数理解析研究所講究録
第 842 巻 1993 年 61-75

The Cramer-Rao lower bound for sequential estimation in the multiparameter case

筑波大・数学　小池　健一　**(Ken-ichi Koike)**

1．はじめに

標本数が固定されているとき、ある不偏推定量が一様最小分散不偏推定量となるかどうかを確かめるとき、有効な手段として Cramér-Rao の不等式が良く知られている (例えば、Zacks [1])。これは、未知母数が 1 次元の場合には通常の不等式で、多次元の場合では行列が非負値行列になるという関係式で表されている。標本数が確率変数のとき、すなわち、逐次推定の場合に対しても、Wolfowitz [2] により、未知母数が 1 次元の場合における Cramér-Rao 型の不等式が与えられている。

ここでは、逐次推定において、未知母数が多次元の場合に拡張し、標本数が固定されている場合と同様の結果が成り立つことを示す。また、$r+1$ 次元の多項試行に対して、Bhat and Kulkarni[3] は、ある $\mathbf{R}^1$値の推定量が有効となるための必要十分条件を求めた。ここでは、それを $\mathbf{R}^r$値の推定量に応用し、その場合にも一般化分散について有効性が成り立つことを示す。更に、以上の結果を $r+1$ 次元の多項試行の未知母数のうちの最初の r番目までの成分$\hat{p}$の逐次推定に用いて、次に挙げる 3 つの問題について考える。(I). $m \geq 1$ とするとき、$E_\theta N \leq m$ の下で$\sum_{l=1}^r \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)}$を最小にする。(II). ある正の実数 a に対して、$\sum_{l=1}^r \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} \leq a$ の下で $E_\theta N$を最小にする。(III). $c(>0)$ を 1 標本抽出当たりの費用として、$\sum_{l=1}^r \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} + cE_\theta N$ を最小にする。但し、Nは標本数を表し、$Z^{(N)} = (Z_1^{(N)}, \ldots, Z_r^{(N)})$ は$\hat{\theta}$の不偏推定量とする。このとき、いずれの場合も single sampling の下で一様に、もしくは許容的な解が得られることを示す。これは、2 項試行の列に対する Wasan[4] の結果の自然な拡張となっている。

2．定義及び正則条件

次の条件 (A1) ～ (A7) を仮定する。

(A1) 母数空間Ωは $\mathbf{R}^r$ の開集合で、Ωの元を$\theta=(\theta_1,\dots,\theta_r)'$で表す。$g(\theta)=(g_1(\theta),\dots,g_k(\theta))'$は$\Omega$で定義されて $\mathbf{R}^k$の値をとる関数である。更に、$g_i(\theta)$ $(i=1,\dots,k)$ はθ_j $(j=1,\dots,r)$ に関して偏微分可能で、$h_{ij}(\theta)=\partial g_i(\theta)/\partial\theta_j$とおき、$H(\theta)=(h_{ij}(\theta))$ $(k\times r)$ とする。

(A2) 標本空間 $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ で定義された確率分布族 $\mathcal{P}=\{P_\theta\ :\ \theta\in\Omega\}$ はあるσ-有限測度μに関して確率密度関数をもち、$p(\cdot,\theta)$ がその 1 つである。また、$X_1,X_2,\dots$ を互いに独立にいずれも P_θに従う確率変数とする。

(A3) 集合 $\{x\ :\ p(x,\theta)>0\}$ がθと無関係である。

(A4) $p(x,\theta)$ は、任意の $(x,\theta)\in\mathcal{X}\times\Omega$で、$\theta_j(j=1,\dots,r)$ に関して偏微分可能である。

(A5) 標本の大きさ Nは確率変数で、$0<E_\theta N<\infty$ を満たす。

(A6) $g(\theta)$ の不偏推定量$\varphi=\left(\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\dots\right)$ (但し、$\varphi^{(n)}(X_1,\dots,X_n)=\left(\varphi_1^{(n)}(X_1,\dots,X_n),\dots,\varphi_k^{(n)}(X_1,\dots,X_n)\right)'$, $n=1,2,\dots$) に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{N=n\}}\varphi^{(n)}\left(x^{(1)},\dots,x^{(n)}\right)\prod_{l=1}^{n}p(x_l,\theta)\mu(dx_l)=g(\theta)\qquad(k\times 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{N=n\}}\prod_{l=1}^{n}p(x_l,\theta)\mu(dx_l)=1$$

の$\theta_j(j=1,\dots,k)$ に関する偏微分を、左辺において積分記号下で行うことができる。

(A7)

$$I_{ij}(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{N=n\}}\frac{\partial\log p(X_1,\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial\log p(X_1,\theta)}{\partial\theta_j}\prod_{l=1}^{n}p(x_l,\theta)\mu(dx_l)\qquad(i,j=1,\dots,r)$$

