infty(M)$-submoduleでもあるとする。線形写像 $\nabla : \mathcal{D} \to \Gamma(T^*M \otimes B)$ が次の性質を満足するとき、Bの接続と呼ぶ;

$$(i)\ \ \nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi, \qquad (ii)\ \ \nabla(\xi\eta) = (\nabla\xi)\eta + \xi(\nabla\eta),$$

$$(iii)\ \ \nabla(\xi^*) = (\nabla\xi)^*, \qquad (iv)\ \ (\nabla\xi)(X) \in \mathcal{D}.$$

ここで、$\xi, \eta \in \mathcal{D},\ f \in C^\infty(M; \mathbf{R}),\ X \in \Gamma(TM)$.

$(\nabla\xi)(X)$を$\nabla_X\xi$と書く。$Der(\mathcal{D}_x)$をB_xの$*$-derivation全体の作るベクトル空間、$E_x = \bigwedge^2 T_x^*M \otimes Der(\mathcal{D}_x)$を実ベクトル空間としてのテンソル積とする。$E$を$\{E_x; x \in M\}$のdisjopint unionとする。($E$は必ずしも局所自明なベクトル束にはならない。)
Mの局所座標$(x^1, \ldots, x^n)$に関して、$\Omega_x \in E_x$は

$$\Omega_x = \sum_{i,j=1}^{n} (dx^i \wedge dx^j) \otimes \delta_x^{ij}, \qquad \delta_x^{ij} \in Der(\mathcal{D}_x),\ \delta_x^{ij} = -\delta_x^{ji}.$$

の形で書ける。任意の$\xi \in \mathcal{D}$に対して、$x \mapsto \delta_x^{ij}(\xi_x)$が可微分であるとき切断$\Omega : M \to E$は可微分であると言う。$E$の可微分切断全体の作るベクトル空間を$A^2(Der(\mathcal{D}))$と書

く。$X,\ Y \in \Gamma(TM)$ に対して、線形写像 $R(X,Y): \mathcal{D} \to \mathcal{D}$を

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

によって定義する。Rは一般には $A^2(Der(\mathcal{D}))$ の元になるかどうかわからない。$R \in A^2(Der(\mathcal{D}))$ となる時、Rを ∇ の曲率と呼ぶことにする。([17], Definition 1.4.)

5. 可換な可微分力学系に付随する C^*-環の可微分束

この §では、Mを Hausdorff で第 2 可算公理を満たす C^∞級の n次元実多様体、G を Hausdorff で第 2 可算公理を満たす C^∞級の p次元実 Lie 群で $p < n$ となるものとする。ここでは Gを unimodular とも連結とも仮定しない。μを Gの右 Haar 測度、Δを Gの modular function とする。Diffeo(M) を M上の C^∞級の微分同相写像全体の作る群とする時、準同型$\alpha: G \to$ Diffeo(M) が Gの Mへの微分可能な作用であるとは、$M \times G$から Mへの写像 $(x,g) \mapsto \alpha_g(x)$ が C^∞級の写像となることである。G の M上への微分可能な作用αが与えられている時、(M,G) を可換な可微分力学系と呼ぶ。以下 (M,G) を可換な可微分力学系とし、$\alpha_g(x)$ のかわりに gx と書く。これから (M,G) に付随する groupoid と C^*-環の構成法について述べ、その後ある種の条件の下で (M,G) に付随する C^*-環の可微分束を構成する。

(i) 可換力学系に付随する groupoid と C^*-環。

位相空間 $\mathcal{G} = M \times G$ は次の演算により topological groupoid になる:

$$(gx, g')(x,g) = (x, gg'), \qquad (x,g)^{-1} = (gx, g^{-1}),$$

$$s(x,g) = (x,e), \qquad r(x,g) = (gx,e), \quad \text{for } x \in M,\ g,\ g' \in G.$$

