数理解析研究所講究録
第 841 巻 1993 年 163-174

非線形常微分方程式の周期解の数値的存在検証と近似解の精度保証

早稲田大学理工学部情報学科 大石進一
oishi@oishi.info.waseda.ac.jp

1 はじめに

本稿では非線形関数方程式の精度保証付き数値計算について論じる．非線形関数方程式の精度保証付き数値計算とは，狭い意味では，非線形関数方程式の解の存在を数値計算結果をもとに証明し，更に数値計算によって得られた近似解と真の解との誤差を数値計算結果をもとに数学的に厳密に評価することを目標とする．このため，数値解析な立場からは，打ち切り誤差と丸め誤差の厳密な把握が必要とされる．

1960 年代に数値計算の丸め誤差を把握するために区間解析法が提案された．しかし，真値を含む区間の幅が計算が進むにつれて増大するなどの現象が明らかにされ，その有用性に限界があると考えらるようになっていた．それが，1970-1980 年代になってドイツのカールスルーエ大学の Kulisch らのグループが浮動小数点を区間の両端とする機械区間解析と長大桁内積演算による残差反復を組み合わせることにより，有限次元非線形方程式の解を丸め誤差を含め厳密に包み込む (include) ことができることを示した．ここに，解を包み込むというのは真の解を含む (幅のあまり広くない) 区間を数値計算により与えるという意味である．Kulisch たちは ACRITH や PASCAL-SC などのソフトウエアも発表し，ある程度実用的な非線形方程式の解を数値的に計算する際にも数値計算の丸め誤差を把握できることを示した．この結果は欧州，米国を中心として注目を集めた．我国でも 1990 年に情報処理学会誌に特集が組まれるなど注目されつつある．

一方，実用規模の有限次元非線形方程式を数値解析する際に例えばニュートン法を適用するとしてもヤコビ行列を計算するのは大変な計算量が必要となる．自動微分プログラムは関数を計算するプログラムを入力し，その微分値を計算するプログラムを出力するものであり，近年活発に研究されつつある．これはまた，平均値の定理などにより区間演算の区間幅の増大を必要最小限に抑える技法も提供する．その意味で精度保証付き数値計算の基本技法となっている．

さて，著者は 1990 年の特集号によって精度保証付き数値計算のことを知り，これを早速非線形関数方程式の解法に応用することを考えた．当時，Nakao[2] は区間解析的な手法により楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算手法を与えていたので，無限次元非線形方程式に対して適用可能であることは示されていた．しかし，著者として次のような点を調べてみたかったためである：

1. 1990 年当時，Kulisch たちの結果を検証してみたいと思ったが彼らのソフトウエアがすぐには手に入らなかった．そこで Kulisch たちの手法のもとになっている Rump の論文を呼んでみたが，機械区間の収束の証明が今一つ納得できなかった．したがって，有限次元の方程式に対してでもよいので本当に解の包込みができるのか実感したかった．

2. 当時，著者はホモトピー法という非線形方程式の解法の研究に従事してきた関係で，簡易ニュートン法の収束定理をもとにする非線形方程式の解の数値的な検証法である占部の方法に親しんでいた．そこで，占部の方法を出発点とした精度保証付き数値解法を考えたかった．ただ，いずれにしても，実用的な非線形関数方程式の解が精度保証付数値計算によって求められるか確かめたかった．

本稿は以上の点を検討した結果として，非線形常微分方程式の周期解の数値的存在検証を例に取って，応用上重要な非線形関数方程式の解が精度保証付き数値計算法によって実際的な時間内で求められることを報告したい．