とすると、任意の$\theta\in\Omega$に対して、$I_{ii}(\theta)(i=1,\dots,r)$ が有限確定で、行列 $I(\theta)=(I_{ij}(\theta))$ が正値対称行列となる。

3．Cramér-Rao 型の不等式

Wolfowitz [2] は、前節の (A1) で $k=1$ の場合、すなわち、$g(\theta)=g_1(\theta)$ で (A1) ～ (A7) を満たすとき、次のことを示した。

定理 1 (Wolfowitz [2]). 前節の条件 (A1) ～ (A7) を満たす確率分布の族 $\mathcal{P}$、不偏推定量 φ と停止則 N に対して、(A1) において $k=1$ のとき、任意の $\theta \in \Omega$ に対して

$$\mathrm{var}_\theta \varphi \geq \frac{(dg_1(\theta)/d\theta)^2}{E_\theta N I(\theta)}$$

が成り立つ。

ここでは、正則条件 (A1) において、$k \geq 1$ の場合について考察すると次の補題を得る。

補題 1． 上の条件を満たす確率分布の族 $\mathcal{P}$ と停止則 N に対して、任意の $\theta \in \Omega$ につき

$$\mathrm{cov}_\theta \left(\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(X_l, \theta), \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \theta_\beta} \log p(X_l, \theta) \right) = E_\theta N I_{\alpha\beta}(\theta) \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$$

が成り立つ。

証明． 簡単のため、各 $n=1,2,\ldots$ に対して

$$Y_n^{(\alpha)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(X_l, \theta) \quad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

とおく。このとき、各 $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$ に対して

$$\mathrm{cov}_\theta \left(Y_N^{(\alpha)}, Y_N^{(\beta)} \right) = E_\theta N I_{\alpha\beta}(\theta)$$

を示せば良い。まず、任意の実数 s, t に対して

$$E_\theta \left(sY_1^{(\alpha)} + tY_1^{(\beta)} \right) = E_\theta \left\{ s^2 \left(Y_1^{(\alpha)} \right)^2 + 2st \left(Y_1^{(\alpha)} Y_1^{(\beta)} \right) + t^2 \left(Y_1^{(\beta)} \right)^2 \right\} \geq 0$$

となる。ここで、第 1、3 項は (A7) により、第 2 項も Schwarz の不等式から (A7) により有限確定となる。また (A6) より、各 $l=1,2,\ldots,$ に対して

$$E_\theta \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(X_l, \theta) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

となるので、2次モーメントに関するWaldの等式を用いて、任意の実数 s,t に対して

$$
\begin{aligned}
E_\theta\left(sY_N^{(\alpha)}+tY_N^{(\beta)}\right)^2 &= E_\theta N E_\theta\left(sY_1^{(\alpha)}+tY_1^{(\beta)}\right)^2 \\
&= E_\theta N\left\{s^2E_\theta\left[(Y_1^{(\alpha)})^2\right]+2stE_\theta\left[Y_1^{(\alpha)}Y_1^{(\beta)}\right]+t^2E_\theta\left[(Y_1^{(\beta)})^2\right]\right\} \\
&\quad (\alpha,\beta=1,\ldots,r)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

となる。一方、(1) の第1式は

$$
s^2E_\theta\left[(Y_N^{(\alpha)})^2\right]+2stE_\theta\left[Y_N^{(\alpha)}Y_N^{(\beta)}\right]+t^2E_\theta\left[(Y_N^{(\beta)})^2\right]
$$

とできて、s,t は任意の実数なので、st の項の係数を比較して

$$
E_\theta Y_N^{(\alpha)}Y_N^{(\beta)} = E_\theta N E_\theta Y_1^{(\alpha)}Y_1^{(\alpha)}
$$

すなわち

$$
\mathrm{cov}_\theta\left(Y_N^{(\alpha)},Y_N^{(\beta)}\right) = E_\theta N I_{\alpha\beta}(\theta)
$$

を得る。

□

更に、上の補題を用いると次の定理を得る。

定理2． 上の条件を満たす確率分布の族 $\mathcal{P}$、不偏推定量 φ と停止則 N に対して、φ の分散行列 $\mathrm{Var}_\theta\varphi\ (k\times k)$ は、任意の $\theta\in\Omega$ について

$$
\mathrm{Var}_\theta\varphi - H(\theta)\left(E_\theta NI(\theta)\right)^{-1}H'(\theta)
$$

が非負値行列である。更に、$r=k$ で H が正則行列となるとき、φ の一般化分散、すなわち、$|\mathrm{Var}_\theta\varphi|$ について、不等式

$$
|\mathrm{Var}_\theta\varphi| \geq \frac{|H(\theta)|^2}{|E_\theta NI(\theta)|}
\tag{2}
$$