但し、eはGの単位元である。$\mathcal{G}_x = \{(x,g) \in \mathcal{G}; g \in G\}$, $\mathcal{G}^x = \{(g^{-1}x,g) \in \mathcal{G}; g \in G\}$とおく。$\mathcal{G}$上の right Haar system $\{\nu_x; x \in M\}$ を $\nu_x = \delta_x \times \mu$ によって定義する([20],Chapter I, Example 2.5)。但し、δ_xは点 x で重みが 1 の M上の Dirac 測度である。$\mathcal{G}$上の写像$\gamma \mapsto \gamma^{-1}$による$\nu_x$の像を$\nu^x$と書く。$\{\nu^x; x \in M\}$ は $\mathcal{G}$上の left Haar system である。$C_c(\mathcal{G})$ は次の積と involution により*-環になる。

$$(f_1 * f_2)(\gamma) = \int f_1(\gamma')f_2(\gamma'^{-1}\gamma)\, d\nu^{r(\gamma)}(\gamma'),$$

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}, \qquad (f,\ f_1,\ f_2 \in C_c(\mathcal{G}),\ \gamma \in \mathcal{G}).$$

各 $x \in M$に対して、$C_c(\mathcal{G})$ の $\mathcal{H}_x = L^2(\mathcal{G}_x, \nu_x)$ 上への regular 表現ρ_xを

$$(\rho_x(f)\xi)(\gamma) = \int f(\gamma\gamma'^{-1})\xi(\gamma')\, d\nu_x(\gamma'), \quad (f \in C_c(\mathcal{G}),\ \xi \in \mathcal{H}_x,\ \gamma \in \mathcal{G}_x)$$

によって定義する。$f \in C_c(\mathcal{G})$ に対して、reduced norm $\|f\|$ を

$$\|f\| = \sup_{x \in M} \|\rho_x(f)\|$$

によって定義する。$C_c(\mathcal{G})$の reduced norm による完備化を $C_r^*(\mathcal{G})$と書き、$\mathcal{G}$の reduced C^*-環と呼ぶ ([20], Chapter II, Definition 2.8)。$f \in C_c(\mathcal{G})$, $\xi \in \mathcal{H}_x$, $(x,g) \in \mathcal{G}$に対して、

$$(\rho_x(f)\xi)(x,g) = \int_G f(g'gx, g'^{-1})\xi(x, g'g)\, d\mu(g')$$

である。更に、Dを Gの compact 集合で fの台 supp fが $M \times D$に含まれるとする。$I_D(\Delta^{1/2}) = \int_D \Delta^{1/2}(g)\, d\mu(g)$ とおけば、$\|\rho_x(f)\| \le I_D(\Delta^{1/2})\|f\|_\infty$が成り立つ。ここで$\|f\|_\infty$は supremum norm ($\sup_{x\in M} |f(x)|$) である。

これらの事実に基づいて、次のような $G\times G$ 上の関数の作る*-環を考える。$\tilde{\mathcal{C}}$を $G\times G$ 上の有界な C^∞級の関数 Kで次の性質を満たすもの全体の集合とする；各 K に対して Gの compact 集合 Dが存在して、supp K が $G\times D$に含まれる。$\tilde{\mathcal{C}}$の積と involution を

$$(K_1 * K_2)(g,g') = \int_G K_1(g, g''^{-1}) K_2(g''g, g''g')\, d\mu(g''),$$

$$K^*(g,g') = \overline{K(g'^{-1}g, g'^{-1})}$$

によって定義する。この積と involution によって$\tilde{\mathcal{C}}$は*-環になる。$\mathcal{H} = L^2(G,\mu)$ とおき、*-準同型$\rho : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を

$$(\rho(K)\xi)(g) = \int_G K(g,g')\xi(g'g)\, d\mu(g') \qquad (K \in \tilde{\mathcal{C}},\ \xi \in \mathcal{H},\ g \in G)$$

によって定義する。この時、$\|\rho(K)\| \le I_D(\Delta^{1/2})\|K\|_\infty$ が成り立つ。但し、Dは Gの compact 集合で supp $K \subset G\times D$である。これらの準備の下で、(M,G) に付随する C^*-環の可微分束を構成する。

