数理解析研究所講究録
第 841 巻 1993 年 26-42


# 微分・代数系とその数値解法†

小藤　俊幸††

応用上重要な微分方程式系には，微分方程式と代数方程式が混在する系，すなわち，微分・代数系として扱わねばならないものも多い．近年，こうした系に対する関心が急速に高まり，とりわけ，その数値解法に関する研究は，ここ数年の間に飛躍的な発展を遂げた．本稿では，微分・代数系，ならびに，その数値解法に関する研究の現状を総括し，解決すべき課題等，今後の展望についての考察を述べる．

## §1　はじめに

常微分方程式の理論的な解析においては，方程式が正規形で与えられる，すなわち，導関数が陽的に表されることを前提にすることが多い．しかし，実際的な場面においては，方程式は正規形をとるとは限らず，また，通常の手法では，正規形に変形できない場合も少なくない．微分・代数方程式系（Differential-Algebraic Equations, DAE ）とは，正規形に変形できない，より正確には，陰関数定理の適用を許しても，導関数に関する陽的な表示ができない微分方程式系の総称である．特に，導関数に関して線形である場合，

$$B(t,u)u'=f(t,u) \quad (B:\ \text{特異行列}) \tag{1.1}$$

のように表され，文字通り，微分方程式と代数方程式が混在する方程式系となる．まず，いくつかの具体例について簡単に述べる．

座標 q により規定される質点系が超曲面

$$0=\phi(q) \tag{1.2}$$

上に束縛された状態を考える．束縛は滑らか，すなわち，質点と曲面との間には摩擦が働かない，という仮定のもとで，（第一種の）Lagrange の運動方程式は

$$\begin{aligned} q' &= p \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) &= \frac{\partial T}{\partial q}+f(t,q,p)+\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)^{T}\lambda \\ 0 &= \phi(q) \end{aligned} \tag{1.3}$$

---

† Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Solutions
by TOSHIYUKI KOTO (Department of Computer Science and Information Mathematics the University of Electro-Communications)
†† 電気通信大学　情報工学科

により与えられる([18]). ここで, $T=T(q,p)$ は 系の運動エネルギー, $f$ は外力である. 例えば, 長さ $L$ の糸に質量 $m$ の重りがついた振子を考えると, 振子を曲線

$$0=x^2+y^2-L^2$$

上に束縛された 質点 $(x,y)$ の運動 とみなすことにより,

$$
\begin{aligned}
& x'=\xi, \quad y'=\eta \\
(1.4) \qquad & m\xi'=\lambda x, \quad m\eta'=\lambda y-mg, \\
& 0=x^2+y^2-L^2
\end{aligned}
$$

の方程式系が得られる.

振子の方程式は, 糸と垂直軸のなす角 $\theta$ を変数として,

$$(1.5) \qquad L\theta''=g\sin(\theta)$$

のようにも表すことができる(第2種の Lagrange の運動方程式, 状態空間方程式). このとき, 微分・代数系 (1.4) の解は, (1.5) の 解 $\theta$ を用いて,

$$
\begin{aligned}
& x=L\sin(\theta), \quad y=L\cos(\theta) \\
(1.6) \qquad & \xi=L\theta'\cos(\theta), \quad \eta=-L\theta'\sin(\theta) \\
& \lambda=(mg/L)\cos(\theta)-(\theta')^2
\end{aligned}
$$

と表される. したがって, この例に関する限りは, 運動方程式として, (1.4) のような微分・代数系を考える必然性には乏しい. しかし, より複雑な系の場合, (1.5) のような微分方程式の導出は必ずしも容易ではない. また, 近年, 計算機による方程式系の自動導出に向けた研究がなされているが, こうした場合には, (1.3) の一般的な定式化が有効となろう. なお, 実際的な応用として, 束縛されたロボットのアームの運動がこのような定式化に基づいて考察されている([41]).

微分・代数系 (1.3) は, 微分方程式と代数方程式が連立した形をしているが, この例に限らず, 応用上重要な微分・代数系には,

$$
(1.7) \qquad \begin{aligned} Mu'&=f(t,u,v) \\ 0&=g(t,u,v) \end{aligned} \qquad (\ M\text{: 可逆})
$$

のような形をとるものが多い. この形の系は, 半陽的微分方程式とも呼ばれている. スペース・シャトルの軌道制御([6]), 電力系統の潮流計算([26]), 流体方程式の有限要素近似([20])等に現れる微分・代数系はいずれも半陽的方程式であり, 未知変数 (の一部) になんらかの束縛条件が加わった形の微分方程式となっている. 例えば, 流体方程式の場合, 運動方程式である Navier-Stokes 方程式が微分方程式に, 質量保存則を表す連続の式が代数方程式に対応している. 一方, 応用上現れる微分・代数系は半陽的な系ばかりではな

く，異なる形の系もしばしば見られる．以下，よく知られた例として，電子回路の方程式を挙げておく．なお，微分・代数系の数値解法に関する研究は，回路方程式の数値計算法の研究([15])がひとつの発端となって始まったという経緯がある．

