数理解析研究所講究録
第840巻 19[illegible]年 82-87

On 2-reducible cycles in graphs

大阪市大工　岡村治子(Haruko Okamura)

$G=(V(G),E(G))$を辺に向きのない有限グラフ（多重辺を含んでもよい）とし、$V(G)$を点の集合、$E(G)$を辺の集合とする。サイクルまたはパスは、辺は高々一回しか通らないが点は二回以上通ってもよいとする。

定義 1. G が k-辺連結 (k-edge-connected)

$\longleftrightarrow$ k 本以上の辺を除去しないと G は非連結にならない。

2. G の辺連結度は k ($\lambda(G)=k$ で表す)

$\longleftrightarrow$ G は k-辺連結であるが、$(k+1)$-辺連結ではない。

3. k を固定して、$\lambda(G)\geqq k$ のとき、G のサイクル（またはパス）C が 2-reducible

$\longleftrightarrow$ $\lambda(G-E(C))\geqq k-2$

(i.e. G から C の辺を除いたグラフが $(k-2)$-辺連結)。

例 1. 図-1のグラフを G とすると、$\lambda(G)=4$ 。図-2の波線

で示されるサイクル C は 2-reducible であるが、図-3のサイクル D は 2-reducible ではない。

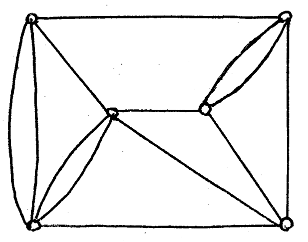


図-1 G

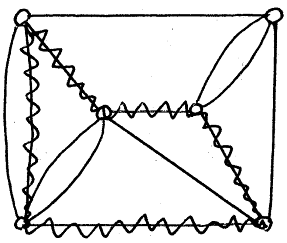


図-2 C

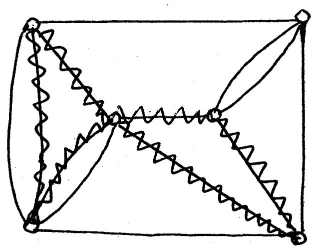
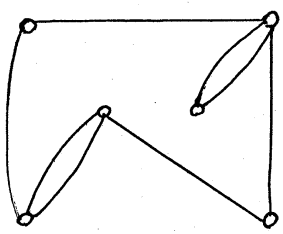
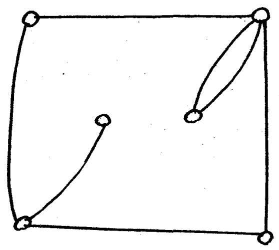


図-3 D



G-E(C)



G-E(D)

$X,Y \subseteq V(G)$, $X \cap Y = \phi$ のとき、$\partial(X,Y;G)=\partial(X,Y)$ は、X の点と Y の点を結ぶ辺からなる集合とし、次のように定義する。
$\partial(X;G)=\partial(X):=\partial(X,V(G)-X)$, $e(X,Y):=|\partial(X,Y)|$, $e(X):=|\partial(X)|$。

$\lambda(G) \geqq k$, f_0, f_1, f_2 は G の辺とする。次のことが既知である。

P1. f_1 と f_2 が接合するとき([3]、[2])、または k が偶

数のとき[4]、G は f_1 と f_2 を通る 2-reducible cycle をもつ。

P2. k が奇数のとき、次のようなグラフ G を構成できる[1]。G は x と y を通る任意のサイクルが 2-reducible でないような距離 3 の 2 点 x と y をふくむ。

特に、f_1, f_0, f_2 が図-4 のように連続しているとき、$T=\{v_1, v_2, u_1, u_2\} \subseteq V(G)$ とすると、

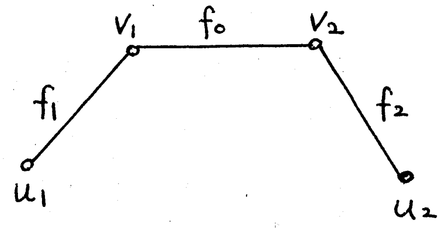


図-4

P3. k が偶数で、$X \cap T=\{v_1, u_2\}$ である各 $X \subseteq V(G)$ に対して $e(X) \geqq k+2$ のとき、G は f_1, f_2, f_3 を通る 2-reducible cycle を含む[5]。

P4. k が奇数のとき、f_1 と f_2 を通る 2-reducible cycle をもたないグラフを特徴づけることができる[6]。

ここでは、f_1, f_0, f_2 を通る 2-reducible cycle をもたないグラフを特徴づける。

定理 1. (i) $k \geqq 5$ は奇数, $\lambda(G) \geqq k$, $T=\{v_1, v_2, u_1, u_2\} \subseteq V(G)$, $f_0 \in \partial(v_1, v_2)$, $f_i \in \partial(v_i, u_i) - f_0$ $(i=1,2)$,

(ii) $X \cap T=\{v_1, u_2\}$ である各 $X \subseteq V(G)$ に対して、$e(X) \geqq k+2$,

が成り立つとき、次の (1) と (2) は同値である。

(1) G は f_1, f_0, f_2 を含む 2-reducible cycle をもたない。

(2) $n \geqq 2$ に対して次のような $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ がある。

