数理解析研究所講究録
第 840 巻 19[illegible]年 98-105

Graph Invariant と　Link Invariant

九大・理　川越謙一（Kenichi Kawagoe）

前半は根上生也氏（横浜国・教）との共同研究。
後半は宗政昭弘氏（九大・理）と綿谷安男氏（北大・理）との共同研究。

1　Graph Invariant

ここで対象とするグラフ $G=(V(G),E(G))$ は向きのついていない、多重辺やループをもってもよい有限なグラフとする。グラフの不変量としてTutte多項式がある。Tutte多項式はグラフの性質をよく反映しており、地図の塗分けの問題やグラフの一筆書きの問題などグラフ理論特有の問題に貢献している。またNegami多項式というグラフの不変量もある。実はTutte多項式とNegami多項式は同値であることが分かっているので、ここでは帰納的に定義されたNegami多項式 $f(G;t,x,y)$ を用いる。Negami多項式 $f:\{\text{graph}\}\to\mathbf{Z}[t,x,y]$ は次の (i),(ii) を満たすグラフの多項式不変量である。

$$(i)\quad f(\overbrace{\bullet\cdots\bullet}^{n\,\text{コ}})=t^n$$
$$(ii)\quad f(\succ\!\!-\!\!\prec)=xf(\times)+yf(\succ\ \prec)$$

(i) と (ii) を使ってNegami多項式は帰納的に計算できる。

de la HarpeとJonesにより定式化された統計力学モデルを用いたグラフの不変量について述べる。X を有限集合、$W=(w(\alpha,\beta))$ を $|X|\times|X|$ 複素対称行列とする。この2つの組 (X,W) をグラフのspin modelと言う。G の頂点 $V(G)$ から X への写像をstateと言う。state σ が与えられた時、頂点 u,v を両端にもつ辺 (u,v) に複素数 $w(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))$ を対応させると各辺に複素数が対応しているのでそれらの積を $<G|\sigma>$ と書く。そこで写像 $Z_W:\{\text{graph}\}\to\mathbf{C}$ を次で定義する。

$$Z_W(G)=\sum_{\sigma}<G|\sigma>$$

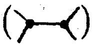
この $Z_W(G)$ はグラフ G の不変量となる。

I を $|X|\times|X|$ 単位行列、J を全ての成分が 1 の $|X|\times|X|$ 行列とし、$W_0 = xI + yJ$ とおく。即ち、

$$W_0 = \begin{pmatrix} x+y & y & \cdots & y \\ y & x+y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x+y \end{pmatrix}$$

この時、グラフの spin model (X, W_0) から構成される不変量 Z_{W_0} には次の関係式がある。

$$(iii)\quad Z_{W_0}(\overbrace{\bullet\cdots\bullet}^{n\,\text{コ}}) = |X|^n$$

(iv) $Z_{W_0}($$) = xZ_{W_0}($$) + yZ_{W_0}($$)$

これより、任意のグラフ G に対して $Z_{W_0}(G) = f(G; |X|, x, y)$ が成立することが分かる。次に W_1 を

$$W_1 = \begin{pmatrix} x+y & y & \cdots & y \\ y & z+y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & z+y \end{pmatrix}$$

で定め、グラフの spin model (X, W_1) を考察する。そして下図の $\tilde{f}$ に対応するグラフの不変量を考える。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} & \longrightarrow & Z_{W_1} \\ \downarrow & & \downarrow z = x \\ f & \xrightarrow{t=|x|} & Z_{W_0} \end{array}$$

すると $\tilde{f}$ は次のように f を用いて定義される。

$$\tilde{f}(G; t, x, z, y) = \sum_{U\subset V(G)} f(G-U; t-1, z, y)y^{|[U,\bar{U}]|}(x+y)^{e(U)}$$

但し、$G-U$ は U と U を端点にもつ辺を除いて得られるグラフ、$[U,\bar{U}]$ は頂点 $u\in U$,$v\in\bar{U}$ を両端にもつ辺全体の集合、$\bar{U}$ は U に含まれない頂点の集合、$e(U)$ は両端が U に属する辺全体の個数とする。この $\tilde{f}$ を拡張された Negami 多項式と呼ぶ。上の定義からだけではすぐには導かれないが、spin model の観点から次のことが分かる。

命題 1.1 $\tilde{f}(G;t,x,x,y) = f(G;t,x,y)$

これより $\tilde{f}$ は f の拡張になっていることが分かる。また $\tilde{f}$ は f とは異なる性質をもつことが分かる。その前に 2-isomorphic を定義する。2 つのグラフ G,G' が 2-isomorphic とは、つぎの (v),(vi) の有限回の操作で互いに移り合う時を言う。

$$
\begin{array}{ll}
(v) & G = H \cup K/(u_1 = v_1, u_2 = v_2) \leftrightarrow G' = H \cup K/(u_1 = v_2, u_2 = v_1) \\
(vi) & G = H \cup K/u_1 = v_1 \leftrightarrow G' = H \cup K/u_2 = v_2
\end{array}
$$