次頁，図1に示される，抵抗，コンデンサ，トランジスタからなる回路（電流帰還バイアス方式の増幅回路）について，節点1～5の電位 $U_j$ ($j=1,2,..,5$) を 独立変数とする回路方程式を考える．$R_j$ ($j=1,2,..,6$) は各抵抗の抵抗値，$C_j$ ($j=1,2,3$) はコンデンサの容量を示す．トランジスタは Ebers-Moll モデル（例えば [57] 参照）に従い，2個のダイオード，2個の従属電流源からなる等価回路に置き換えるものとし，ダイオードの電流－電圧特性を

(1.8) $$I=I_0[\exp(\lambda V)-1],$$

従属電流源の比例定数を$\alpha$とする．そのとき，Kirchhoff の電流則による節点方程式は

(1.9)
$$\begin{aligned}
&G_1(U_1-U_e)+C_1\frac{d}{dt}(U_1-U_2)=0\\
&C_1\frac{d}{dt}(U_2-U_1)+G_3(U_2-U_b)+(1-\alpha)(I_1+I_2)+G_2U_2=0\\
&\alpha I_2-I_1+G_4U_3+C_2\frac{d}{dt}U_3=0\\
&\alpha I_1-I_2+G_5(U_4-U_b)+C_3\frac{d}{dt}(U_4-U_5)=0\\
&C_3\frac{d}{dt}(U_5-U_4)+G_6U_5=0
\end{aligned}$$

$$(I_1=I_0[\exp(\lambda(U_2-U_3))-1],\quad I_2=I_0[\exp(\lambda(U_2-U_4))-1])$$

となる．ここで，$G_j=1/R_j$ ($j=1,2,..,6$)，$U_e$ は入力電圧，$U_b$ はバイアス電圧である．

いま，

(1.10)
$$B=\begin{bmatrix} C_1 & -C_1 & & & \\ -C_1 & C_1 & & & \\ & & C_2 & & \\ & & & C_3 & -C_3 \\ & & & -C_3 & C_3 \end{bmatrix}$$

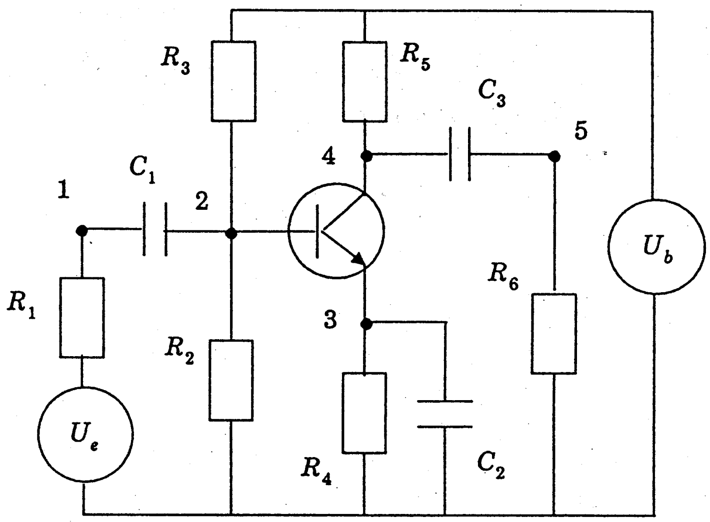
(1.11)
$$\begin{aligned}
&U=[U_1\ U_2\ U_3\ U_4\ U_5]^T\\
&F=[G_1(U_1-U_e)\quad G_3(U_2-U_b)+(1-\alpha)(I_1+I_2)+G_2U_2\\
&\qquad\qquad \alpha I_2-I_1+G_4U_3\quad \alpha I_1-I_2+G_5(U_4-U_b)\quad G_6U_5]^T
\end{aligned}$$

とおくと，(1.9) は

(1.12)　　$BU'+F(U)=0$

と表されるが，行列 B は階数3の特異行列である．

図１　増幅回路




## §２　指数

微分・代数系の数値解法を考察する際には，指数（index）という概念が基本となる．以下では，この指数について述べる．微分・代数系の指数とは，数値的に解く際の難しさの程度を表す指標とも言うべき概念であり，具体的には，いく通りかの定義法（[16]，[17]，[22]）が知られている．ここでは，最も基本的と考えられる C.W.Gear による定義（微分指数）について述べる．

微分・代数系を

(2.1)　　$F(t,u(t),u'(t))=0$

のように表し，十分滑らかな解 u(t) の存在を仮定する．そのとき，整数 k（≧0)に対して，解 u(t) の近傍で定義された次の方程式系を考える：

(2.2)
$$
\begin{aligned}
&F(t,u,u')=0\\
&\frac{d}{dt}F(t,u,u')=\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)u^{(2)}+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)u'+\frac{\partial F}{\partial t}=0\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\frac{d^k}{dt^k}F(t,u,u')=\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)u^{(k+1)}+\cdots+\frac{\partial^k F}{\partial t^k}=0
\end{aligned}
$$

**定義** (2.2) を，t，u をパラメータとする $u'$，$u^{(2)}$，…，$u^{(k+1)}$ に関する代数方程式系と考える．ある k に対して，(2.2) の（すべて，あるいは一部の）方程式系を用いて $u'$ が t，u の関数として表されるならば，そのような k の最小値を，微分・代数系 (2.1) の解 u(t) に関する指数，あるいは，（解に依存する特性であることを暗黙の了解として）単に微分・代数系 (2.1) の指数と呼ぶ．□

