数理解析研究所講究録
第 840 巻 1993 年 106-120

An Antipodal Characterization of Distance Regular Graphs

大阪教育大学
冨山 正人 (Masato Tomiyama)

Introduction

Γ: connected undirected simple finite graph

(Γ と vertex set を同一視する。)

(simple: loop と multiple edge がない)

$\partial(u,v)$: distance between u and v

(length of shortest path)

$d = \max\{\partial(u,v) \mid u, v \in \Gamma\}$: diameter

$\Gamma_i(u) = \{x \in \Gamma \mid \partial(u,x) = i\}$

Definition

Γ: Distance Regular Graph (DRG)

$\Leftrightarrow$ $p_{ij}^{l} = |\Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v)|$ depends only on i, j and $l = \partial(u,v)$

$k_i = p_{ii}^{0} = |\Gamma_i(u)|$, $k = k_1$: valency

ΓをDRGとするとき、$\Gamma_d(\alpha)$が良い構造を持つことが多く$\Gamma_d(\alpha)$がDRGになることもある。そこで、graph Δを与え、$\Gamma_d(\alpha) \simeq \Delta$となるDRG Γの分類を目標とするのがantipodal characterizationである。

Definition

clique $\Leftrightarrow$ any two vertices are adjacent

coclique $\Leftrightarrow$ no two vertices are adjacent

Strongly Regular Graph (SRG)

$\Leftrightarrow$ DRG with diameter 2

(一般にSRGはcliqueのunionも含むが、ここでは diameterが2であるもののみをSRGとする。)

Theorem (H. Suzuki)

Γ: DRG with diameter d

For $\exists \alpha \in \Gamma$, $\Gamma_d(\alpha) \neq$ coclique

$\Longrightarrow d \leq f(k_d)$ (diameter は k_d の関数でおさえられる。)

この定理によりあるΔ($\neq$ coclique)に対して、$\Gamma_d(\alpha) \simeq \Delta$となるDRG Γは有限個しかないことがわかる。

Theorem (A. Hiraki and H. Suzuki)

Γ: DRG with diameter d

For $\forall\alpha\in\Gamma$, $\Gamma_d(\alpha)$: SRG

For $\forall\beta\in\Gamma_d(\alpha)$, $\Gamma_d(\alpha)\cap\Gamma_2(\beta)$: coclique

$\Longrightarrow d=2$

Theorem (Y. Beronque)

Γ: DRG with diameter d

$\Gamma_d(\alpha)$: SRG for $\forall\alpha\in\Gamma$

$|\Gamma_d(\alpha)| = k_d \leq 27$

$\Longrightarrow d=2$ or $\Gamma\simeq J(2d+2,d)$ (Johnson graph)

現在知られているDRG Γで$\Gamma_d(\alpha)$がSRGとなるものは、$J(2d+2,d)$と同型であるか、diameterが2となるものだけである。

Main Theorem

Γ: DRG with diameter $d\geqq 3$

$\Gamma_d(\alpha)$: SRG for $\forall\alpha\in\Gamma$

For $\forall\beta\in\Gamma_d(\alpha)$, $\Gamma_d(\alpha)\cap\Gamma_2(\beta)$: clique

$\Longrightarrow d=3$ and $\Gamma\simeq J(8,3)$

Intersection Diagram

Γ : DRG with diameter d とする。

$c_i = p^i_{i-1\,1}$, $a_i = p^i_{i\,1}$, $b_i = p^i_{i+1\,1}$: intersection numbers