結論をまとめると次のようになる：第1の点に関しては，色々な検討の結果，有理数演算を実行できる可変長数の演算ソフトを作成すると共に，占部の定理をもととして実際に有限次元方程式の解の精度保証ができることを確認した．すなわち，有理数演算が誤差なしで行えることを活用すると非線形方程式の数値解析などかなりの規模の計算でもその丸め誤差が厳密に把握できることがわかった．ソフトウエアとしてはC言語を基にする有理数演算ソフト並びに有理数演算のできるオブジェクト指向的なC-like言語Calcをもととしたものを開発した．有限次元方程式に関する結果は別途報告したので本稿では省略する．また，PASCAL-SCなどの使用体験もその後もったが，これはパソコン用の旧世代もので，その後開発されたワークステーション用のPASCAL-XSCとの比較はまだ行っていない．

第2の点に関しては占部の定理に基づく手法を開発し，Duffing方程式の周期解を求める問題を例にとって真の解の包込みができることを確認した．すなわち，非線形常微分方程式の周期解の数値検証の理論として占部[7]は1965年に簡易ニュートン法の収束定理(占部の定理)をもととする占部の方法を提案していた．これはその後の一連の研究[8],[6], [3],[4], [5]を通して非線形常微分方程式の周期解の数値検証法として極めて有用であることが示されていた．この占部の研究は精度保証付き数値計算の一つの起源であると考えられる．占部の方法では，簡易ニュートン法の収束判定を行う際に必要となる線形化作用素の逆作用素の作用素ノルムの評価に摂動方程式の基本解行列を用いている．この基本解行列も精度保証付きで求められる可能性がある．しかし，本稿では，この作用素ノルムのBouc[1]による関数解析的な評価法に着目する．Boucは一階連立非自律常微分方程式の周期解を求める場合について線形化作用素の逆作用素の作用素ノルムが基本解行列を求めることなく関数解析な評価により求められることを示した．ここでは，このような評価が閉線形作用素Lと非線形作用素Nによって書かれる一般的な非線形作用素方程式

$$f(u) \equiv Lu + Nu = 0, \ u \in D(L) \tag{1}$$

に拡張できることを示す．ただしLはバナッハ空間Xから他のバナッハ空間Yへの線形閉作用素，NはXからYへの非線形作用素とする．このような非線形作用素方程式の形に書けるものとしては非線形常微分方程式の境界値問題，非線形微分差分方程式の境界値問題，非線形楕円型方程式の境界値問題などがある．本稿では上式の解に対する一般的な精度保証理論を述べたあと，Duffing方程式の周期解を求める問題を例として実際に解の存在を数値的に検証した例を示す．研究会で発表した時には1つの周期解の存在検証にワークステーション(20MIPS程度のRISCマシン, NEWS3150など)で2,3日を要していたが，現在では10分程度で検証ができるようになっている．

2 非線形作用素方程式の解の存在の数値的検証

一般的な非線形作用素方程式

$$f(u) \equiv Lu + Nu = 0, \ u \in D(L) \tag{2}$$

を考える．ここで，$D = D(L)$と$B = D(N)$を，それぞれLとNの定義域とし，それぞれバナッハ空間であり$D(L) \subset D(N)$とする． XとYのノルムを$\|\cdot\|_X$および$\|\cdot\|_Y$とそれぞれ，書

くことにする．また，Banach 空間 X_1から他の Banach 空間 X_2 への線型作用素 L_1の作用素ノルムを $\|L_1\|_{L(X_1,X_2)}$と書くことにする．

2.1 グラフノルム評価

L によって $D(L)$ 内に定義されるグラフノルム:

$$\|u\|_L = \|u\|_X + \|Lu\|_Y \quad \text{for } u \in D(L)$$

を考える．L は閉作用素であるから，$D(L)$ はノルム $\|u\|_L$によってバナッハ空間となる．これを D_Lと書く．N は D_L から Yへの写像として Fréchet 微分可能とする．また，その一回微分 $DN(u)$ は Xから Yへの写像として有界線形作用素に拡張できるものとする．ここで，数値計算スキームとして次のようなものを想定する：