(ii) (M,G) に付随する C^*-環の束。

群 Gが連結とは仮定しないために、これからの議論が複雑になる。また、群が離散の場合、すなわち Gの次元 pが 0 の場合にもここでの議論はそのまま通用する。単位元 eを含む Gの連結成分 G_eは Gの正規部分群であり、$\mathcal{N} = G/G_e$は可算離散群である。各 $m\in\mathcal{N}$に対応する Gの連結成分を G_mと書く。$m\in\mathcal{N}$に対して、次のような記号を使う。

$$\mathcal{G}_m = M\times G_m, \qquad \mathcal{G}_{m,x} = \mathcal{G}_m \cap \mathcal{G}_x,$$

$$\mathcal{H}_x^m = L^2(\mathcal{G}_{m,x}, \nu_x|\mathcal{G}_{m,x}), \qquad \mathcal{H}^m = L^2(G_m, \mu|G_m).$$

$P_x^m \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_x)$ を $\mathcal{H}_x^m$への射影、$P^m \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}^m$への射影とする。$C_c(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$を次の性質を持つ族$\zeta = \{f_m; m \in \mathcal{N}\}$全体の集合とする:

(i) $f_m \in C_c(\mathcal{G})\ \ \forall m \in \mathcal{N}$.

(ii) $\sup_{m\in\mathcal{N}} \|f_m\|_\infty < +\infty$.

(iii) Gの compact 集合 Dで $\operatorname{supp} f_m \subset M \times D\ \ (\forall m \in \mathcal{N})$ となるものが存在する。

$C_c(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$は成分ごとの和とスカラーとの積によって線形空間となり、また次のノルム $\|\zeta\|$ に関してノルム空間になる: $\|\zeta\| = \sup_{m\in\mathcal{N}} \|f_m\|_\infty$. $f_m \in C_c^\infty(\mathcal{G})\ \ (\forall m \in \mathcal{N})$ となる$\zeta = \{f_m; m \in \mathcal{N}\} \in C_c(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$全体の作る部分空間を $C_c^\infty(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$と書く。

補題 5.1 任意の$\zeta = \{f_m; m \in \mathcal{N}\} \in C_c(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$ に対して、

$$\tilde{\rho}_x(\zeta) = \sum_{m\in\mathcal{N}} \rho_x(f_m) P_x^m$$

は $\mathcal{B}(\mathcal{H}_x)$ の strong operator topology で収束し、

$$\|\tilde{\rho}_x(\zeta)\| \leq k_D I_D(\Delta^{1/2})\|\zeta\|$$

となる。但し、Dは $\operatorname{supp} f_m \subset M \times D\ \ (\forall m \in \mathcal{N})$ となる Gの compact 集合で、k_D は Dにだけ依存する定数である。

B_xを$\tilde{\rho}_x(\zeta)\ \ (\zeta \in C_c(\mathcal{G})^{\mathcal{N}})$ によって生成される $\mathcal{H}_x$上の C^*-環とする。$f \in C_c(\mathcal{G})$ に

対して、$\tilde{f} = \{f_m; m \in \mathcal{N}\} \in C_c(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$を $f_m = f$ $(\forall m \in \mathcal{N})$ によって定義すれば、$\tilde{\rho}_x(\tilde{f}) = \rho_x(f)$ となる。従って、$\rho_x(C_r^*(\mathcal{G}))$ は B_xの C^*-部分環である。特に、Gが連結なら $B_x = \rho_x(C_r^*(\mathcal{G}))$ である。

注意 (i) $\tilde{\rho}_x$は線形写像だが、*-準同型とは限らない。

(ii) B_xはノルムに関して可分とは限らない。

$\mathrm{Diffeo}_G(M)$ を次の性質を満たす$\alpha \in \mathrm{Diffeo}(M)$ 全体の集合とする：

各 $m \in \mathcal{N}$に対して、$g\alpha(x) = \alpha_m(gx) \quad \forall g \in G, \forall x \in M$ となる $\alpha_m \in \mathrm{Diffeo}(M)$ が存在する。