とおく。

Main theorem の証明の手段となる Intersection diagram

を紹介する。

$u, v \in \Gamma$ with $\partial(u,v) = l$

$D^i_j = D^i_j \quad = \Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v)$

とする。　$(\,|D^i_j(u,v)| = p^l_{ij}\,)$

三角不等式より

(1) $D^i_j = \phi$ if $l > i+j$ or $l < |i-j|$

(2) There is no edge between D^i_j and D^f_g,

if $|i-f| > 1$ or $|j-g| > 1$

Intersection Diagram とは $\{D^i_j\}$ とそれらを結ぶ line

とでつくられた図形で、

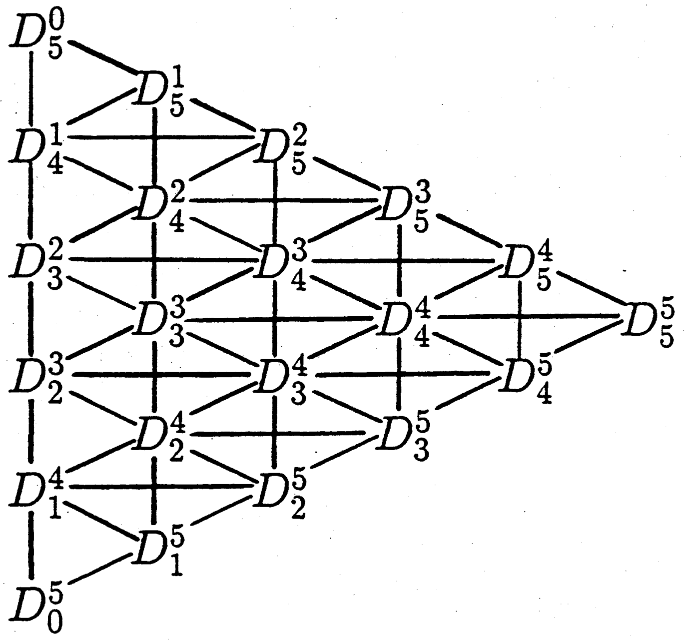
D^i_j —— D^f_g : possibility of edges

とし、D^i_j と D^f_g の間に edge がないことがわかると、

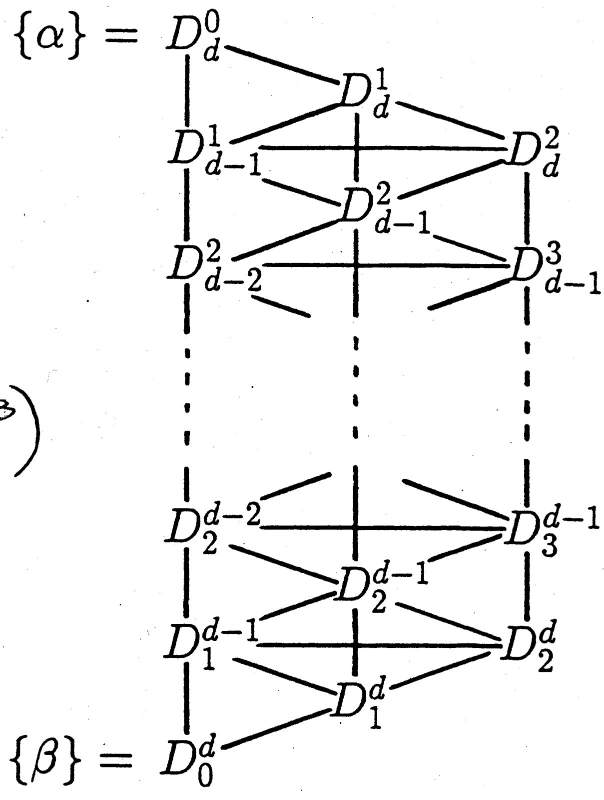
その line を消す。

たとえば、diameter 5 の rank d diagram は次のよ

うになる。



以下、Main Theorem の仮定のもとで話を進めていく。まず、rank d 及び rank 3 の diagram がどのような形になるかを見る。(これから $\Delta = \Gamma(\alpha)$ とする。)



$\alpha, \beta \in \Gamma$ with $\partial(\alpha,\beta) = d$ とすると、(α,β) に関する rank d diagram は右の形になる。

$\because$ Suppose $\exists x \in D^i_j \left(\begin{array}{l} \exists i \geq 3, \exists j \geq 3 \\ i+j \geq d+3 \end{array} \right)$

Then $\exists y \in D^{d-i}_d(x, \alpha)$

$$\partial(y,\beta) \geq |\partial(y,x) - \partial(x,\beta)|$$
$$= |d-(i+j)| \geq 3$$

So $y \in D^d_\ell(\alpha,\beta)$ for $\exists \ell \geq 3$

しかし、仮定より $D^d_\ell(\alpha,\beta)=\phi$ for $\ell\geq 3$。よって矛盾。//

ここでわかることは次のことである。

$|D^d_1(\alpha,\beta)| = p^d_{d1} = a_d = \overline{k}$

$|D^d_2(\alpha,\beta)| = p^d_{d2} = \overline{k_2}$ where $\overline{k} = |\Delta_1(\beta)|$, $\overline{k_2} = |\Delta_2(\beta)|$