指数は，このように一般的に定義されるものであるが，実際上重要，あるいは数値解法の対象として研究されている微分・代数系には，いくつかの典型的な型がある．以下，それについて述べる．まず，半陽的な方程式系として，

$$
\begin{aligned}
u_1'(t) &= f_1(u_1, u_2) \\
0 &= f_2(u_1, u_2)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1'(t) &= f_1(u_1, u_2) \\
0 &= f_2(u_1)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1'(t) &= f_1(u_1, u_2, u_3) \\
u_2'(t) &= f_2(u_1, u_2) \\
0 &= f_3(u_2)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

の3通りの型を挙げることができる．ここで，各 $u_m$ は $\mathbf{R}^{d_m}$ 値関数．$f_m$ は $\mathbf{R}^{d_m}$ 値写像である．また．各方程式系は十分滑らかな解をもち，さらに，解の近傍で

(2.3) の場合　$\partial f_2/\partial u_2$

(2.4) の場合　$(\partial f_2/\partial u_1)(\partial f_1/\partial u_2)$

(2.5) の場合　$(\partial f_3/\partial u_2)(\partial f_2/\partial u_1)(\partial f_1/\partial u_3)$

の行列は可逆であると仮定する．

以上の仮定のもとで，(2.3)，(2.4)，(2.5) の系は，それぞれ，指数1，指数2，指数3の微分・代数系となる．例えば，(2.3) が指数1の系となることは，以下のように確かめられる．まず，(2.3) 式には $u_2'$ が含まれないことから．同式のみでは，$u'$ ($=[u_1'\ u_2']^T$) を u の関数として表すことはできない．したがって，(2.3) の指数は少なくとも1以上となる．一方，k=1 に対する方程式系 (2.2) は

$$
\begin{aligned}
u_1' &= f_1(u_1, u_2) \\
0 &= f_2(u_1, u_2) \\
u_1'' &= (\partial f_1/\partial u_1)u_1' + (\partial f_1/\partial u_2)u_2' \\
0 &= (\partial f_2/\partial u_1)u_1' + (\partial f_2/\partial u_2)u_2'
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

となり，第1式および第4式から，

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} u_1' &= f_1(u_1, u_2) \\ u_2' &= -(\partial f_2/\partial u_2)^{-1}(\partial f_2/\partial u_1) f_1(u_1, u_2) \end{aligned}$$

が得られる．すなわち，$u'$ が $u$ の関数として表され，微分・代数系（2.3）の指数は1と決定される．

ここで，微分・代数系の幾何学的な意味について若干触れておく．微分・代数系（2.3）に対して，

$$M = \{ u=[u_1\ u_2]^T : f_2(u_1,\ u_2)=0 \}$$

とおくと，$\partial f_2/\partial u_2$ の可逆性の仮定より，M は局所的に微分可能多様体の構造をもち，接ベクトル空間は，

$$T_u M = \{ v : (\partial f_2/\partial u) v = 0 \}$$

で与えられる．したがって，(2.7) 式は多様体 M 上のベクトル場の方程式とも解釈されるが，解系が一致すると言う意味で，微分・代数系（2.3）と等価である．

多くの微分・代数系は，適当な多様体上のベクトル場の方程式と等価となる．例えば，(2.4)，(2.5) の各系は，それぞれ

$$M = \{ u=[u_1\ u_2]^T : f_2(u_1)=0,\ (\partial f_2/\partial u_1) f_1 = 0 \}$$

$$M = \{ u=[u_1\ u_2\ u_3]^T : f_3(u_2)=0,\ (\partial f_3/\partial u_2) f_2 = 0,\ (\partial^2 f_3/\partial u_2^2)(f_2, f_2) + (\partial f_3/\partial u_2)(\partial f_2/\partial u_1) f_1 = 0 \}$$

上のベクトル場の方程式と等価となる．文献［48］では，こうした微分・代数系を正則な系と呼び，指数の幾何学的な意味等について論じている．また，対応する多様体を微分・代数系の配位空間（configuration space）と呼んでいる．

半陽的な系以外で，系統的に論じられているのは，指数1の場合である．例えば，

$$(2.8)\qquad B(u)u' = a(u),\quad B(u) = S(u)\begin{bmatrix} I & O \\ O & O \end{bmatrix} T(u)\quad (S,\ T : \text{可逆})$$

の形（線形陰的と呼ばれる）で

$$-(\partial f_2/\partial u_1) T_{11}^{-1} T_{12} + (\partial f_2/\partial u_2)$$

が（解の近傍で）可逆となる系が，しばしば考察されている．ここで，

$$T(u) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},\quad u=[u_1\ u_2]^T,\quad S^{-1}a = [f_1(u)\ f_2(u)]^T$$

である．なお，文献［22］の指数（摂動指数）の意味では，この系は指数2となる．

以上，(2.3)，(2.8)，(2.4)，(2.5) の系には，この順序で一種の“包含関係”が考えられる．すなわち，(2.3) よりも (2.8)が，(2.8) よりも (2.4)が，(2.4) よりも (2.5) より一般的な系であると考えられる．実際，まず，(2.8) の系において，$S(u)$，$T(u)$ がともに単位行列である場合が，(2.3) の系に他ならない．また，(2.8) の系に対して，半陽的な系

$$\begin{aligned} u' &= v \\ 0 &= B(u)v - a(u) \end{aligned}$$

を考えると，変数 $v$ の一部を消去することにより，この系を (2.4) の特別な場合と見なすことができる．このとき，変数 $u$ が (2.4) の $u_1$ に対応する．さらに，(2.5) において，$u_2$ が $t$ に依存しない定数である場合が，($u_3$ を新たに $u_2$ と見なした) (2.4) の系である．

