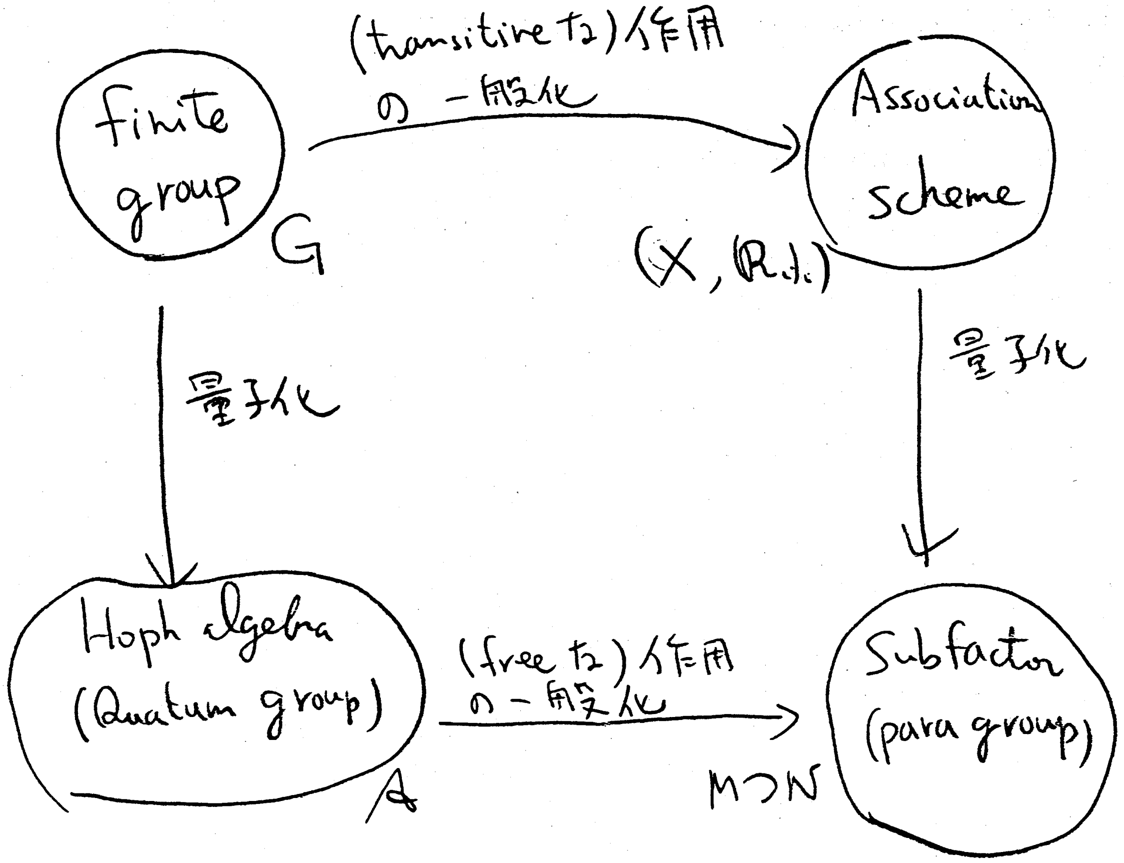
数理解析研究所講究録
第 840 巻 1993 年 20-31

Association scheme, Terwilliger algebras and Takesaki duality

北海道大学・理　綿谷 安男
(Yasuo Watatani)

0 はじめに

次の図式を考えてみよう。



有限群Gの有限集合Xへのtransitiveな作用を組み合わせ論的に一般化したのがAssociation scheme $(X, (R_i)_{0\le i\le d})$ だと考えよう。

さてこのフレーム全体を量子化してみると何がでてくるかを考えたい。(有限)群Gが量子化されたのが(有限次元)量子群Aだとしても、(有限)集合Xの量子化は何になるであろう。そしてその「作用」の量子化とは何であろうか？これらの問いに答えると自然に作用素環論のsubfactorの理論になるのである。

①作用素環

ヒルベルト空間H上の有界線型作用素全体をB(H)とする。B(H)の*-subalgebraで適当な位相について閉じたものを作用素環という。だから作用素環とはほぼ「無限次元の行列環」と思っていただいてよい。特にweak operator topologyについて閉じたものをvon Neumann環といい、operator norm topologyで閉じたものをC*-環という。くわしいこと知りたいなら竹崎[6]やKadison-Ringrose[3]をみてもらうえ