各$\alpha \in \mathrm{Diffeo}_G(M)$ に対して、上のα_mは一意的に決まる。また、$\mathrm{Diffeo}_G(M)$ は群になり、$(\alpha \circ \beta^{-1})_m = \alpha_m \circ (\beta_m)^{-1}$が任意の$\alpha$, $\beta \in \mathrm{Diffeo}_G(M)$ と $m \in \mathcal{N}$に対して成り立つ。Gが離散群の場合には、$\mathrm{Diffeo}_G(M) = \mathrm{Diffeo}(M)$ である。実際、G_mは一点からなる集合 $\{g_m\}$ だから、$\alpha_m(x) = g_m\alpha(g_m^{-1}x)$ $(x \in M)$ とおけば良い。$\alpha \in \mathrm{Diffeo}(M)$, $f \in C_c^\infty(\mathcal{G})$ に対して、$\tilde{\alpha}(f) \in C_c(\mathcal{G})$ を$\tilde{\alpha}(f)(x,g) = f(\alpha^{-1}(x), g)$ $((x,g) \in \mathcal{G})$ によって定義する。次に$\alpha \in \mathrm{Diffeo}_G(M)$, $\zeta = \{f_m; m \in \mathcal{N}\} \in C_c^\infty(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$に対して、$\bar{\alpha}(\zeta) \in C_c(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$ を$\bar{\alpha}(\zeta) = \{\tilde{\alpha}_m(f_m); m \in \mathcal{N}\}$ によって定義する。

補題 5.2 任意の$\alpha \in \mathrm{Diffeo}_G(M)$ と $x \in M$に対して、B_xから $B_{\alpha(x)}$上への C^*-環としての同型Φ_x^αで

$$\Phi_x^\alpha(\tilde{\rho}_x(\zeta)) = \tilde{\rho}_{\alpha(x)}(\bar{\alpha}(\zeta)) \qquad \forall \zeta \in C_c^\infty(\mathcal{G})$$

となるものが一意的に存在する。

各 $x \in M$, $f \in C_c^\infty(\mathcal{G})$ に対して、$K_x^f \in \tilde{\mathcal{C}}$ を $K_x^f(g,g') = f(g'^{-1}gx, g')$ によって定義する。各 $m \in \mathcal{N}$に対して、$\chi_m \in C^\infty(G \times G)$ を

$$\chi_m(g,g') = \begin{cases} 1 & \text{if } g'^{-1}g \in G_m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義する。各$\zeta = \{f_m; m \in \mathcal{N}\} \in C_c^\infty(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$に対して、$K_x^\zeta \in \tilde{\mathcal{C}}$を $K_x^\zeta = \sum_{m \in \mathcal{N}} K_x^{f_m}\chi_m$によって定義する。但し、$K_x^{f_m}$と$\chi_m$の積は各点ごとの積を表す。$\mathcal{C}_x$を K_x^ζ $(\zeta \in C_c^\infty(\mathcal{G})^{\mathcal{N}})$ によって生成された$\tilde{\mathcal{C}}$の*-部分環、C_xを$\rho(K)$ $(K \in \mathcal{C}_x)$ によって生成された $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の C^*-部分環とする。C_xは可分とは限らない。

補題 5.3　各 $x \in M$に対して、B_xから C_x上への*-同型$\tilde{\psi}_x$で

$$\tilde{\psi}_x(\tilde{\rho}_x(\zeta)) = \rho(K_x^\zeta) \qquad (\forall \zeta \in C_c^\infty(\mathcal{G})^{\mathcal{N}})$$

となるものが一意的に存在する。

群 Gの $\mathcal{H}$上への右正則表現を Rとする。則ち、$(R_g\xi)(g') = \xi(g'g)$ $(\xi \in \mathcal{H}\ \ g,\ g' \in G)$ である。各 $x \in M, g \in G_e$に対して、C_xから C_{gx}上への*-同型$\alpha(x,g)$を$\alpha(x,g)(a) = R_g a R_g^*$ $(a \in C_x)$ によって定義できる。上の gは G_eの元であって、一般の G の元に対して$\alpha(x,g)$ は定義できない。各$\alpha \in \mathrm{Diffeo}_G(M)$ に対して、$\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_{\alpha(x)}$ $(x \in M)$ が成り立つ。よって、任意の $x \in M$に対して $C_x = C_{\alpha(x)}$である。

