

On singly diagonally implicit one-step methods

広 大 学 教 新 谷 尚 義 (Hisayoshi Shintani)

1. SDIRK methods of order 5

初期値問題

$$(1.1) \quad y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0$$

を考える。この問題の解を $y(f)$ とし、

$$(1.2) \quad t_s = t_0 + sh \quad (s \geq 0, h > 0)$$

とする。 $y(t_1)$ の近似値 y_1 を次のような n 段 p 次の singly diagonally implicit one-step method (SDIRK method) で求めよう。

$$(1.3) \quad y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^n b_i k_i$$

ただし、

$$(1.4) \quad k_i = f(Y_i), \quad Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$(1.5) \quad a_{ii} = x > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Nørsett (1974) は、 $n=1$ のとき $p=2$, $n=2$ のとき $p=3$, $n=3$ のとき $p=4$ の公式が存在することを示した。 $n=4, 5$ のとき、パラメータの数はそれぞれ 11, 16 であり order 5 の公式をうるためには 17 個の方程式が満たされねばならない。筆者は REDUCE 3.3

を用いて次のことを示した。

定理 1. 4段 5 次の SDIRK method は存在しない。

定理 2. 5段 5 次の A 安定な SDIRK method が存在する。

2. Embedded SDIRK methods with interpolants

次の 2 つの形の補間式を考えよう。

$$(2.1) \quad Y_s = Y_0 + \sum_{i=1}^n b_{is} k_i$$

$$(2.2) \quad \tilde{Y}_s = Y_0 + h \left\{ \tilde{b}_{0s} f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_{is} k_i + b_{n+1s} f(Y_1) \right\}$$

また刻み幅 h を制御するために

$$(2.3) \quad e = h \sum_{i=1}^n q_i k_i = O(h^p)$$

$$(2.4) \quad \tilde{e} = h \left\{ \tilde{q}_0 f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i k_i \right\} = O(h^p)$$

を考える。

定理 3. $n = 1, 2, 4$ のとき、それぞれ次数 $p = 1, 2, 3$ の A 安定な (1.3) と補間式 (2.1) 及び (2.3) が存在する。 $n = 3$ のとき、次数 3 の補間式 (2.1) は存在しない。 $n = 1, 2, 3$ のとき、それぞれ次数 $p = 2, 3, 3, 4$ の A 安定な (1.3) と補間式 (2.2) 及び (2.4) が存在する。

刻み幅が一様でない場合でも、 $Y_{n-1}, Y_n, Y_{n+1}, f(Y_{n-1}), f(Y_n), f(Y_{n+1})$ を使えば次数 4 までの補間式と刻み幅制御用の e を求

めることができる。

参考文献

- {1} K. Dekker and J.G. Verwer, Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations, 1984, North-Holland
- {2} H. Shintani, Existence of 5-stage singly diagonally implicit one-step methods of order 5, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II, 13 (1991), 29-34
- {3} H. Shintani, Embedded singly diagonally implicit one-step methods with interpolants, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II, 14 (1992) (to appear)