但し、 H,K は G,G' の部分グラフ、$u_1, u_2 \in H$,$v_1, v_2 \in K$ である。

命題 1.2 （根上）*G と G' が 2-isomorphic の時、$f(G;t,x,y) = f(G';t,x,y)$ が成り立つ。*

さて、我々の定義した $\tilde{f}$ の性質を調べると次のことが分かった。

定理 1.1 G をループ、孤立点をもたないグラフとする。この時、 G の最小次数は$\tilde{f}(G;t,x,z,y)$ の y に関する最小次数に等しい。

一般に 2-isomorphic の間の操作は最小次数を変えるので、次の系が得られる。

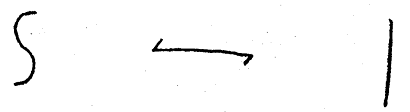
系 1.1 $\tilde{f}$ は *2-isomorphic* な不変量ではない。

2 Link Invariant

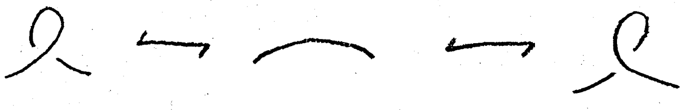
generalized spin model を定義する前に、Jones の意味での spin model の定義を述べる。spin model は link の不変量と関連しているので、結び目理論の準備を初めにする。link（絡み目）とは S^1 の disjoint union の $\mathbf{R}^3$（又は S^3）への埋め込みのことである。S^1 が 1 つの時は knot（結び目）と言う。特に向きを考える時は oriented link, oriented knot と言う。空間内にある link を、各交点が の形となるように平面上に表示したものを diagram と言う。このような表示方はいつでも存在するが一意で

はない。2 つの link L, L' が ambient isotopic とは、 L と L' の diagram が次の局所的な move の有限回の操作で移り合う時を言う。

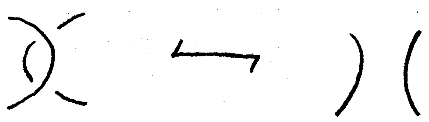
(O) topological move



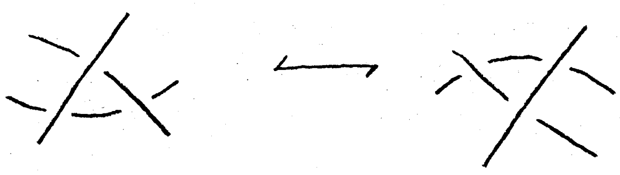
(I)



(II)



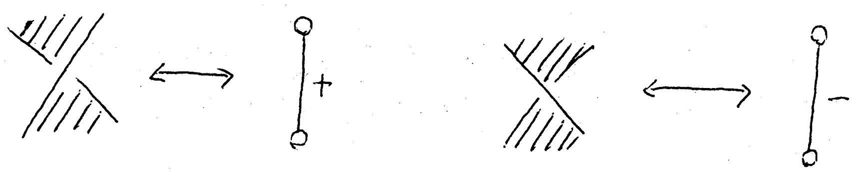
(III)



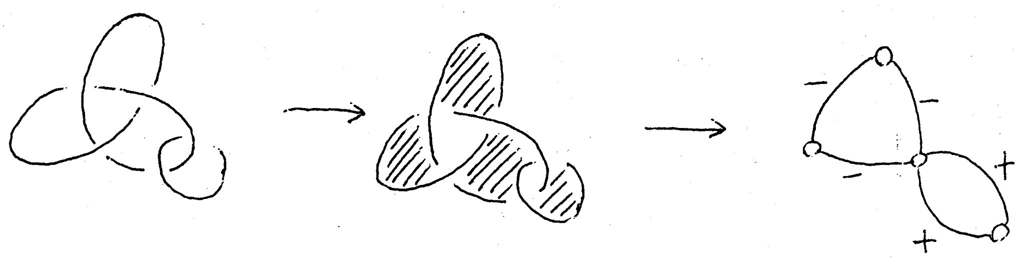
但し、書いていない所は同じ diagram とする。これらの move を Reide-meister move と言う。次に link の diagram から signed graph を下のようにして構成する。