$D^d_2(\alpha,\beta)$: clique

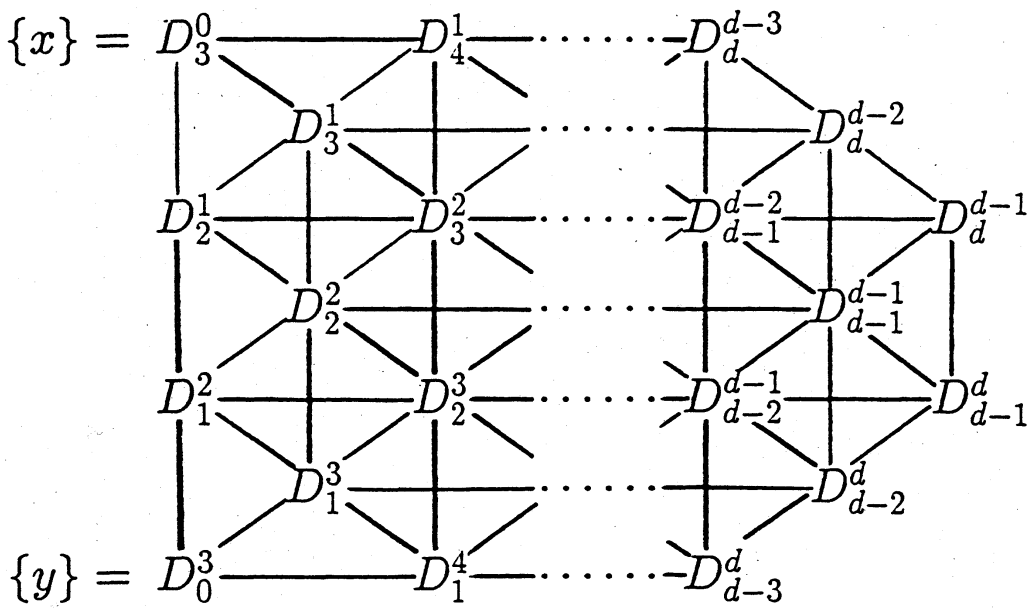
$1 \leq b_{d-1} \leq \overline{k_2}$

(∵ For $\forall x \in D^{d-1}_3(\alpha,\beta)$,

$b_{d-1} = |\Gamma_d(\alpha) \cap \Gamma_1(x)| \leq |\Gamma_d(\alpha) \cap \Gamma_2(\beta)| = \overline{k_2}$)

$x, y \in \Gamma$ with $\partial(x,y)=3$

とすると (x,y) に関する rank 3 diagram は同じように考えると下のようになる。



$D^d_{d-1}(x,y)$: clique

Proof of Main Theorem

これから Main Theorem の証明を大まかに説明する。

Lemma 1

Let α, β with $\partial(\alpha,\beta)=d$

For $\forall x \in D^d_2(\alpha,\beta)$, $\exists y \in D^2_{d-2}(\alpha,\beta)$ such that $\partial(x,y)=d-2$