E と F を，それぞれ $D(L)$ と Yの部分空間で $\dim E = \dim F = m$ を満たすものとする．また，P と Q を，それぞれ，Xから Eおよび Yから Fへの射影作用素とする．このとき，次が成立するとする：

$$\|u - Pu\|_X \le c\|Lu\|_Y \quad \text{for } \forall u \in D(L) \tag{3}$$

$$QLu = QLPu \quad \text{for } \forall\, u \in D(L) \tag{4}$$

および

$$\|Q\|_{L(Y,Y)} \le 1 \tag{5}$$

ここで，cは u に独立な定数で $m \to \infty$ のとき $c \to 0$ となることを想定している．

注　この状況の下で，式 (2) の離散近似方程式

$$g(u) = Qf(u) = 0,\ u \in E. \tag{6}$$

を考える．$\tilde{u} \in E$ を式 (6) の近似解とする．Eq. (6) は有限次元方程式であるから $\|g'(\tilde{u})^{-1}\|_{L(F,E)}$ の上からの評価値 Mを数値的に計算してみることを考える．しかし，これは不正確な書き方なので，厳密には次のように定式化する．□

$\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ と $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ をそれぞれ Eと Fの基底とする．すると任意の要素 $e \in E$ と $v \in F$はそれぞれ次のように表される ：

$$e = \sum_{n=1}^{m} c_n(e) e_n \tag{7}$$

および

$$v = \sum_{n=1}^{m} d_n(v) v_n, \tag{8}$$

ここで，$c_n(e)$ と $d_n(v)$ は適当な線形汎関数とする．このとき，写像 $A_m : E \to E_m$ と $B_m : F \to F_m$を次のように定義できる

$$A_m e = (c_1(e), c_2(e), \cdots, c_m(e))^t \tag{9}$$

および

$$B_m v = (d_1(v), d_2(v), \cdots, d_m(v))^t, \tag{10}$$

ここで，上付き t はベクトルの転置を表し，

$$E_m = \{(c_1(e), c_2(e), \cdots, c_m(e))^t | e \in E\}$$

および

$$F_m = \{(d_1(v), d_2(v), \cdots, d_m(v))^t | v \in F\}$$

とする． $\phi = (c_1, c_2, \cdots, c_m)^t \in E_m$ および $d = (d_1, d_2, \cdots, d_m)^t \in F_m$に対して，それぞれ，

$$\|\phi\|_{E_m} = \|\sum_{n=1}^{m} c_n e_n\|_X \tag{11}$$

および

$$\|d\|_{F_m} = \|\sum_{n=1}^{m} d_n v_n\|_Y. \tag{12}$$

とする．さて，$\tilde{u} \in E$を適当な手段で求めた Eq. (2) の近似解とする．すると，線形作用素 $J : E_m \to F_m$は$\phi = (c_1, c_2, \cdots, c_m)^t \in E_m$ に対して

$$J\phi = B_m\{Q(L + S(\tilde{u})) \sum_{n=1}^{m} c_n e_n\}. \tag{13}$$

と定義できる．E_mと F_mは有限次元ベクトル空間であったから以後 Jを行列と同一視する．定義から $x \in D(L)$ に対して

$$JA_mPx = B_m\{Q(L + S(\tilde{u}))Px\}. \tag{14}$$

である．もし $\det J \neq 0$ なら

$$A_mPx = J^{-1}B_m\{Q(L + S(\tilde{u}))Px\}, \tag{15}$$

となるが，これから

$$\begin{aligned} \|Px\|_X &= \|A_mPx\|_{E_m} \\ &\leq \|J^{-1}\|_{L(F_m,E_m)}\|B_mQ(L + S(\tilde{u})Px\|_{F_m} \\ &\leq M\|Q(L + S(\tilde{u}))Px\|_Y \end{aligned} \tag{16}$$