なように。代数幾何学のレベルではよく知られているように，可換環 $\mathcal{A}$ と幾何学的空間 X は，双対の関係にあってお互いに他を規定している。幾何学的空間 X 上の座標関数のつくる可換環が $\mathcal{A}$ であるし，逆に可換環 $\mathcal{A}$ のスペクトラムとして X が再現できる。もっとも関数に要求するなめらかさの程度によって色んなカテゴリーがありえるが。

今 X を compact T_2 空間とし，$\mathcal{A} = C(X)$ を X 上の連続関数全体とする。すると $\mathcal{A} = C(X)$ は自然に可換な C^* 環になる。逆に 1 をもつ可換な C^* 環 $\mathcal{A}$ に対して ある compact T_2 空間 X が存在して $\mathcal{A}$ は $C(X)$ と同型になる。この意味で

> 非可換な C^* 環は局所コンパクト空間の量子化だ。

これはずっと昔に Gelfand–Naimark によって示された定理で別段新しいものではない。作用素環論は元々量子力学を扱う数学として生まれてきたところがあり，不思議でも何でもない。作用素環の創始者 von Neumann 以来のことだから。

次に$(X, \mathcal{B}, \mu)$を測度空間とし，$A = L^\infty(X, \mu)$をX上の本質的有界可測関数全体とする。すると$A = L^\infty(X, \mu)$は自然に可換なvon Neumann環になる。逆に可換なvon Neumann環Aに対してある測度空間$(X, \mathcal{B}, \mu)$が存在し，Aは$L^\infty(X, \mu)$と同型になる，この意味で

$\boxed{\text{非可換な von Neumann 環は測度空間の量子化だ}}$

$\boxed{2}$ Subfactors

有限群Gの有限集合Xへのtransitiveな作用の組み合わせ論的一般化がAssociation schemeであった。この場合有限集合Xが幾何学的空間なのでそれを量子化してvon Neumann環Mをとろう。しかしこれではまだGの「作用」を量子化することにはなっていない。それを定式化するにはJones [2]により始められたsubfactorの理論が必要になる。

$\boxed{\text{Def}}$ von Neumann環Mが<u>Factor</u>であるとはその中心$Z(M)$がスカラーのみからなることである。この時Mのσ-weak closed idealは0かMになるという意味で

Mが「単純」であることと同値である。

$\boxed{\text{Def}}$ von Neumann環Mが $\underline{\mathrm{II}_1\text{型 factor}}$ とは

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① Mはfactorであって

② $\exists\, tr : M \longrightarrow \mathbb{C}$ traceとよばれる正の汎関数

$$\text{s.t.} \begin{cases} tr(xy) = tr(yx) & \forall x, y \in M \\ tr(1) = 1 \end{cases}$$

(例) $M = \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i\right)''$, $A_i \cong M_2(\mathbb{C})$

と2×2行列環 $M_2(\mathbb{C})$ の無限個のテンソル積をtraceによるGNS表現した空間でσ-weakly closureをとったもの。はhyperfiniteとよばれる II_1 型factorになる

$\boxed{\text{Def}}$ 1つの II_1 型factor Mだけではなく、その中のsubfactor NのMへの包含関係 $N \subset M$ を考える。この時 Jonesのindex

$$[M:N] \underset{\text{def}}{=} \dim_N L^2(M) \quad (\text{coupling constant})$$

は大体MをN-moduleとみた時のmodule次元ではあるが値を $[0, \infty]$ にとることに注意する。

$\boxed{\text{Theorem}}$ (Jones) II_1-factor M の subfactor $N \subset M$ の Jones index $[M:N]$ のとりうる値は $\{4\cos^2\frac{\pi}{n} \mid n=3,4,5,\cdots\} \cup (4,\infty)$ である.

$\boxed{3}$ Association scheme と subfactor

上の有名な定理以降 subfactor の理論は驚く程発展した。$[M:N] \leqq 4$ の分類, paragroup, 自己同型の分類等色んな話があるが, 幸崎氏や河東氏がどこかで色々かいているのでそれらをみてもらうことにする。ここでは Association scheme との関連する所のみを考える.

有限群 G の有限集合 X への transitive な作用の組み合わせ論的一般化が Association scheme であった。それを量子化すると subfactor $N \subset M$ になるのである。それを例でもって検証しよう.