Proof

$\nexists y \in D^2_{d-2}(\alpha,\beta)$ with $\partial(x,y)=d-2$ とする。

すると、$D^d_2(\alpha,\beta)$: clique

だから、

for $\forall \gamma \in \Gamma_d(\alpha)$,

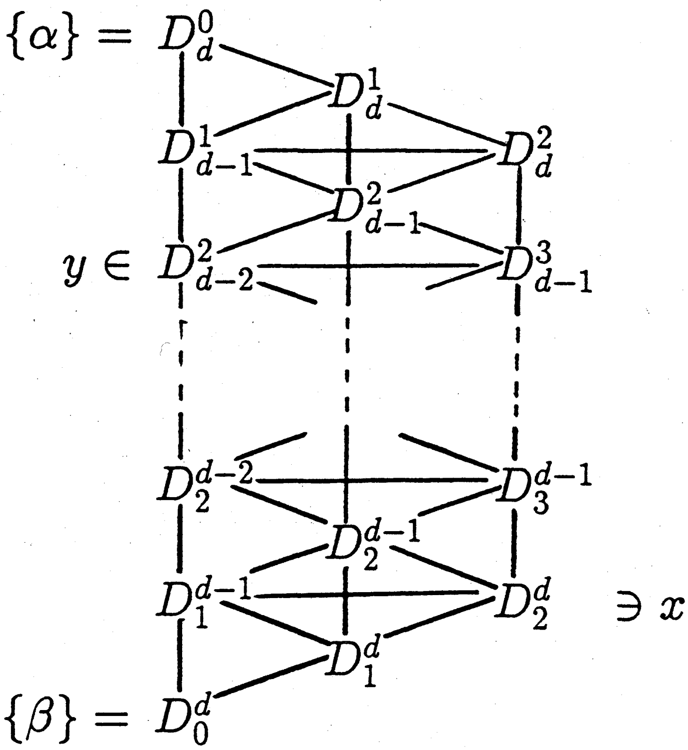
$\partial(y,\gamma) \leq d-1$

よって

$\Gamma^d_d(\alpha,y) = \phi$

i.e. $p^2_{dd} = 0$

これは、$p^d_{2d} \neq 0$ に矛盾 //



(一般に

$k_\ell p^\ell_{ij} = k_i p^i_{\ell j} = k_j p^j_{\ell i}$

これより

$p^\ell_{ij} = 0 \Rightarrow p^i_{\ell j} = p^j_{\ell i} = 0$)

Lemma 2

(1) For $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ with $\partial(\alpha, \beta) = d$,

there is no edge between $D_2^d(\alpha,\beta)$ and $D_1^{d-1}(\alpha,\beta)$

(2) For $\forall \alpha \in \Gamma$ and $\forall \beta, \gamma \in \Gamma_d(\alpha)$ with $\partial(\beta,\gamma) = 2$,

$\Gamma_1(\beta) \cap \Gamma_1(\gamma) \subseteq \Gamma_d(\alpha)$

Proof

(1) $\exists \gamma \sim \delta$ with $\gamma \in D_2^d(\alpha,\beta)$

$\delta \in D_1^{d-1}(\alpha,\beta)$

とするとδに対して

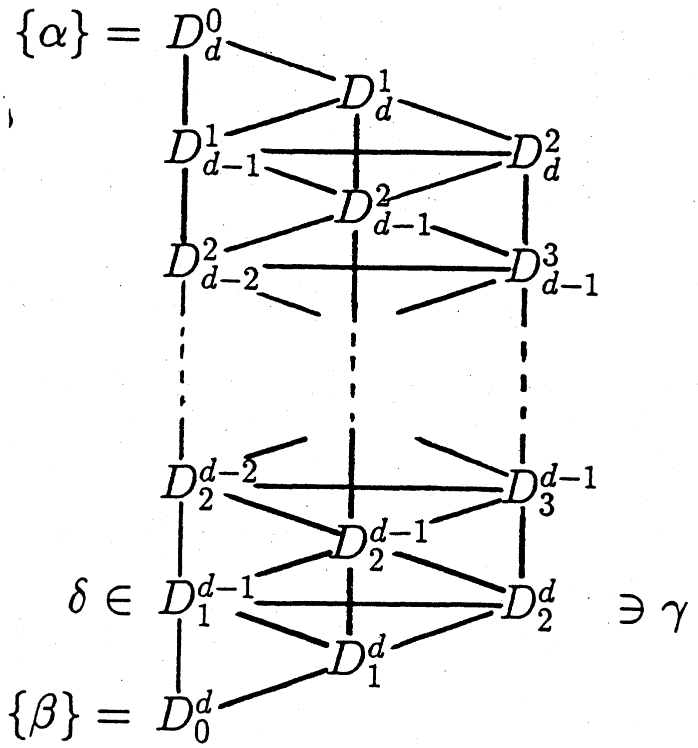
$\exists x \in D_{d-2}^2(\alpha,\beta)$ s.t.