定義 5.4　(i) Uを Mの連結な開集合、Sを単位元 eを含む G_eの開集合、Tを 0 を含む $\mathbf{R}^{n-p}$の開集合、φ を Uから $S \times T$上への C^∞級の微分同相写像とする。(U,φ) が

次の条件を満足する時、(M, G) の local cahrt と呼ぶ:

$$\varphi^{-1}(g,t) = g\varphi^{-1}(e,t) \qquad \forall (g,t) \in S \times T.$$

(ii) $\sigma : \mathbf{R}^{n-p} \to \mathrm{Diffeo}_G(M)$ を微分可能な作用とする。則ち、σは群の準同型で $M \times \mathbf{R}^{n-p}$から Mへの写像 $(x,t) \mapsto \sigma_t(x)$ が C^∞級であるとする。local chart (U, φ) が次の条件を満足する時、compatible with σ とよぶ:

$$\varphi^{-1}(g,t) = \sigma_t(\varphi^{-1}(g,0)) \qquad \forall (g,t) \in S \times T.$$

微分可能な作用$\sigma : \mathbf{R}^{n-p} \to \mathrm{Diffeo}_G(M)$, σと compatible な local chart (U, φ) に対して、$x_0 = \varphi^{-1}(e,0)$ とおく。任意の $x \in U$で$\varphi(x) = (g,t)$ と表されるものに対して、$g^{-1}x = \sigma_t(x_0)$ だから $C_{g^{-1}x} = C_{x_0}$である。また*-同型$\alpha(x, g^{-1}) : C_x \to C_{g^{-1}x}$と$\tilde{\psi}_x : B_x \to C_x$が存在する。そこで、$x = \varphi^{-1}(g,t) \in U$に対して、$B_x$から C_{x_0}上への*-同型ψ_xを$\psi_x = \alpha(x, g^{-1}) \circ \tilde{\psi}_x$によって定義する。

命題 5.5. $\sigma : \mathbf{R}^{n-p} \to \mathrm{Diffeo}_G(M)$ を微分可能な作用、(U_1, φ_1) と (U_2, φ_2) をσと compatible な local chart とする。$x_i = \varphi_i^{-1}(e,0)$ とおき、$\psi_{i,x} : B_x \to C_{x_i}$を (U_i, φ_i) に関して上で定義した*-同型とする (i=1,2)。$U_1 \cap U_2$の連結成分 Uに対して、*-同型 $\psi_{2,x} \circ \psi_{1,x}^{-1} : C_{x_1} \to C_{x_2}$は Uの元 x とは無関係にすべて U上で同一である。

Bを $\{B_x; x \in M\}$ の disjoint union とし、写像$\pi : B \to M$を$\pi(a) = x \quad (a \in B_x)$によ