を得る．ここで Mは定数で

$$\|J^{-1}\|_{L(F_m,E_m)} \leq M. \tag{17}$$

を満たすものとする．

定理 2.1 もし， $cK(1 + MK) < 1$ なら，写像 $G = L + DN(\tilde{u}) : D_L \to Y$ は任意の $y \in D'$について次の評価を満たす:

$$\|y\|_L \leq C\|Gy\|_Y, \tag{18}$$

但し，

$$C = \frac{(1 + c)(1 + MK) + M}{1 - cK(1 + MK)}.$$

□ □

この定理は写像 $G(\tilde{u}) = L + S(\tilde{u}) : D_L \to Y$が定理の条件を満たしているとき単射であることを述べている．もし，G が指数 0 の Fredholm 作用素であれば，G が単射であることから全射であることが導かれるので，G は連続な逆作用素 $G^{-1} : Y \to D_L$をもつことがわかる．

次に，残差を

$$r = \|f(\tilde{u})\|_Y.$$

で定義する．ここで，$U_p = B(\tilde{u}, p)$ を D_L $\tilde{u}$を中心とし，半径 p の D_L内の閉球とし， $DN(u) : D_L \to Y$ が U_p内で Lipschitz 連続であるとする:

$$\|S(u) - S(v)\|_{L(D',Y)} = a_{U_p}\|u - v\|_{D_L} \quad \text{for } u, v \in U_p \subset D_L.$$

このとき，次の定理が成立する：

定理 2.2 $G(\tilde{u}) : D_L \to Y$ が逆写像をもち $cK(1 + MK) < 1$ が成立しているとする．簡単のため， $a = a_{U_p}$とする．もし p が次の条件

1. $2Cr \le p$
   および
2. $aCp < 1,$

を満たすとする．このとき，式 *(2)* の解 u^*が U_p内にただ一つ存在し

$$\|u^* - \tilde{u}\|_L \le 2Cr.$$

をみたす． □ □

2.2 定理 2.1 の証明

$$G(\tilde{u})x = Lx + DN(\tilde{u})x, \quad G(\tilde{u}) : D_L \to Y. \tag{19}$$

と置いたことを思い起こそう：$x \in D_L$に対して

$$\begin{aligned} \|x\|_X &\le \|x - Px\|_X + \|Px\|_X \\ &\le c\|Lx\|_Y + \|Px\|_X. \end{aligned} \tag{20}$$

となる．(19) の定義から

$$\begin{aligned} \|Lx\|_Y &\le \|G(\tilde{u})x\|_Y + \|DN(\tilde{u})x\|_Y \\ &\le \|G(\tilde{u})x\|_Y + K\|x - Px + Px\|_X \\ &\le \|G(\tilde{u})x\|_Y + Kc\|Lx\|_Y + K\|Px\|_X. \end{aligned} \tag{21}$$

更に，(19) と (4) から

$$QG(\tilde{u})x = QLx + QDN(\tilde{u})(x - Px + Px) = QLPx + QDN(\tilde{u})(x - Px + Px).$$

ここで

$$s = QLPx + QDN(\tilde{u})Px = Q[G(\tilde{u})x - DN(\tilde{u})(x - Px)],$$

と置くと (5) より

$$\|s\|_Y \leq \|G(\tilde{u})x\|_Y + Kc\|Lx\|_Y. \tag{22}$$

評価式

$$\|Px\|_X \leq M\|s\|_Y \tag{23}$$

と (22) を (21) に代入すると

$$\begin{aligned} \|Lx\|_Y &\leq \|G(\tilde{u})x\|_Y + Kc\|Lx\|_Y + MK\|s\| \\ &\leq \|G(\tilde{u})x\|_Y + Kc\|Lx\|_Y + MK(\|G(\tilde{u})x\|_Y + Kc\|Lx\|_Y) \\ &= (1+MK)\|G(\tilde{u})x\|_Y + Kc(1+MK)\|Lx\|_Y. \end{aligned}$$

したがって

$$\|Lx\|_Y \leq \frac{1+MK}{1-cK(1+MK)}\|G(\tilde{u})x\|_Y. \tag{24}$$

を得る．一方，(23) と (22) を (20) に代入して

$$\begin{aligned} \|x\|_X &\leq c\|Lx\|_Y + M\|s\|_Y \\ &\leq c\|Lx\|_Y + M(\|G(\tilde{u})x\|_Y + Kc\|Lx\|_Y) \\ &= c(1+MK)\|Lx\|_Y + M\|G(\tilde{u})x\|_Y. \end{aligned}$$