$\partial(x,\delta) = d-3$

すると $\partial(x,\gamma) = d-2$

これは Lemma 1 に

矛盾。//



(2)

$\beta, \gamma \in \Gamma_d(\alpha)$ with $\partial(\beta,\gamma)=2$ をとると、$\gamma \in D_2^d(\alpha,\beta)$

(1)により $D_1^{d-1}(\alpha,\beta)$ と $D_2^d(\alpha,\beta)$ の間の line は消えているので、$\Gamma_1(\beta) \cap \Gamma_1(\gamma) \subseteq D_1^d(\alpha,\beta) \subseteq \Gamma_d(\alpha)$ //

Lemma 3

$P^2_{dd} = 1$, $k_2 = k_d P^d_{d2}$

証明は、Lemma 2 を使うと $P^2_{dd}=1$ を得る。すると $k_2 = k_2 P^2_{dd} = k_d P^d_{d2}$ がわかる。

Lemma 4

For $\forall x, y$ with $\partial(x, y) = 2$

Let $\{z\} = D^d_d(x, y)$

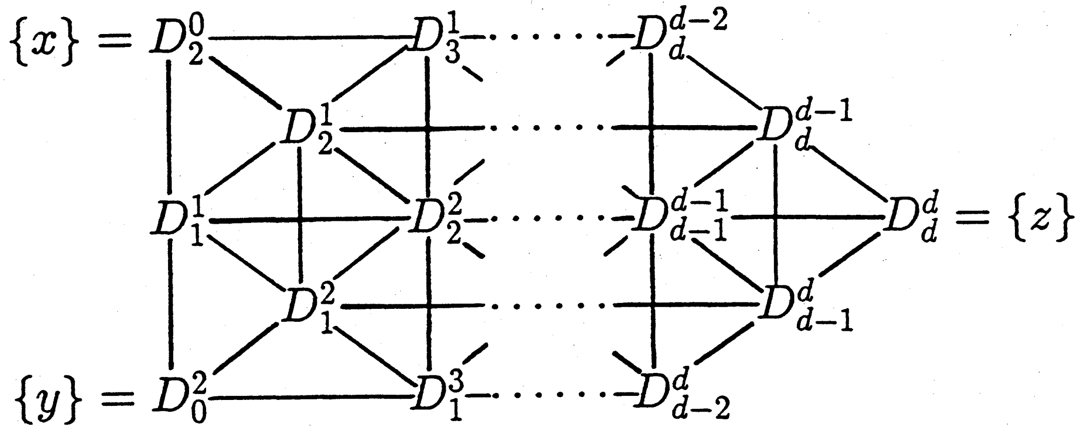
$d \geqq 4$

$\Longrightarrow D^d_{d-1}(x,y) \subseteq \Gamma_1(z)$, $D^d_{d-2}(x,y) \subseteq \Gamma_2(z)$

Moreover $P^2_{dd-1} = \overline{k}$, $P^2_{dd-2} = \overline{k_2}$

証明は、Lemma 1 と 2 を使う。

・この Lemma 4 を (x,y) に関する rank 2 diagram で考えると次のことがわかる。



$D^d_{d-1}(x,y) = D^d_1(x,z)$

$D^d_{d-2}(x,y) = D^d_2(x,z)$

Lemma5

Let x, y with $\partial(x,y)=3$

$d \geqslant 4$

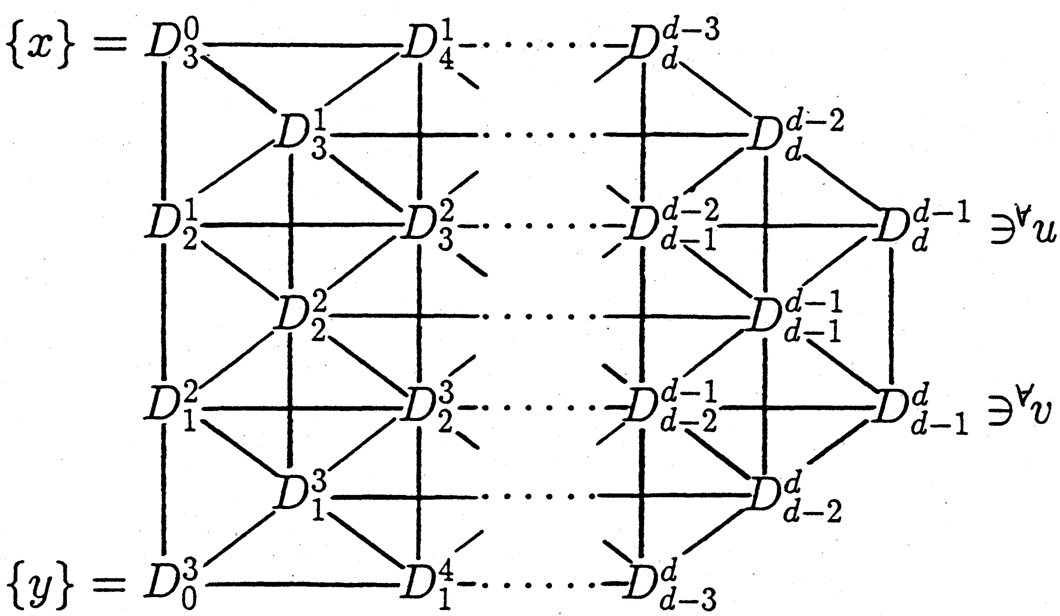
$\Longrightarrow$ For $\forall u \in D^{d-1}_d(x,y)$, $\forall v \in D^d_{d-1}(x,y)$,