## §3　数値解法

微分・代数系の数値解法，特に，その初期値問題に対する数値解法として，後退微分公式 (BDF)，陰的 Runge-Kutta (IRK) 法等，各種の方法の適用が盛んに研究されてきた．**表1**，**表2**はそうした状況をまとめたものである．このように，各種数値解法の精度特性が，上述した微分・代数系の型ごとに，論じられてきた．

例えば，IRK 法の場合，半陽的指数2までの系（半陽的指数1，陰的指数1，半陽的指数2）に対する精度特性はほぼ完全な形で解明がなされている．局所打ち切り誤差と大域的な誤差の関係（誤差の集積の仕方）が明らかにされ，各公式の局所打ち切り誤差についても，根付き木 (rooted tree) に基づく特徴付けがなされている．以下，半陽的指数2の系，すなわち，(2.4) の系に関する結果([22])を紹介しておく．

簡単のため，未知変数 $u_1$，$u_2$ を，それぞれ，$x$，$y$，関数 $f_1$，$f_2$ を，それぞれ，$f$，$g$ と書くことにする．また，$s$ 段 IRK 法の係数パラメータを，通常のように，

$$a_{ij}\ (1 \leqq i,\ j \leqq s),\quad b_i,\ c_i\ (1 \leqq i \leqq s)$$

で表し，行列 $(a_{ij})$ が可逆である場合を考えよう．そのとき，(2.4) に対する IRK 法は

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{aligned} X_{n,i} &= x_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, f(X_{n,j},\ Y_{n,j}) \\ 0 &= g(X_{n,i}) \end{aligned} \qquad (1 \leqq i \leqq s)$$

$$\text{(3.2)}\qquad x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i\, f(X_{n,i},\ Y_{n,i})$$

により与えられる．$x_n$ が各ステップ点上での近似値，$X_{n,i}$，$Y_{n,i}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ は1ステップの計算に要する中間変数である．未知変数 $y$ に関する近似値 $y_n$ は（中間変数 $Y_{n,i}$ を含む）別の漸化式により算出され，特に，$x_n$ の計算に陽には現れない．したがって，近

表1　半陽的方程式に対する数値解法

| | 指数1 | 指数2 | 指数3 |
|---|---|---|---|
| BDF | | Löstedt & Petzold 1986 [36]<br>Brenan & Engquist 1988 [8] | Löstedt & Petzold 1986 [36]<br>Brenan & Engquist 1988 [8] |
| GBDF[1) ] | | | Keiper & Gear 1991 [28] |
| IRK 法 | Roche 1989 [52] | Brenan & Petzold 1989 [9]<br>Hairer et al. 1989 [22] | Hairer et al. 1989 [22]<br>Jay 1992 [27] |
| 補外法 | Deuflhard et al. 1987 [12] | Lubich 1989 [38] | Ostermann 1990 [43] |
| R[2)] 法 | Roche 1988 [50]<br>Schneider 1991 [54] | Roche 1988 [51] | |
| HERK[3)] 法 | Arnold 1991 [1] | Hairer et al. 1989 [22] | |
| PIRK[4)] 法 | | Asher & Petzold 1991 [2]<br>Lubich 1991 [39] | |
| LIRK[5)] 法 | Strehmel et al. 1990 [55] | | |

1) Generalized BDF　2) Rosenbrock(-Type)　3) Half Explicit Runge-Kutta
4) Projected Implicit Runge-Kutta　5) Linearly Implicit Runge-Kutta

表2　陰的指数1の系に対する数値解法

| BDF | IRK | R法 | 補外法 |
|---|---|---|---|
| Brenan et al. 1989 [7] | Kværφ 1990 [33]<br>Koto 1991 [31] | Lubich & Roche 1989 [40] | Lubich 1989 [37] |

似精度を変数 $x$ に限定して考えることが可能であり，それは以下のように特徴付けられる．

まず，“安定性条件”