これと (24) から

$$\|x\|_X \leq \frac{c(1+MK)+M}{1-cK(1+MK)}\|G(\tilde{u})x\|_Y. \tag{25}$$

を得る．以上をまとめて，$cK(1+MK) < 1$ が成立するとき，

$$\|x\|_L = \|x\|_X + \|Lx\|_Y \leq \frac{(1+c)(1+MK)+M}{1-cK(1+MK)}\|G(\tilde{u})x\|_Y$$

を最終的に得る．これは Theorem 2.1の内容である． □

2.3 定理 2.2 の証明

Theorem 2.2を，この定理の条件が満たされるとき，以下に定義される作用素Tが U_p上の縮小作用素となることを示すことにより証明する．$G(\tilde{u})^{-1}$を用いて，作用素 $T: D_L \to D_L$ を次のように定義する：

$$Tu = G(\tilde{u})^{-1}(DN(\tilde{u})u - Nu).$$

$G(\tilde{u})^{-1}$が存在することを仮定しているから，作用素Tの不動点は式 (2) の解と U_p内では一対一に対応する．まず，$TU_p \subset U_p$を示す．任意の $u \in U_p$に対して

$$\begin{aligned} \|Tu - \tilde{u}\|_L &= \|G(\tilde{u})^{-1}(DN(\tilde{u})u - Nu) - \tilde{u}\|_L \\ &= \|G^{-1}(\tilde{u})(DN(\tilde{u})u - Nu - G(\tilde{u})\tilde{u})\|_L \\ &\leq C\|DN(\tilde{u})u - Nu - G(\tilde{u})\tilde{u}\|_Y \\ &= C\|S(\tilde{u})u - Nu - L\tilde{u} - DN(\tilde{u})\tilde{u}\|_Y \\ &\leq C(\| - Nu + N\tilde{u} - DN(\tilde{u})(\tilde{u} - u)\|_Y + r). \end{aligned} \tag{26}$$

ここで

$$R = Nu - N\tilde{u} - DN(\tilde{u})(u - \tilde{u}),$$

と置くと，評価式

$$\|R\|_Y \le \frac{a}{2}\|u - \tilde{u}\|_L^2,$$

が成立するから

$$\begin{aligned}\|Tu - \tilde{u}\|_L &\le C\left(\frac{a}{2}\|u - \tilde{u}\|_L^2 + r\right)\\ &\le C\left(\frac{a}{2}p^2 + r\right) < p. \end{aligned} \tag{27}$$

を得る．これは $TU_p \subset U_p$を意味する．

次に Tが U_p上で縮小的なことを示す．$u, v \in U_p$に対して

$$\begin{aligned}\|Tu - Tv\|_L &\le \|G(\tilde{u})^{-1}(DN(\tilde{u})u - Nu) - G(\tilde{u})^{-1}(DN(\tilde{u})v - Nv)\|_L\\ &= \|G(\tilde{u})^{-1}(DN(\tilde{u})(u - v) - (Nu - Nv))\|_L\\ &\le C\|DN(\tilde{u})(u - v) - (Nu - Nv)\|_Y \end{aligned} \tag{28}$$

が成立する．ここで

$$Nu - Nv = \int_0^1 S(u + t(v - u))(v - u)dt,$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned}\|S(\tilde{u})(u - v) - (Nu - Nv)\|_Y &= \|\int_0^1 (S(u + t(v - u)) - S(\tilde{u}))(v - u)dt\|_Y\\ &\le \int_0^1 \|S(u + t(v - u)) - S(\tilde{u})\|_{L(D_L,Y)}\|v - u\|_L dt\\ &\le ap\|v - u\|_L. \end{aligned} \tag{29}$$