(1) link の diagram から得られる各領域をチェッカー盤の様に塗る。この時、有界でない領域は白と決めておく。

(2) 黒い領域に頂点、交点に sighed edge を下図の様に対応させる。



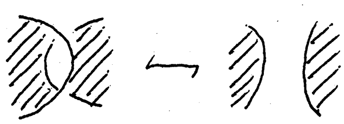
例 2.1

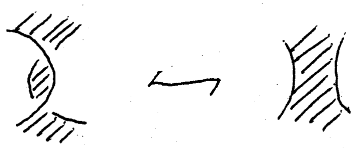


これより link の diagram L から signed graph が構成されたので、前半と同じ様に signed grahp から複素数への写像が作れる。即ち、$|X|$ を有限集合、$W_+ = (w_+(\alpha,\beta))$, $W_- = (w_-(\alpha,\beta))$ を $|X| \times |X|$ 複素対称行列とする。state σ が与えられた時、頂点 u, v を両端にもつ signed edge (u,v) と同じ sign をもつように複素数 $w_\pm(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))$ を対応させる。各辺に複素数が対応しているのでそれらの積を $< L|\sigma >$ と書き、写像 $Z : \{\text{link の diagram}\} \to \mathbf{C}$ を次で定める。

$$Z(L) = \sqrt{|X|}^{-b(L)} \sum_{\sigma} < L|\sigma >$$

但し、$b(L)$ は signed graph の頂点の個数とする。ここで $W_\pm$ を任意にとってきたのでは Z は link の不変量にはならない。例えば、Reidemeister move II で Z の値が変わらないためには下図の式を満足していれば良い。





$$w_+(\alpha,\beta)\, w_-(\alpha,\beta) = 1 \qquad \sum_{x} w_+(\alpha,x)\, w_-(x,\beta) = |X|\delta_{\alpha\beta}$$

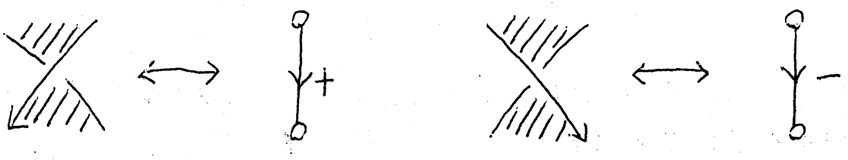
Reidemeister move II,III で Z の値が変わらないための条件が spin model である。

定義 2.1 （*Jones*）$|X|$ を有限集合、$W_\pm = (w_\pm(\alpha,\beta))$ を $|X| \times |X|$ 複素対称行列とする。3 つ組 (X, W_+, W_-) が *spin model* とは次の条件を満たすときを言う。

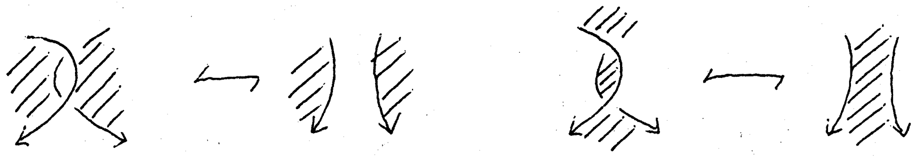
(0) $W_+{}^T = W_+, W_-{}^T = W_-$

$$(i) \quad W_+ \circ W_- = J$$
$$(ii) \quad W_+ W_- = |X| I$$
$$(iii) \quad \sum_x w_+(\alpha, x) w_+(\beta, x) w_-(\gamma, x) = \sqrt{|X|} w_+(\alpha, \beta) w_-(\beta, \gamma) w_-(\gamma, \alpha)$$

この spin model を対称でない行列に拡張することを試みる。最初に各 edge に対し下図の様に向きをつける。



次に state σ が与えられたとき、edge 　　　　　　に $w_\pm(\sigma(u), \sigma(v))$ を対応させ同様にして Z : oriented link の diagram $\rightarrow$ $\mathbf{C}$ を定める。例えば、Reidemeister move II で Z の値が変わらないためには下図の式を満足していれば良い。



$$w_+(\alpha, \beta) w_-(\beta, \alpha) = 1 \qquad \sum_x w_+(\alpha, x) w_-(x, \beta) = |X| \delta_{\alpha\beta}$$

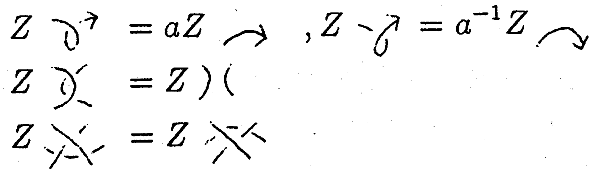
Reidemeister move II,III で Z の値が変わらないための条件が genaralized spin model である。