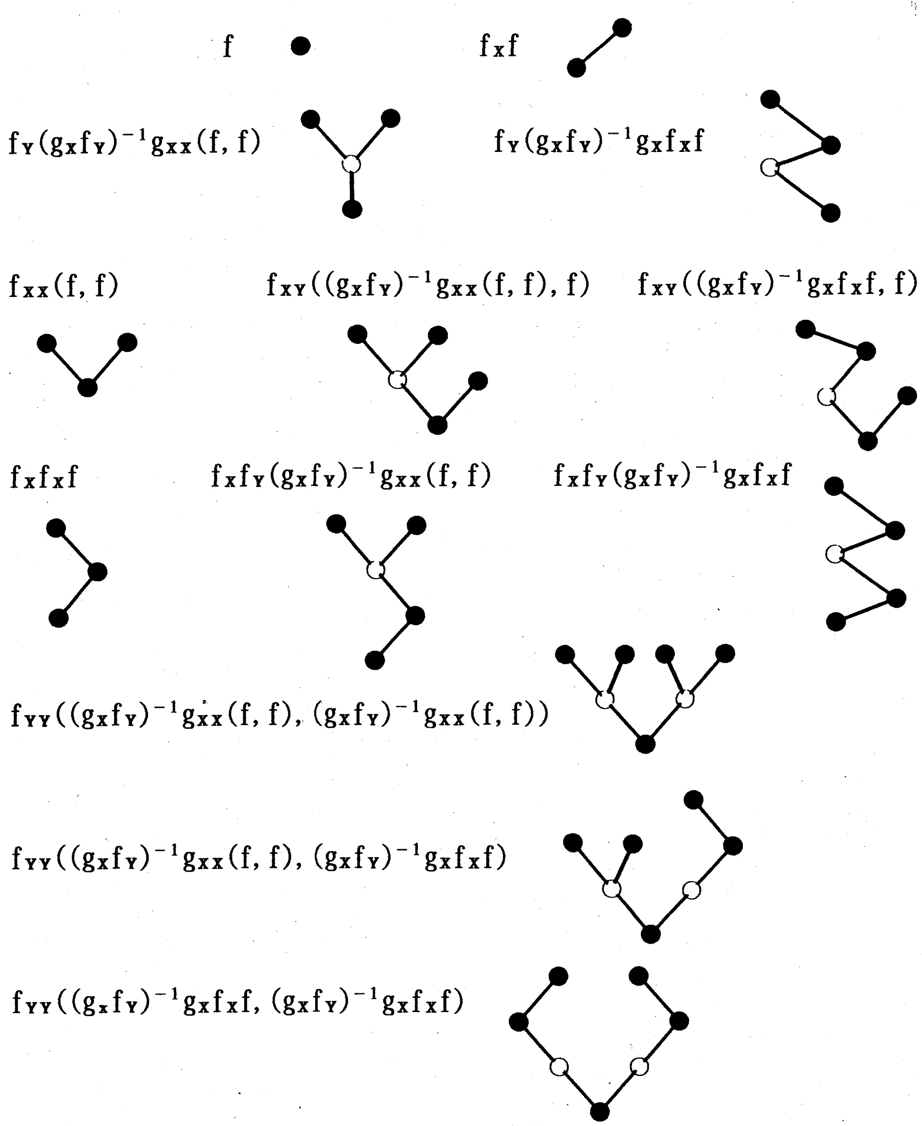
$$(3.3) \qquad \left| 1 - \sum_{i,j}^{s} b_i w_{ij} \right| < 1$$

を仮定する．ここで，$(w_{ij})$ は $(a_{ij})$ の逆行列である．この仮定の下，大域的な誤差の次数が $p$ 次となる，すなわち，

$$x_n - x(t_n) = O(h^p)$$

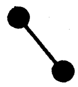
が成り立つための条件が

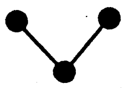
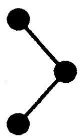
図2　“基本微分”

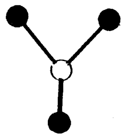


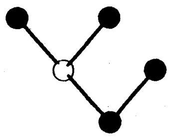
（i） 数値解と厳密解の Taylor 展開の係数が $h^{p-1}$ の項まで完全に一致し，
（ii） $h^p$ の係数は，ある“基本微分”に対応する項が一致する，
ことにより与えられる．

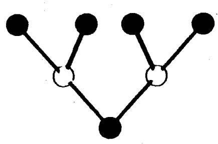
例えば， p=3 の場合，係数の一致をみるべき“基本微分”を，対応する根付き木とともに列挙すると図2のようになる．上から2段めまでが h，$h^2$ の項，3段め以下が $h^3$ の項を与える．ただし，微分方程式の場合とは異なり，これらの“基本微分”あるいは根付き木が，係数パラメータに関する次数条件式と1対1に対応するわけではない．根付き木から導びかれる次数条件式には，いくつか重複するものが現れる．こうした重複を除くことにより，“3次精度”の条件は，最終的には

$\Sigma\ b_i = 1$ 　　$\Sigma\ b_i c_i = 1/2$ 

$\Sigma\ b_i c_i^2 = 1/3$ 　　$\Sigma\ b_i a_{ij} c_j = 1/6$ 

$\Sigma\ b_i w_{ij} c_j^2 = 1$ 

$\Sigma\ b_i c_i w_{ij} c_j^2 = 2/3$ 

$\Sigma\ b_i w_{ij} c_j^2 w_{jk} c_k^2 = 4/3$ 

となる．

このように数値解法の精度特性に関しては，多くの研究がなされている．しかし，これらの数値解法が，より汎用的に使用されるためには，解決すべき課題も多いように思われる．次節では，こうした点も踏まえ，将来展望に関する考察を，いくつかの観点からまとめておく．なお，本稿では，境界値問題の解法については全く触れなかった．文献［2］，および，その参考文献を参照されたい．

## §4 展望

### 4.1 非線形方程式系の求解

微分・代数系が，もともと代数方程式系（非線形系）を含むことから，その初期値問題に対する数値解法の実現（implementation）においては，必然的に2種類の非線形系求解の問題が派生することになる．

ひとつは，非線形系を満足する初期値，すなわち，整合的な初期値([35])を算出する問題であり，いま一つは，上述した（3.1）の系のような，陰的公式の計算過程に現れる非線形系の求解の問題である．前者は，ある程度，状況に応じた対応が要請される問題であ