って定義する。(U,φ) をσと compatible な local chart 、$x_0=\varphi^{-1}(e,0)$, $\psi_x : B_x \to C_{x_0}$ を (U,φ) に関して上のように定義された*-同型とする。写像$\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times C_{x_0}$ を$\psi(a)=(x,\psi_x(a))$ $(a \in B_x)$ によって定義する。この時、ψは全単射である。σと compatible な local chart (U,φ) から上のようにして作られた対 (U,ψ) 全体の集合を$\mathcal{F}_\sigma$とする。命題 5.5 の (U_1,φ_1) と (U_2,φ_2) から作られた (U_1,ψ_1), $(U_2,\psi_2) \in \mathcal{F}_\sigma$に対して、*-同型$\alpha : C_{x_1} \to C_{x_2}$が存在して、$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(x,a)=(x,\alpha(a))$ $((x,a) \in U \times C_{x_1})$ となる。故に、$U \times C_{x_1}$の積位相からψ_1によって誘導される$\pi^{-1}(U)$ の位相と $U \times C_{x_2}$ の積位相からψ_2によって誘導される$\pi^{-1}(U)$ の位相は一致する。$\{U;(U,\psi) \in \mathcal{F}_\sigma\}$ の和集合が M全体となるとき、$\mathcal{F}_\sigma$が Mを覆うと呼ぶ。上のことから、$\mathcal{F}_\sigma$が Mを覆う時、πが連続で各 $(U,\psi) \in \mathcal{F}_\sigma$に対して$\psi$が同相写像となるような Bの位相が一意的に決まる。以下、Bにはこのような位相を考える。$\mathcal{F}_\sigma$が Mを覆い Mが連結なら、C_x $(x \in M)$ は互いに同型となる。このとき$\tilde{x} \in M$を一つ固定し、$C=C_{\tilde{x}}$とおく。各 $(U,\psi) \in \mathcal{F}_\sigma$に対して、$C_{x_0}$と Cの間の同型を一つ固定して、その同型により C_{x_0}と C を同一視する。但し、(U,ψ) は local chart (U,φ) から作られたもので、$x_0=\varphi^{-1}(e,0)$ とおく。この同一視のもとで、$\psi_x : B_x \to C$, $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times C$とみなす。まとめると、次の結果が得られる。

定理 5.6. Mが連結で、微分可能な作用$\sigma : \mathbf{R}^{n-p} \to \mathrm{Diffeo}_G(M)$ が与えられているとする。$\mathcal{F}_\sigma$が Mを覆うなら、上で構成した (B,π,M,C) は $\mathcal{F}_\sigma$に関して C^*-環の可微分束になる。この時、(U_1,ψ_1), $(U_2,\psi_2) \in \mathcal{F}_\sigma$と $U_1 \cap U_2$の連結成分 Uに対して、Cの

自己同型αで$\psi_{2,x}\circ\psi_{1,x}^{-1}=\alpha\quad(\forall x\in U)$となるものが存在する。

$f\in C_c^\infty(\mathcal{G})$, $m\in\mathcal{N}$に対して、$C_c^\infty(\mathcal{G})^{\mathcal{N}}$の元 $[f]_m=\{f_k;k\in\mathcal{N}\}$を $f_m=f$, $f_k=0\ (k\neq m)$によって定義する。更に、切断 $cs_m(f)_x:M\to B$を $cs_m(f)_x=\tilde{\rho}_x([f]_m)$によって定義する。この時、次のことが成り立つ。

定理 5.7　定理 5.6 の仮定のもとで、各 $f\in C_c^\infty(\mathcal{G})$と各 $m\in\mathcal{N}$に対して、$cs_m(f)$は$\mathcal{F}_\sigma$に関する可微分束 (B,π,M,C) の可微分切断になる。すなわち、$cs_m(f)\in\Gamma(B)$である。

6. おわりに

§5 で微分可能な可換力学系 (M,G) と微分可能な作用$\sigma:\mathbf{R}^{n-p}\to\mathrm{Diffeo}_G(M)$を考えた。$\mathcal{F}_\sigma$が Mを覆うということは、σが (M,G) に横断的に作用していると言い換えても良い。よって、§5 の結果をまとめると、Mが連結の時、微分可能な可換力学系 (M,G) に対して、その横断的な作用に付随した C^*-環の可微分束が存在して、自然な切断 $cs_m(f)$ $(f\in C_c^\infty(\mathcal{G}),m\in\mathcal{N})$ が微分可能になる。一般に、可換力学系に対して横断的な作用が存在するとは限らないし、また存在した場合には一つとは限らない。例えば、§2 の (i) の $(\mathbf{T}^2,F^\theta)$ に対しては、横断的な作用は数多く存在する。一方、§2 の (ii) の $(\mathbf{T}^2,G)$ に対しては、Sのもう一つの固有値に属する固有ベクトルを$\begin{pmatrix}1\\ \theta'\end{pmatrix}$とすれば、$\{F_t^{\theta'}\}$が横断的な作用になる。これ以外の横断的な作用が見つかっていな