を得る．従って，

$$\|Tu - Tv\|_L \le aCp\|v - u\|_L. \tag{30}$$

わかる．これは Tが U_p上で縮小的なことを示している．

以上を総合して Tが U_p内に唯一の不動点 u^*を持つことがわかる．

$$\|u^* - \tilde{u}\|_L \le \frac{a}{2}Cp\|Tu^* - \tilde{u}\|_L + Cr,$$

より誤差評価式

$$\|u^* - \tilde{u}\|_L \le 2Cr.$$

の成立も分かる． □

2.4 ダフィング方程式の周期解

ここでは，Duffing 方程式

$$x'' + Ax' + Bx^3 - C\cos t = 0, t \in J = (0, 2\pi).$$

の周期解を前節の方法で求めた結果を示す．ただし，A, B および Cは定数．$L_2(0,2\pi)$, $H_1(0,2\pi)$ と $H_2(0,2\pi)$ をそれぞれ 2 乗可積分関数の作る Lesbegue 空間および Sobolev 空間でノルムがそれぞれ次で与えられるものとする：

$$\|x\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(t)|^2\, dt},$$

$$\|x\|_{H_1} = \sqrt{\|x\|^2 + \|x'\|^2},$$

および

$$\|x\|_{H_2} = \sqrt{\|x\|^2 + \|x'\|^2 + \|x''\|^2}.$$

$X = Y = \{x | x \in L_2(0,2\pi) \cap x(t) = -x(t+\pi)\}$ とし，作用素 $L : D(L) = X \cap H_2(0,2\pi) \to Y$ および $N : D(L) \to Y$を

$$Lx = x'' + Ax'$$

および

$$Nx = Bx^3 - C\cos t,$$

で定義する．このとき，L が Xから Yへの閉作用素となることはよく知られている．したがって，L からグラフノルムが

$$\|x\|_L = \|x\|_2 + \|x'' + Ax'\|_2.$$

と定義され，このノルムによって $D(L)$ はバナッハ空間となる．任意の $x \in D(L)$ に対し,$x(t) = -x(t+\pi)$ を考慮すると x を次のように展開できる：

$$x = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2n-1)t + b_n \sin(2n-1)t).$$

ここで，射影作用素 $P_m : D(L) \to P_m D(L)$ を

$$P_m x = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{m}(a_n \cos(2n-1)t + b_n \sin(2n-1)t)$$

によって定義する．他だし，$P_m D(L)$ は $D(L)$ の P_mによる像である．このとき次の評価を得る：

補題 2.1 $x \in D(L)$ に対して

$$\|x - P_m x\|_2 \le \frac{1}{(2m+1)^2}\sqrt{1 + \frac{A^2}{(2m+1)^2}}\|Lx\|_2.$$

□

□

Proof

$$x' = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos(2n-1)t + b_n' \sin(2n-1)t)$$

および

$$x'' = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'' \cos(2n-1)t + b_n'' \sin(2n-1)t).$$

と置く．すると，

$$a_n' = (2n-1)b_n, b_n' = -(2n-1)a_n,$$

および

$$a_n'' = -(2n-1)^2 a_n, b_n'' = -(2n-1)^2 b_n.$$

となる．従って，

$$x'' + Ax'(t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n \cos(2n-1)t + \tilde{b}_n \sin(2n-1)t),$$

と置くと

$$\tilde{a}_n = -(2n-1)^2 a_n + (2n-1)Ab_n, \tilde{b}_n = -(2n-1)Aa_n - (2n-1)^2 b_n,$$

あるいは

$$a_n = \frac{-(2n-1)^2\tilde{a}_n - (2n-1)A\tilde{b}_n}{(2n-1)^4 + (2n-1)^2A^2}$$
$$b_n = \frac{-(2n-1)^2\tilde{b}_n + (2n-1)A\tilde{a}_n}{(2n-1)^4 + (2n-1)^2A^2}.$$