ると思われる．以下，後者についてのみ簡単に述べておく．

理論的な考察から，理想的な状況下においては，上記非線形系の解法として， Newton 法タイプの反復解法が有効であることが示されている([22]，[29]，[30])．今後，ソフトウェア開発をも含んだ，より実際的な観点からの研究が望まれるところであろう．なお，IRK 法実現における（修正）Newton 反復の停止則に関しては，反復を適当な回数で強制的に打ち切る旨の提案([32]，[34])がなされている．([ 1 ] も参照．また，通常の微分方程式の場合については，[56] 参照．)

### 4.2 微分・代数系の安定性

微分・代数系の安定性の問題が，問題の定式化，方程式系の導出をも含む，やや広い意味での数値解法の観点から論じられている([ 4 ]，[13]，[14])．

微分・代数系

$$
\begin{aligned}
x' &= y - ax^2 + \cos(t) \\
0 &= y - ax^2
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

および，第 2 式を微分することにより得られる

$$
\begin{aligned}
x' &= y - ax^2 + \cos(t) \\
y' &= 2ax(y - ax^2 + \cos(t))
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

の微分方程式系を考える．初期値が

$$0 = y_0 - ax_0^2$$

を満たす限り，両者は同じ解曲線を与えることから，指数の点から考えると，より指数の低い (4.2) の形で扱う方が得策のように思われる．しかし，パラメータ a の値によっては，(4.1) から (4.2) への変形が，数値解法の著しい効率低下を招くことが，文献 [13] で示されている．

同文献では，主原因として，両者の（リャプノフの意味での）安定性の相違を示唆しているが，そのことは必ずしも明瞭ではない．微分・代数系の安定性概念を明確にし，その数値解法への影響を解明することは，今後の大きな課題であろう．また，流体方程式の有限要素近似([20])に代表される大規模な微分・代数系を扱う際にも，こうした数値的な安定性の問題が重要になると思われる．

### 4.3 差分・微分・代数系

Minnesota 大学の Petzold ら([ 5 ]，[45])は，差分・微分・代数系，時間遅れを含む微分・代数系 (Delay DAE, DDAE) について論じている．([10]，[11] も参照．また，このような系の具体例については，[25] 参照．) 文献 [ 5 ] では，半陽的指数 1，指数 2，指数 3 の各微分・代数系に対応して

$$(4.3)\quad \begin{aligned} u_1'(t) &= f_1(u_1,\ u_1(t-\tau),\ u_2,\ u_2(t-\tau)) \\ 0 &= f_2(u_1,\ u_1(t-\tau),\ u_2) \end{aligned}$$

$$(4.4)\quad \begin{aligned} u_1'(t) &= f_1(u_1,\ u_1(t-\tau),\ u_2) \\ 0 &= f_2(u_1) \end{aligned}$$

$$(4.5)\quad \begin{aligned} u_1'(t) &= f_1(u_1,\ u_1(t-\tau),\ u_2,\ u_2(t-\tau),\ u_3) \\ u_2'(t) &= f_2(u_1,\ u_2,\ u_2(t-\tau)) \\ 0 &= f_3(u_2) \end{aligned}$$

($\tau$は正数）の系が取り上げられ，BDF，IRK 法，Projected IRK 法の適用が論じられている．ただし，$\tau$が定数である場合の初期値問題に限定すれば，これらの系は，以下のように，（通常の）微分・代数系に変換して扱うことも可能であろう．

例えば，(4.3) の系を考えよう．簡単のため，(4.3) を

$$(4.6)\quad \begin{aligned} x'(t) &= f(x,\ x(t-\tau),\ y,\ y(t-\tau)) \\ 0 &= g(x,\ x(t-\tau),\ y) \end{aligned}$$

のように書き直し，この系を初期条件

$$x(t)=\xi(t),\ y(t)=\eta(t) \quad (-\tau \leqq t \leqq 0)$$

の下で解くことを考える．

いま，

$$X_j(t)= x(t+\tau j),\quad Y_j(t)= y(t+\tau j) \quad (j=0,1,\ldots)$$

とおくと，区間 $0 \leqq t \leqq \tau J$（J：正整数）上における系 (4.6) は，区間 $0 \leqq t \leqq \tau$ 上における微分・代数系

$$\begin{aligned} X_0'(t) &= f(X_0,\ \xi(t-\tau),\ Y_0,\ \eta(t-\tau)) \\ 0 &= g(X_0,\ \xi(t-\tau),\ Y_0) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} X_j'(t) &= f(X_j,\ X_{j-1},\ Y_j,\ Y_{j-1}) \\ 0 &= g(X_j,\ X_{j-1},\ Y_j) \end{aligned}\right. \quad (j=1,2,\ \ldots,\ J-1)$$

と置き換えて考えることができる．したがって，通常の差分・微分方程式の場合と同様な手法([23]，II. 15.）に基づき，IRK 法の適用を図ることも可能である．

数学的な特性，応用性等，差分・微分・代数系には，いまだ不明瞭な点も多いが，興味深い研究対象であると言えよう．

## 参 考 文 献

[1] Arnold, M : *Linearly Implicit Runge-Kutta Methods for Differential-Algebraic Equations of Index 1 - Two Approaches,* In : Numerical Treatment of Differential Equations, Teubner-Texte zur Math., 121, 9-15, 1991.