$\boxed{\text{例}}$ G : 有限群

N : II_1-factor

$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N$: outer action

$M = N \rtimes_\alpha G$ (接合積) i.e. N を係数にもつ G 上の群環に α でひねった積を入れたもの

M は II_1-factor になり, N はその subfactor で Jones index $[M:N] = G$

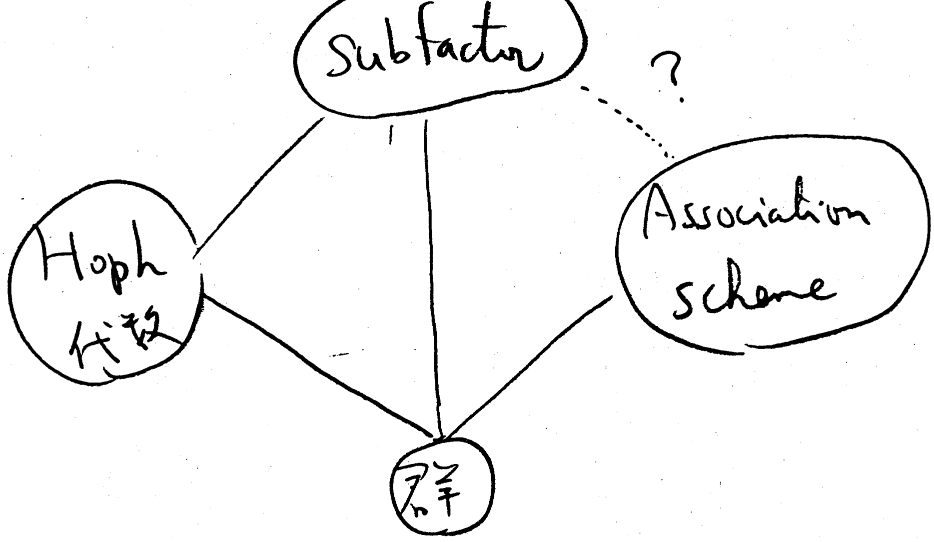
$\boxed{\text{例}}$ 有限群Gが有限集合Xにtransitiveに作用しているとする。この時Gはvon Neumann環 $\ell^\infty(X)$ に自然に作用する。これを使って適当なouter作用により

$$\begin{cases} M = (R\otimes \ell^\infty(X)) \rtimes G \\ \quad\cup \\ N = R \qquad\qquad\quad \rtimes G \end{cases}$$

(ここでRはhyperfinite II_1-factor)

と接合積をつくる。するとMは II_1-factorになり $N\subset M$ はそのsubfactorになる。この時後で示すが、対応するAssociation schemeのBose-Mesner algebraの構造が $N\subset M$ から読みとれることができるのである。

以上みてきたように有限群Gを拡張する方向には色々あった



そこでこれらに現われる共通の代数構造を表にして眺めてみよう。

	群 G	Hopf代数 A	Association scheme とそのBose-Mesner代数 A
積	$m: G\times G \to G$ $(x,y)\mapsto xy$	$m: A\otimes A \longrightarrow A$ product $\Delta: A \longrightarrow A\otimes A$ co-product	$m: A\otimes A \longrightarrow A$ matrix product $A\cdot B$ $\mu: A\otimes A \longrightarrow A$ Hadamard product $A\circ B$
単位元	単位元 $1\in G$	$\eta: \mathbb{C} \longrightarrow A$ unit $\varepsilon: A \longrightarrow \mathbb{C}$ co-unit	$I=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ は行列積のunit $J=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ はアダマール積のunit $Tr: A \longrightarrow \mathbb{C}$ は・のco-unit $\varepsilon: A \longrightarrow \mathbb{C}$ は∘のco-unit ここで $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$ $\varepsilon(A)=\sum_{i,j}^{n} A_{i,j}$
逆元	$S: G \longrightarrow G$ $g \longmapsto g^{-1}$	$S: A \longrightarrow A$ antipode は 次をみたす $A \xrightarrow{\Delta} A\otimes A \xrightarrow{S\otimes id} A\otimes A \xrightarrow{m} A$ $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \xrightarrow{\eta} A$	$S: A \longrightarrow A$ 転置 $S(A)=A^t$ は 次をみたす $A \xleftarrow{\mu} A\otimes A \xrightarrow{S\otimes id} A\otimes A \xrightarrow{m} A$ $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \xleftarrow{Tr} A$ つまり $\varepsilon(\overline{B}\circ A) = Tr(B^{*}A)$ $\Leftrightarrow \varepsilon(B\circ A) = Tr(B^{t}A)$

実はsubfactor $N \subset M$ の場合にも同様なものがある。

$\boxed{\text{Def}}$ (Ocneanu [4])

M: II_1-factor

$N \subset M$: subfactor

$[M:N] < \infty$ で $N' \cap M = \mathbb{C}$ と仮定する

$e_N : L^2(M, tr) \longrightarrow L^2(N, tr)$: Jones projection

$\langle M, e_N \rangle$ を M と e_N でつくられた II_1-factor (basic 構成)