を得る．ここで $\|x - P_m x\|_2^2$を考える．Perseval の等式により

$$\begin{aligned}\|x - P_m x\|_2^2 &= \sum_{n=m+1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(2n-1)^4 + (2n-1)^2A^2}{((2n-1)^4 + A^2(2n-1)^2)^2}(\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2)\\ &\leq \frac{1}{(2m+1)^4}(1 + \frac{A^2}{(2m+1)^2})\|Lx\|_2^2.\end{aligned}$$

を得る．これは所望の不等式である． □

更に，次の結果も成立する：

補題 2.2 $x \in H_2(0, 2\pi)$ に対して

$$\frac{1}{2+A}\|x\|_L \leq \|x\|_{H_2} \leq 2\|x\|_L,$$

が成立する． □

Proof

Perseval の等式から

$$\begin{aligned}\|x''\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n''^2 + b_n''^2)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^4}{(2n-1)^4 + A^2(2n-1)^2}(\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2)\\ &\leq \|Lx\|_2^2.\end{aligned}$$

同様に

$$\|x'\|_2^2 \le \|Lx\|_2^2.$$

従って，

$$\begin{aligned} \|x''\|_2^2 + \|x'\|_2^2 + \|x\|_2^2 &\le \|x\|_2^2 + 2\|Lx\|_2^2 \\ &\le 2\|x\|_L^2. \end{aligned} \tag{31}$$

一方

$$\begin{aligned} \|x\|_L &= \|x\|_2 + \|x'' + Ax'\|_2 \\ &\le \|x\|_2 + \|x''\|_2 + A\|x'\|_2 \\ &\le (2+A)\|x\|_{H_2}. \end{aligned}$$

□

以上から容易に $L + DN(\tilde{x}) : D(L) \to Y$ が指数 0 の Fredholm 作用素であることがわかる．
同様に

補題 2.3 $x \in H_2(0, 2\pi)$ に対して

$$\|x\|_{H_1} \le \|x\|_L,$$

および

$$\|x'\|_{H_1} \le \sqrt{2}\|x\|_L,$$

が成立する． □

Marti による Sobolev の埋め込み定理の埋め込み常数の評価により $x \in H_1(0, 2\pi)$ に対して

$$\|x\| \le \sqrt{\frac{2\pi}{\tanh 2\pi}}\|x\|_{H_1} \tag{32}$$

が成立する．

Duffing 方程式で $A = 0.1, B = 1$, および $C = 0.4464$ の場合を考え，その 2π-周期解の存在の数値的検証を試みる．そのために式 (2) の次の形の近似方程式を考える：

$$P_m f(x) = 0, x \in E = P_m D(L). \tag{33}$$

ここで，

$$f(x) = Lx + Nx.$$

この方程式 (33) は決定方程式と呼ばれるが，有限次元の方程式となる．従って，その近似解を容易に求めることができる．実際，次の近似解は Newton 法により求められた：

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \frac{12391844444622}{10096283453831}\cos t + \frac{1255301899357}{3264990063609}\sin t \\ &\quad + \frac{3339800261015}{62230322929326}\cos 3t + \frac{25614353059037}{407715265530912}\sin 3t \\ &\quad + \frac{30678010753}{50578758054295}\cos 5t + \frac{20268208717}{4200092845578}\sin 5t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{203050479}{1606019671451}\cos 7t+\frac{19543149859}{75359444598260}\sin 7t\\
&-\frac{9917353}{674649767686}\cos 9t+\frac{27060356}{3079992935547}\sin 9t\\
&-\frac{10029085}{9872509922553}\cos 11t-\frac{80843412}{2002007632142809}\sin 11t\\
&-\frac{353059}{7177837174127}\cos 13t-\frac{925405}{26456112180297}\sin 13t\\
&-\frac{2009793}{1535022779191217}\cos 15t-\frac{1158567}{347492958486574}\sin 15t.
\end{aligned}
$$