いので、この例では横断的な作用はただひとつかもしれない。これも興味ある問題である。

一般の場合にもどって、Gが連結でない(離散の場合も含む)時には、各 $x \in M$ に対して B_xの$*$-部分環 $\{cs_m(f)_x; f \in C_c^\infty(\mathcal{G}),\ m \in \mathcal{N}\}$ はノルムに関して稠密ではないが、 weak operator topology では稠密になっている。Gが連結の時は、ノルムに関して稠密である。従って、$\Gamma(B)$ の$*$-部分環であり同時に $C^\infty(M)$-submodule ともなる $\{cs_m(f); f \in C_c^\infty(\mathcal{G}), m \in \mathcal{N}\}$ を含む最小の集合を $\mathcal{D}$とした時、$\mathcal{D}$を定義域とする接続は $C_r^*(\mathcal{G})$ の構造を反映すると思われる。これからの課題として、こような接続で様々な曲率を持つものを実際に作り、特性類や Yang-Mills 接続を用いたゲージ理論などの微分幾何学的手法をそれらに適用することにより、§2 で述べた環の構造を研究していきたい。

参考文献

[1] M. F.Atiyah, "K-theory," Addison-Wesley, California, 1988.

[2] M.-D. Choi and G. A. Elliot, *Density of the self-adjoint elements with finite spectrum in an irrational rotation C^*-algebras*, Math. Scand. 67(1990), 73-69.

[3] A. Connes, *Sur la théorie non commutative do l'integration*, Lecture Notes in Math. 725, pp.19-143. Springer-Verlag, New York, 1979.

[4] A. Connes, *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Sympos. Pure Math. 38(1982), 521-628.

[5] A. Connes, *C^* algebrès et géométrie différentielle*, C. R. Acad. Sc. Paris 290(1980), 559-604.

[6] A. Connes and M. A. Rieffel, *Yang-Mills for non-commutative two-tori*, Contemporary Math. 62(1987), 237-266.

[7] L. Debnath and P. Mikusiński, "Introduction to Hilbert spaces with applications," Academic Press, San Diego, 1990.

[8] T. Fack et G. Skandalis, *Sur les représentations et idéaux de la C^*-algèbre d'un feuilletage*, J. Operator Theory 81(1982), 95-129.

[9] M. Hilsum and G. Skandalis, *Stabilité des C^*-algèbres de feuilletages*, Ann. Inst. Fourier(Grenoble) 33(1983), 201-208.

[10] 日本数学会編集、"岩波　数学辞典　第2版," 岩波書店、東京、1972.

[11] 日本数学会編集、"岩波　数学辞典　第3版," 岩波書店、東京、1985.

[12] 小林昭七、"接続の微分幾何とゲージ理論,"　裳華房、東京、1989.

[13] S. Kobayashi and K. Nomizu, "Foundations of differential geometry, Vol. 1," John Wiley & Sons, New York, 1963.

[14] C. C. Moore and C. Schochet, "Global analysis on foliated spaces," Springer-Verlag, New York, 1988.

[15] M.O'uchi, *On a C^*-algebras containinig irrational rotation algebras*, unpublished, 1988.

[16] M. O'uchi, *A C^*-algebra of a reduction of a holonomy groupoid*, Math. Japonica 35(1990), 493-508.

[17] M. O'uchi, *On a one-parameter group of automorphisms associated with a flat connection in a differentiable bundle of C^*-algebras*, Math. Japonica 36(1991), 1179-1191.

[18] 大森英樹、"力学的な微分幾何,"　日本評論社、東京、1989.

[19] M. A. Rieffel, *C^*-algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. Math. 93(1981), 415-429.

[20] J. Renault, "A groupoid approach to C^*-algebras(Lecture Notes in Math. 793)," Springer-Verlag, Berlin-Hidelberg-New York, 1980.

[21] M. A. Rieffel, *Continuous fields of C^*-algebras coming from group cocycles and actions*, Math. Ann. 283(1989), 631-643.