$u \sim v$

Moreover $p^3_{d\,d-1} = b_{d-1}$

証明は Lemma4 を使う。

この Lemma5 を (x,y) に関する rank3 diagram で考えると次のようになる。



$u \sim v$

これらのLemmaから次のLemma 6を得る。

Lemma 6

$d \geqq 4$

$\Longrightarrow b_{d-1} = \overline{k_2}$ or

$b_{d-1} = 1,\ p^{1}_{dd} \geqq 2$

このLemma 6は、前に示した $1 \leqq b_{d-1} \leqq \overline{k_2}$ から考えると一番強い条件が、diameterを4以上とすると得られることを示している。このあと、両方の条件とも矛盾を導びくことができ、diameterは4以上にはならないことがわかる。すなわち、diameterが3になる。そして、diameterが3のときには $\Gamma \simeq J(8,3)$ であることがわかり、Main Theoremの証明が終る。

最後にLemma 6を証明しておく。

Proof

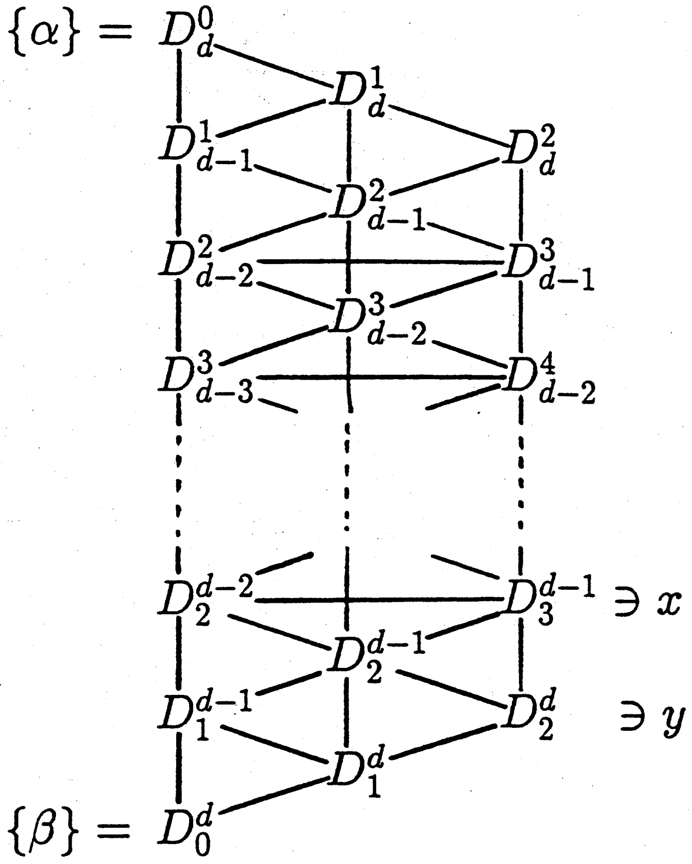
$\partial(\alpha,\beta) = d$ となる α, β をとり、$b_{d-1} < \overline{k_2}$ として、$b_{d-1} = 1$ と $p^{1}_{dd} \geqq 2$ を示す。

今、$b_{d-1} < \overline{k_2}$ であるから、$\forall x \in D^{d-1}_{3}(\alpha,\beta)$ に対し $\exists y \in D^{d}_{2}(\alpha,\beta)$ s.t. $x \not\sim y$。