[2] Ascher, U. & Petzold, L. : *Projected Implicit Runge-Kutta Methods for Differential-Algebraic Equations,* SIAM J. Numer. Anal., 28, 1097-1120 (1991).

[3] Ascher, U. & Petzold, L. : *Projected Collocation of Higher-Order High-Index Differential-Algebraic Equations,* (to appear, SIAM J. Sci. Stat. Comput.) 1991.

[4] Ascher, U. & Petzold, L. : *Stability of Computational Methods for Constranined Dynamical Systems,* (to appear, Appl. Comp. Math.) 1991.

[5] Ascher, U. & Petzold, L. : *The Numerical Solution of Delay-Differential-Algebraic Equations of Retarded Type,* Department of Computer Science, University of Minnesota, 1992.

[6] Brenan, K.E. : *Numerical Solution of Trajectory Prescribed Path Control Problems by Backward Differentiation Formulas,* IEEE Trans. Aut. Control, **AC**-31, 266-269 (1986).

[7] Brenan, K.E., Campbell, S.L. & Petzold, L.R. : *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations,* North-Holland, Amsterdam, 1989.

[8] Brenan, K.E. & Engquist, B.E. : *Backward Differentiation Approximation of Nonlinear Differential/Algebraic Systems,* Math. Comp., 51, 659-676, S7-S16 (1988).

[9] Brenan, K.E. & Petzold, L. : *The Numerical Solution of Higher Index Differential/Algebraic Equations by Implicit Runge-Kutta Methods,* SIAM J. Numer. Anal., 26, 976-996 (1989).

[10] Campbell, S. L. : *Singular Linear Systems of Differential Equations with Delays,* Applicable Analysis II, 129-136 (1980).

[11] Campbell, S. L. : *2-D (Differential-Delay) Implicit Systems,* Proc. 13th

IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, 1991.

[12] Deuflhard, P., Hairer, E. & Zugck, J. : *One-Step and Extrapolation Methods for Differential-Algebraic Systems*, Numer. Math., 51, 501-516 (1987).

[13] Füher, C. & Leimkuhler, B. : *Formulation and Numerical Solution of the Eqautions of Constrained Mechanical Motion*, In : Numerical Treatment of Differential Equations, Teubner-Texte zur Math., 121, 324-335, 1991.

[14] Füher, C. & Leimkuhler, B. : *Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations for Constrained Mechanical Motion*, (to appear, Numer. Math.) 1990.

[15] Gear, C.W. : *Simultaneous Solution of Differential-Algebraic Equations*, IEEE Tras. Circuit Theory, 18, 89-95 (1971).

[16] Gear, C.W. : *Differential-Algebraic Equation Index Transformations*, SIAM J. Sci. Stat. Comp., 9, 39-47 (1988).

[17] Gear, C.W. : *Differential Algebraic Equations, Indeces, and Integral Algebraic Equations*, SIAM J. Numer. Anal., 27, 1527-1534 (1990).

[18] Gear, C.W., Leimkuhler, B. & Gupta, G.K. : *Automatic Integration of Euler-Lagrange Equations with Constraints*, J. Comp. Appl. Math., 12 & 13, 77-90 (1985).

[19] Gear, C.W. & Petzold, L. : *ODE Methods for the Solution of Differential/ Algebraic Systems*, SIAM J. Numer. Anal., 21, 75-89 (1985).

[20] Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, L.R. & Upson, G.D. : *A Modified Finite Element Method for Solving the Time-Dependent, Incompressible Navier-Stokes Equations. Part 1 : Theory*, Int. J. Numer. Meth. Fuluids, 4, 557-598 (1984).

[21] Hairer, E., Lubich, C. & Roche, M. : *Error of Runge-Kutta Methods for Stiff Problems Studied via Differential Algebraic Equations*, BIT, 28, 678-700 (1988).

[22] Hairer, E., Lubich, C. & Roche, M. : *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*, Lecture Notes in Math., 1409, Springer-Verlag, 1989.

[23] Hairer, E., Nφrsett, S.P. & Wanner, G. :*Solving Ordinary Differential Equations* Ⅰ, *Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, 1987.

[24] Hairer, E. & Wanner, G. : *Solving Ordinary Differential Equations* Ⅱ, *Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag, 1991.

[25] Heeb, H. & Ruehli, A. : *Retarded Models for PC Board Interconnects - Or How the Speed of Light Affects Your SPICE Curcuit Simulation*, Proc. ICCAD, 1991.

[26] Hill, D.J. & Marrels, I.M. : *Stability Theory for Differential/Algebraic Systems with Application to Power Systems*, IEEE Trans. Circuits Syst., 37, 1416-1423 (1990).

[27] Jay, L : *Convergence of Runge-Kutta Methods for Differential-Algebraic Systems of Index 3*, Université de Genève, Département de Mathématiques, 1992.

[28] Keiper, J. B. & Gear, C. W. : *The Analysis of Generalized Backward Difference Formula Methods Applied to Hessenberg Form Differential-Algebraic Equations*, SIAM J. Numer. Anal., 28, 833-858 (1991)

[29] 小藤俊幸 : 微分-代数系の数値解法における簡約ニュートン法 －指数３の場合－ 情報処理学会研究報告, Vol.90, No.80 (1990)

[30] 小藤俊幸 : 指数２の微分-代数系の数値解法における簡約 Newton 法, 情報処理学会論文誌, 32, 361-366 (1991).