定義 2.2 $|X|$ を有限集合、$W_\pm = (w_\pm(\alpha, \beta))$ を $|X| \times |X|$ 複素行列とする。3 つ組 (X, W_+, W_-) が *generalized spin model* とは次の条件を満たすときを言う。

$$(i) \quad {W_+}^T \circ W_- = J$$
$$(ii) \quad W_+ W_- = |X| I$$
$$(iii) \quad \sum_x w_+(\alpha, x) w_+(x, \beta) w_-(\gamma, x) = \sqrt{|X|} w_+(\alpha, \beta) w_-(\gamma, \beta) w_-(\gamma, \alpha)$$

現在この定義は坂内英一氏、坂内悦子氏により更に一般化されている。詳しくは同報告集の坂内悦子氏の報告を参照されたい。

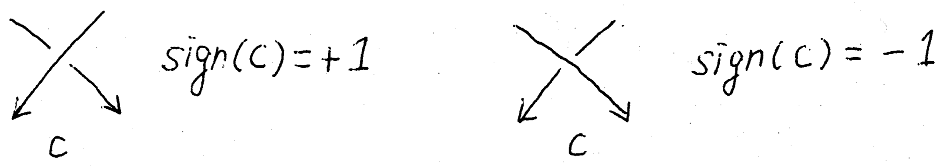
命題 2.1 (Z, W_+, W_-) を *generalized spin model* とする。この時、次が成り立つ。



但し、任意の $\alpha \in X$ に対して $a = w_+(\alpha, \alpha)$ 、向きを書いていない所は任意に向きを付けてもよい。

このままでは Reidemeister move I で値が変わるので writhe $w(L)$ で $R(L) = a^{-w(L)}Z(L)$ と置き換える。但し、$w(L)$ は下で定義される。

$$w(L) = \sum_{c} sign(c)$$



定理 2.1 *R* は *Reidemeister move I,II,III* で値が変わらない。即ち、*R*は *oriented link* の不変量である。

generalized spin model の例を挙げる。定義より W_- は W_+ から分かるので、W_+ のみを挙げる。

例 2.2

$$(1) \qquad \zeta_{24}\begin{pmatrix} 1 & 1 & {\zeta_{24}}^{16} \\ {\zeta_{24}}^{16} & 1 & 1 \\ 1 & {\zeta_{24}}^{16} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} 1 & \zeta_8 & 1 & {\zeta_8}^5 \\ {\zeta_8}^5 & 1 & \zeta_8 & 1 \\ 1 & {\zeta_8}^5 & 1 & \zeta_8 \\ \zeta_8 & 1 & {\zeta_8}^5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
(3)\quad \zeta_{20}\begin{pmatrix}
1 & {\zeta_{20}}^{8} & 1 & {\zeta_{20}}^{16} & {\zeta_{20}}^{16} \\
{\zeta_{20}}^{16} & 1 & {\zeta_{20}}^{8} & 1 & {\zeta_{20}}^{16} \\
{\zeta_{20}}^{16} & {\zeta_{20}}^{16} & 1 & {\zeta_{20}}^{8} & 1 \\
1 & {\zeta_{20}}^{16} & {\zeta_{20}}^{16} & 1 & {\zeta_{20}}^{8} \\
{\zeta_{20}}^{8} & 1 & {\zeta_{20}}^{16} & {\zeta_{20}}^{16} & 1
\end{pmatrix}
$$

generalized spin model に対応する不変量は spin model のそれよりも link の向きの情報を含んでいる。そこで non-invertible knot K に対して $R(K) \neq R(K^{-1})$ となる generalized spin model が存在するかどうかは興味をもたれる問題である。但し、K^{-1} は K の向きを逆にした knot である。向き逆にした時、もとの knot と ambient isotopic でないことを判定するのは結び目理論において昔から難しい問題として有名である。しかし残念ながら上の 3 つの例では向きを逆にしても不変量の値は変わらないことが分かった。一般に次の命題が成り立つことが分かった。

命題 2.2 (X, W_+, W_-) を *generalized spin model* 、対応する不変量を Z とする。もし ${W_\pm}^T = P^T W_\pm P$ となる置換行列 P が存在すれば、任意の *oriented link* L に対して $R(L) = R(L^{-1})$ が成り立つ。但し、L^{-1} は L の向きを逆にした *link* である。

参考文献

[1] V. F. R. Jones, *On knot invariants related to statistical mechanical models,* Pac. J. Math. 137 (1989), 311-336

[2] P. de la Harpe and V. F. R. Jones, *Graph invariants related to statistical mechanical models: examples and problems, preprint*

[3] S. Negami, *Polynomial invariants of graphs,* Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1987), 601-622

[4] W. T. Tutte, *Graph theory,* Encyclopedia of Mathematics, vol.21 (Addison-Wesley) 1984