(α,β)に関するrank d diagramで考える。

すると$D_2^d(\alpha,\beta)$が clique だから、$\partial(x,y)=2$

ここでx, yから距離d すなわち$\Gamma_d(x)$, $\Gamma_d(y)$が右のrank d diagramのどの部分にあるかを調べる。



まず$\Gamma_d(y)$を調べる。

Lemma 3と$\partial(\beta,y)=2$より

$\{\alpha\}=D_d^d(y,\beta)$となる。

ここで、$X=D_{d-1}^d(y,\beta)$, $Y=D_{d-2}^d(y,\beta)$とすると、

Lemma 4より

$X\subseteq D_{d-1}^1(\alpha,\beta)$

$Y\subseteq D_{d-2}^2(\alpha,\beta)$

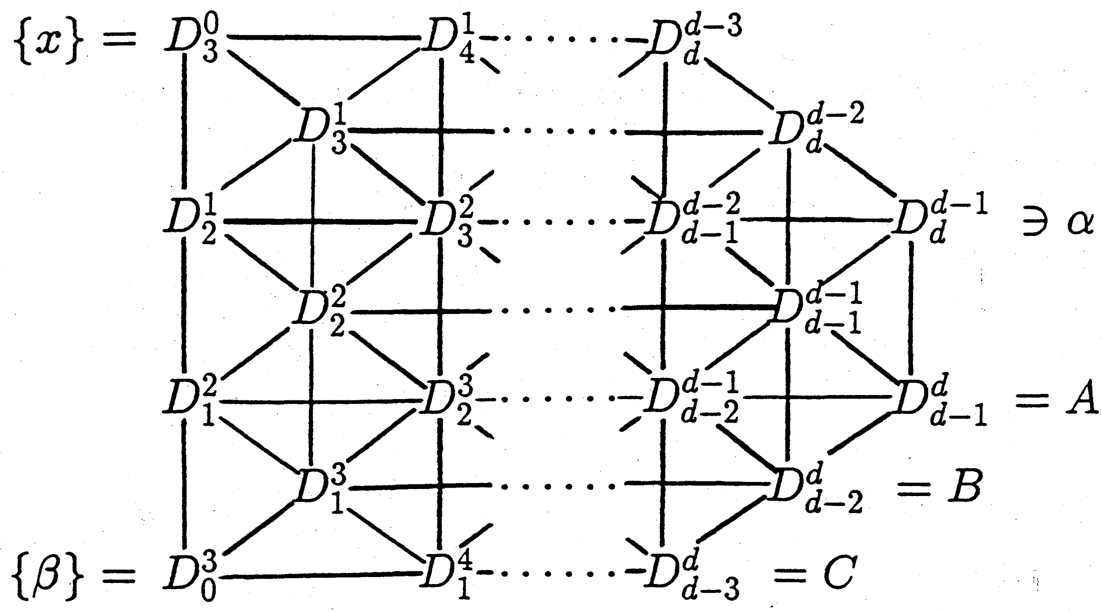
$\Gamma_d(y)=\{\alpha\}\cup X\cup Y$であることから、$\Gamma_d(y)$の場所がわかった。

次に$\Gamma_d(x)$について、$\partial(x,\beta)=3$であることから、

(x,β)に関するrank 3 diagramで考える。

すると$\alpha\in D_d^{d-1}(x,\beta)$がわかる。ここで、

$A=D_{d-1}^d(x,\beta)$, $B=D_{d-2}^d(x,\beta)$, $C=D_{d-3}^d(x,\beta)$とする。



すると、Lemma5より Aはすべての点がαから距離1となり、$\Gamma_d(x) = A \cup B \cup C$ がSRGであることから、Bの点はαから距離2か3，Cの点はαから距離3となる。よって、