$V(G)=X_1 \cup ... \cup X_n \cup Y_1 \cup .. \cup Y_n$ (disjoint union),

$v_1 \in X_1$, $v_2 \in Y_n$, $e(X_1)=e(Y_n)=k+1$,

$e(X_i)=e(Y_j)=k$ $(2 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n-1)$,

$e(X_i, X_{i+1})=e(Y_i, Y_{i+1})=(k-1)/2$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$,

$e(X_i, Y_i)=1$ $(2 \leqq i \leqq n-1)$,

を満たし、次の (a) または (b) が成り立つ。

(a) $u_1 \in Y_1$, $u_2 \in X_n$, $e(X_1, Y_1)=e(X_n, Y_n)=(k+1)/2$.

(b) $u_1 \in X_n$, $u_2 \in Y_1$, $e(X_1, Y_1)=e(X_n, Y_n)=(k-1)/2$.

系 2. (i) $k \geqq 5$ 奇数, $\lambda(G) \geqq k$, $T=\{v_1, v_2, u_1, u_2\} \subseteq V(G)$, $f_0 \in \partial(v_1, v_2)$, $f_i \in \partial(v_i, u_i) - f_0$ $(i=1,2)$,

(ii) $X \subseteq V(G)$, $X \cap T=\{v_1, u_1\}$ ならば、$e(X) \geqq k+1$,

(iii) $X \subseteq V(G)$, $X \cap T=\{v_1, u_2\}$ ならば、$e(X) \geqq k+3$,

が成り立つとき、f_1, f_0, f_2 を通る 2-reducible cycle が存

在する。

図-5の2つのグラフは、k=5で定理1の(2)を満たしている。

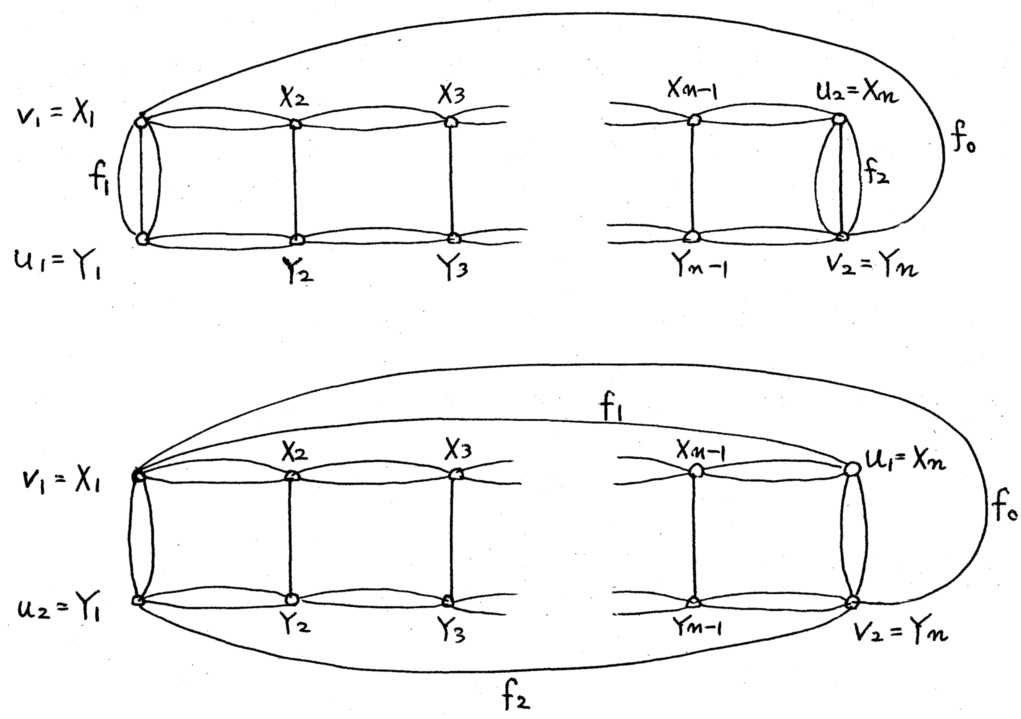


図-5

references

1. A. Huck and H. Okamura, Counterexamples to a conjecture of Mader about cycles through specified vertices in n-edge-connected graphs, Graphs and Combinatorics 8 (1992), 253-258.

2. W. Mader, Paths in graphs, reducing the edge-

connectivity only by two, Graphs and Combinatorics 1 (1985), 81-89.

3. H. Okamura, Paths and edge-connectivity in graphs, J. Combinatorial Theory Ser. B 37 (1984),151-172.

4. H. Okamura, Paths in k-edge-connected graphs, J. Combinatorial Theory Ser. B 45 (1988), 345-355.

5. H. Okamura, Cycles containing three consecutive edges in 2k-edge-connected graphs, Topics in Combinatorics and Graph Theory (eds. R. Bodendiek and R. Henn), Physica-Verlag Heiderberg (1990),549-553.

6. H. Okamura, 2-reducible cycles containing two specified edges in (2k+1)-edge-connected graphs, to appear.