[31] Koto, T. : *Third-Order Semi-Implicit Runge-Kutta Methods for Time-Dependent Index-One Differential-Algbraic Equations*, J. Inf. Proces., 14, 172-177 (1991).

[32] Koto, T. : *One-Step Methods for the Solution of Differential-Algbraic Equations*, The First China-Japan Joint Seminar on Numerical Mathematics, Beijing, 1992.

[33] Kværφ, A. : *Runge-Kutta Methods Applied to Fully Implicit Defferential/Algebraic Equations of Index 1*, Math. Comp., 54, 583-625 (1990).

[34] Kværφ, A. : *The Order of Runge-Kutta Methods Applied to Semi-Explicit DAEs of Index 1, Using Newton-Type Iterations to Compute the Internal Stage Values*, Departement of Mathematics, the University of Trondheim, 1992.

[35] Leimkuhler, B., Petzold, L. & Gear, C.W. : *Approximation Methods for the*

*Consistent Initialization of Differential-Algbraic Equations,* SIAM J. Numer. Anal., 28, 205-226 (1991).

[36] Lötstedt, P. & Petzold, L. : *Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations with Algebraic Constraints* I : *Convergence Results for Backward Differentiation Formulas,* Math. Comp., 46, 491-516 (1986).

[37] Lubich, Ch. : *Linearly Implicit Extrapolation Methods for Differential-Algebraic Problems,* Numer. Math., 55, 197-211 (1989).

[38] Lubich, Ch. : *$h^2$-Extrapolation Methods for Differential-Algbraic Systems of Index 2,* Impact Comput. Sci. Eng., 1, 260-268 (1989).

[39] Lubich, Ch. : *Projected Implicit Runge-Kutta Methods for Differential-Algbraic Equations,* BIT, 31, 545-550 (1991).

[40] Lubich, Ch. & Roche, M. : *Rosenbrock Methods for Differential-Algebraic Systems with Solution-Dependent Singular Matrix Multiplying Derivative,* (to appear, Computing) 1989.

[41] McClamroch, N.H. : *Singular Systems of Differential Equations as Dynamic Models for Constrained Robot Systems,* Proc. IEEE Conf. Robotics Automation, San Francisco, 1981.

[42] Newcomb, R.W. : *The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits,* IEEE Tras. Curcuits Syst., CAS-26, 62-71 (1981).

[43] Ostermann, A. : *A Half-Explicit Extrapolation Methods for Differential-Algebraic Systems of Index 3,* IMA J. Numer. Anal., 10, 171-180 (1990).

[44] Petzold, L. : *Order Results for Implicit Runge-Kutta Methods Applied to Differential/Algebraic Systems,* SIAM J. Numer. Anal., 23, 837-852 (1986).

[45] Petzold, L. : *The Numerical Solution of Delay-Differential-Algebraic Equations,* International Conference on Scientific Computation and Differential Equations (SCADE 93), Auckland, 1993.

[46] Petzold, L. and Lötstedt, P. : *Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations with Algebraic Constraints* II : *Practical Implications,* SIAM J. Sci. Stat. Compt., 7, 720-733 (1986).

[47] Petzold, L. and Potra, F. A. : *ODAE Methods for the Numerical Solution of*

*Euler-Lagrange Equations*, Preprint, 1991.

[48] Reich, S. : *On the Geometrical Interpretation of Differential-Algebraic Equations*, In : Numerical Treatment of Differential Equations, Teubner-Texte zur Math., 121, 134-139, 1991.

[49] Rheinboldt, W.C. : *Differential-Algebraic Systems as Differential Equations on Manifolds*, Math. Comp., **43**, 473-482 (1984).

[50] Roche, M. : *Rosenbrock methods for Differential-Algebraic Equations*, Numer. Math., **52**, 45-63 (1988).

[51] Roche, M. : *Runge-Kutta and Rosenbrock Methods for Differential-Algebraic Equations and Stiff ODEs*, Doctoral thesis, Université de Genève, 1988.

[52] Roche, M. : *Implicit Runge-Kutta Methods for Differential Algebraic Equations*, SIAM J. Numer. Anal., **26**, 963-975 (1989).

[53] Roche, M. : *The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Rosenbrock Methods*, In : Numerical Treatment of Differential Equations, Teubner-Texte zur Math., 121, 140-151, 1991.

[54] Schneider, C. : *Rosenbrock-Type Methods Adapted to Differential-Algebraic Systems*, Math. Comp., **36**, 201-213 (1991).

[55] Strehmel, K. , Weiner, R. and Dannehl, I. : *On Error Behaviour of Partitioned Linearly Implicit Runge-Kutta Methods for Stiff and Differential Algebraic Systems*, BIT, **30**, 358-375 (1990).

[56] Sugiura, H. & Torii, T. : *A Method for Constructing Generalized Runge-Kutta Methods*, J. Comp. Appl. Math. **38**, 399-410 (1991).

[57] 牛田明夫, 森真作 : 非線形回路の数値解析法, 森北出版, 1987.