$\mathcal{A} = N' \cap \langle M, e_N \rangle = \{ x \in \langle M, e_N \rangle \mid \forall n \in N \ xn = nx \}$

この $\mathcal{A}$ には Association scheme の Bose-Mesner alg のように2つの積 $\cdot$ と $\circ$ が入いる

$$\begin{cases} \left(\sum_i a_i e_N b_i\right) \cdot \left(\sum_j c_j e_N d_j\right) = \sum_i \sum_j a_i E_N(b_i c_j) e_N d_j \\ \left(\sum_i a_i e_N b_i\right) \circ \left(\sum_j c_j e_N d_j\right) = \sum_i \sum_j \frac{1}{[M:N]} a_i c_j e_N d_j b_i \end{cases}$$

この時 I は $(\mathcal{A}, \cdot)$ の単位元になり

$J = [M:N] e_N$ は $(\mathcal{A}, \circ)$ の単位元になる.

$\boxed{\text{例}}$ 群 G が有限集合 X に transitive に作用しているときそれからつくられた Association scheme $(X, (R_i)_i)$ の Bose-Mesner algebra $\mathcal{A}$ の2つの積 $\cdot$ と $\circ$ は, 対応する II_1-型 factor $M = (R \otimes \ell^\infty(X)) \rtimes G$ とその subfactor $N = R \rtimes G$ からつくられた $\mathcal{A} = N' \cap \langle M, e_N \rangle$ での上の2つの積 $\cdot$ と $\circ$ と対応する

またJaegerが講演で述べていたspin modelとAssociation schemeの所にでてくる色んな関係式，例えば $\boxed{AJ = JA = \varepsilon(A) J}$ $(A \in \mathcal{A})$ はsubfactor $N \subset M$ の設定でも意味があり，この例では，それはJones projection e_N との関係式

$$\boxed{x e_N = e_N x = \varepsilon(x) e_N} \quad (x \in \mathcal{A})$$

となりここでも成立している。これは言いかえるとJones projection e_N がrelative commutant algebra $\mathcal{A} = N' \cap \langle M, e_N \rangle$ の中でminimalかつcentralなprojectionであるという事実に対応している。（ただし $N' \cap M = \mathbb{C}$ の時だが）

④ 竹崎の双対定理とTerwilliger algebra

局所コンパクトアーベル群Gとみればそのdual group $\hat{G}$ が存在してまた局所コンパクトアーベル群になり，そこではポントリャーギンの双対定理 $\hat{\hat{G}} \cong G$ が成立し，2回dualをとると元にもどる。さてHopf代数やAssociation schemeのBose-Mesner algでもよく似たdualityは存在している。では作用素環の場合にはどうかというのが次の竹崎の双対定理である

$\boxed{\text{Theorem}}$ (竹崎 [5])

Mを von Neuman 環，Gを局所コンパクトアーベル群，$\alpha: G \to \mathrm{Aut}\, M$ を action とする．その接合積 $M \rtimes_\alpha G$ 上にはさらに $\hat{G}$ の action $\hat{\alpha}: \hat{G} \to \mathrm{Aut}(M \rtimes_\alpha G)$ が存在し

$$(M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong M \otimes B(L^2(G))$$

このように2回接合積をとると $B(L^2(G))$ を除いて元のMを復元する。ここで余りの $B(L^2(G))$ は実は G と $\hat{G}$ の交換関係からつくられる algebra になっている。これは subfactor の場合にも対応するものが存在し，2回 basic 構成をすると

$$\langle\langle N, e_N \rangle, e_M \rangle \cong N^{([M:N])}$$

ここでもし $n=[M:N]$ が整数なら $N^{(n)} \cong N \otimes M_n(\mathbb{C})$ である．
この時 $B(L^2(G))$ に対応するのが

$$N' \cap \langle M, e_N \rangle \text{ と } M' \cap \langle\langle M, e_N \rangle, e_M \rangle$$

でつくられた algebra である。群Gが transitive に有限集合Xに作用する場合につくられた特別な subfactor $N \subset M$ の場合には，ちょうどこれが対応する Association scheme の Terwilliger algebra[7]と一致する。それ以上のことはまだよくわからないが何か面白そうである。

Reference

[1] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatrics I, Association scheme, Benjamin, 1984

(2) V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25

(3) R. Kadison and J. Ringrose, Fundamental of the Theory of Operator Algebras, Academic Press 1986

(4) A. Ocneanu, Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors, University of Tokyo Seminary Note 45, (1991)

[5] M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. 131, (1973) 249-310

(6) M. Takesaki, Theory of Operator algebra I, Springer-Verlag, (1979)

(7) P. Terwilliger, The constituent algebra of an association scheme, preprint