ここで，$P=Q=P_m$とし，Jを式(13)によって計算する．系の非線形性が多項式タイプであるので，行列Jは厳密に計算できる． 実際，三角関数の加法定理と自動微分を用いてJを計算するプログラムを容易に生成することができる．Jの各成分は有理数であるからJ^{-1}は有理数演算により厳密に計算できる．更に，$\|J^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F},\mathcal{E})}$の上界$M$は行列$J^{-1}$の Frobenius ノルムとして丸め誤差を厳密に考慮した上で計算できる．ただし，$F_m=P_mY$. 同様に，残差$\|f(\tilde{x})\|_2$も Parseval の等式により数値計算誤差なしにその上界が計算できる．

また，この例では

$$\|S(\tilde{x})\|_{L(X,Y)}\le\|3\tilde{x}^2\|_\infty.$$

が成立する．ただし，$\|x\|_\infty=\max\{|x(t)||0\le t\le 2\pi\}$.

$$\|\sqrt{2}\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos(2n-1)t+b_n\sin(2n-1)t)\|_\infty\le\sqrt{2}\sum_{n=1}^{m}(|a_n|+|b_n|),\tag{34}$$

から値$K=\|3\tilde{x}^2\|_\infty$の上界が有理数演算により厳密に計算できる．同様に$a=a_{B(\tilde{x},p)}$は次のように評価される：

$$a=6d(\|\tilde{x}\|_\infty+pd).$$

ただし，$d=\sqrt{\frac{2\pi}{\tanh 2\pi}}$. 従って，その上界も有理数演算により厳密に計算できる．

与えられた近似解$\tilde{x}$に対して,具体的な数値的評価の結果

$$M\le 3.118, r\le 0.0000000432, K\le 6.869 \text{ and } p\le 0.00000474.$$

を得た．これから

$$C\le 54.803, a\le 26.212 \text{ and } aCp\le 0.00681.$$

を得る．また，Duffing 方程式に対してはCの存在から$L+S(\tilde{x})$の逆作用素の存在が示せる．これから，定理 2.2 から近似解$\tilde{x}$の近傍に真の解x^*が唯一つ存在することが示された．Sobolev の埋め込み定数の評価より$x\in H_1(0,2\pi)$に対して

$$\|x\|_\infty\le\sqrt{2\pi/\tanh 2\pi}\|x\|_{H_1},$$

が成立することが示せる．従って，x^*と$\tilde{x}$の間の誤差評価

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{x}-x^*\|_\infty &\le d\|\tilde{x}-x^*\|_{H_1}\\
&\le d\|\tilde{x}-x^*\|_L\\
&\le dp,\\
&\le 0.0000120,
\end{aligned}\tag{35}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\|\frac{d\tilde{x}}{dt} - \frac{dx^*}{dt}\|_\infty &\le d\|\frac{d\tilde{x}}{dt} - \frac{dx^*}{dt}\|_{H_1} \\
&\le \sqrt{2}d\|\tilde{x} - x^*\|_L \\
&\le 0.0000169,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

を得る.

参考文献

[1] R. Bouc. "Sur la methode de Galerkin-Urabe pour les systemes differentierles periodiques". *Intern. J. Non-Linear Mech.*, 7:175–188, 1972.

[2] M. Nakao. "A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems". *Japan J. Appl. Math.*, 5:313–332, 1988.

[3] Y. Shinohara. "A geometric method of numerical solutions of nonlinear equations and its application to nonlinear oscillations". *Publ.RIMS, Kyoto Univ.*, 13, 1972.

[4] Y. Shinohara. "Numerical analysis of periodic solutions and their periods to autonomous differential systems". *J. Math. Tokushima Univ.*, 11:11–32, 1972.

[5] Y. Shinohara and N. Yamamoto. "Galerkin approximation of periodic solution and its period to van der Pol equation". *J. Math. Tokushima Univ.*, 12:19–42, 1978.

[6] M. Urabe. "Existence theorems of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems". *Funkcialaj Ekvacioj*, 15:75–100, 1972.

[7] M. Urabe. "Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems". *Arch. Rational Mech. Anal.*, 20:120–152, 1965.

[8] M. Urabe. "Numerical investigation of subharmonic solution to Duffing's equation". *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 5:79–112, 1969.