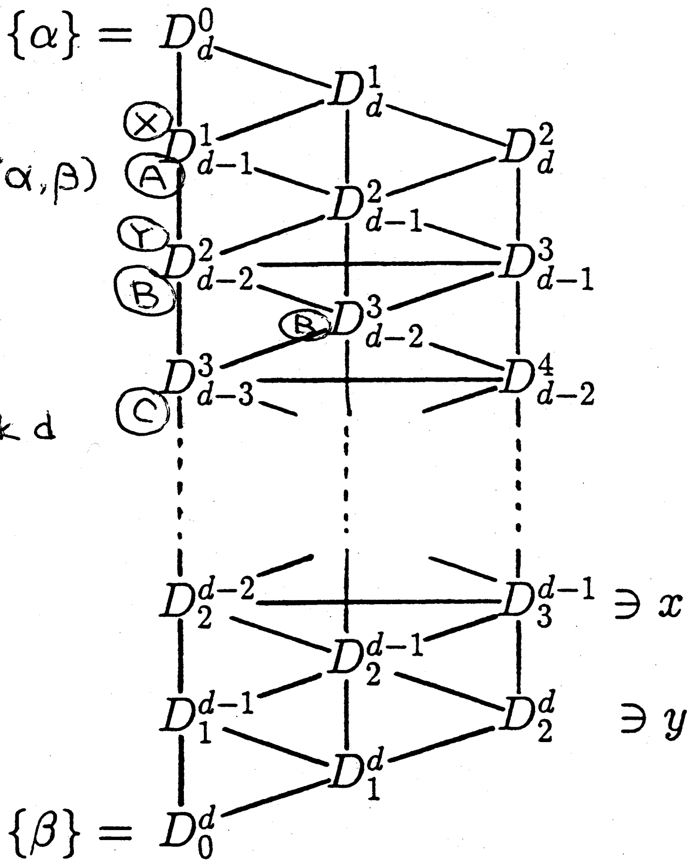
$A \subseteq D^1_{d-1}(\alpha, \beta)$

$B \subseteq D^2_{d-2}(\alpha, \beta) \cup D^3_{d-2}(\alpha, \beta)$

$C \subseteq D^3_{d-3}(\alpha, \beta)$

となることがわかる。

これらを(α, β)のrank d diagramで考えると右の図になる。



ここで $p^2_{dd}=1$ であることと $\partial(x,y)=2$ であることから、

$\{z\} = D^{d}_{d}(x, y)$ とする。

すると、さきほどの図 の $\Gamma_d(x)$ と $\Gamma_d(y)$ の共通部分より

$z \in D^{1}_{d-1}(\alpha, \beta) \cup D^{2}_{d-2}(\alpha, \beta)$

となることがわかる。よって

$\partial(\alpha, z) = 1$ or 2

今、$\partial(x, y) = 2$ と Lemma 2 (2) より

$\Gamma_d(z) \supseteq \Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)$

$D^{2}_{2}(\alpha, \beta)$ が clique であることから

$\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y) \supseteq \Gamma_1(x) \cap \Gamma_d(\alpha)$

よって

$\Gamma_d(z) \cap \Gamma_d(\alpha) \supseteq (\Gamma_1(x) \cap \Gamma_d(\alpha)) \cup \{y\}$

ここで $i = \partial(\alpha, z)$ とすれば、

$p^{i}_{dd} \geq b_{d-1} + 1 \geq 2$

しかし、$p^{2}_{dd} = 1$ より

$\partial(\alpha, z) = 1$ よって $z \in D^{1}_{d-1}(\alpha, \beta)$

となる。

ここで Lemma 4 より

$D^{d}_{d-1}(x, y) = D^{d}_{1}(x, z)$

$D^{d}_{d-2}(x, y) = D^{d}_{2}(x, z)$

$\Gamma_d(x) = A \cup B \cup C$ において、$z \in D^{1}_{d-1}(\alpha, \beta)$ と Lemma 1

から、

$$\Gamma_d(x)\cap\Gamma_{d-2}(y)=\Gamma_d(x)\cap\Gamma_2(z)=C\cup(B\cap D^{3}_{d-2}(\alpha,\beta))$$

よって

$$|C\cup(B\cap D^{3}_{d-2}(\alpha,\beta))|=|\Gamma_d(x)\cap\Gamma_2(z)|=\overline{k_2}$$

よって

$$|B\cap D^{3}_{d-2}(\alpha,\beta)|=|\Gamma_d(x)\cap\Gamma_1(z)|=\overline{k}$$

$$|A|=|\{z\}|=1$$

したがって Lemma 5 より

$$b_{d-1}=p^{3}_{dd-1}=|D^{d}_{d-1}(x,\beta)|=|A|=1$$

//