が成り立つ。また、(2) で等号が成り立つための必要十分条件は

$$
\mathrm{Var}_\theta\varphi = H(\theta)\left(E_\theta NI(\theta)\right)^{-1}H'(\theta)
$$

である。このとき、各$\theta \in \Omega$と各 $i = 1, \ldots, r$について

$$\varphi_i^{(N)}(X_1, \ldots, X_N) = \sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^i(\theta) \left\{ \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(X_l, \theta) + b_\alpha^{(i)}(\theta) \right\} \quad P_\theta - a.s. \tag{3}$$

と表せる。但し、$a_\alpha^{(i)}(\theta), b_\alpha^{(i)}(\theta)$ はθのみに依存する関数である。

証明． (前半). 各$\alpha = 1, \ldots, r, n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \prod_{l=1}^{n} p(x_l, \theta) &= \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} p(x_l, \theta) \right) \prod_{l \neq m}^{n} p(x_l, \theta) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(x_m, \theta) \right) \prod_{l=1}^{n} p(x_l, \theta)\end{aligned}$$

となるので、(A6) の 2 式をθ_α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ で偏微分すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{N=n\}} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(x_l, \theta) \prod_{l=1}^{n} p(x_l, \theta) \mu(dx) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{N=n\}} \varphi_i^{(n)}(x) \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(x_l, \theta) \prod_{l=1}^{n} p(x_l, \theta) \mu(dx) = \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} g_i(\theta) = h_{i\alpha}(\theta)$$
$$(i = 1, \ldots, k, \alpha = 1, \ldots, r)$$

となる。ここで

$$Y_n^{(\alpha)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(x_l, \theta) \quad (n = 1, 2, \ldots, \alpha = 1, \ldots, r)$$

とおくと、上式、及び補題 1 より

$$\begin{cases} E_\theta Y_N^{(\alpha)} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r), \\ \mathrm{cov}_\theta \left(Y_N^{(\alpha)}, Y_N^{(\beta)} \right) = E_\theta N I_{\alpha\beta}(\theta) \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r) \\ \mathrm{cov}_\theta \left(\varphi_i^{(N)}, Y_N^{(\alpha)} \right) = h_{i\alpha}(\theta) \quad (i = 1, \ldots, k, \alpha = 1, \ldots, r) \end{cases}$$

となる。よって$\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, Y_N^{(1)}, \ldots, Y_N^{(r)}\right)$の共分散行列を作ると、非負値行列

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Var}_\theta \varphi & H(\theta) \\ H'(\theta) & E_\theta N I(\theta) \end{pmatrix}$$

を得る。仮定 (A7) より $I(\theta)$ は正値行列なので、次の行列

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & -H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1} \\ 0 & \mathrm{I}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Var}_\theta\varphi & H(\theta) \\ H'(\theta) & E_\theta NI(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ -(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta) & \mathrm{I}_r \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Var}_\theta\varphi - H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta) & 0 \\ 0 & E_\theta NI(\theta) \end{pmatrix}$$

もまた非負値行列となる。但し、$\mathrm{I}_k, \mathrm{I}_r$ は各々k, r次の単位行列をと表すものとする。従って $\mathrm{Var}_\theta\varphi - H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta)$ も非負値行列となる。

(後半). $k = r$で任意の$\theta \in \Omega$に対して、$H(\theta)$ が正則であるとする。このとき、$H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta)$ は正値行列となる。よって、Graybill [5] の Theorem12.2.14 より、任意の$\theta \in \Omega$に対して

$$|\mathrm{Var}_\theta\varphi| \geq \frac{|H(\theta)|^2}{|E_\theta NI(\theta)|}$$

が成り立つ。

〔等号の必要条件〕. このとき、ある正則行列 $P(\theta)$ があって、各$\theta \in \Omega$につき

$$P'(\theta)\mathrm{Var}_\theta\varphi P(\theta) = \mathrm{I}_k,$$
$$P'(\theta)H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta)P(\theta) = \mathrm{diag}(a_1(\theta), \ldots, a_k(\theta)) \quad (a_i(\theta) > 0, i = 1, \ldots, k) \tag{4}$$

とできる (例えば、Graybill [5], Theorem 12.2.13)。すると $\mathrm{Var}_\theta\varphi - H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta)$ は非負値行列なので、$\mathrm{I}_k - \mathrm{diag}(a_1(\theta), \ldots, a_k(\theta))$ も非負値行列である。従って、各$\theta \in \Omega$につき

$$1 \geq a_i(\theta) \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{5}$$

である。今

$$|\mathrm{Var}_\theta\varphi| = \left|H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta)\right|$$

とすると、$|P'(\theta)\mathrm{Var}_\theta\varphi P(\theta)| = \left|P'(\theta)H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta)P(\theta)\right|$ となるので

$$1 = \prod_{i=1}^{k} a_i(\theta) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

を得る。よって (5) より $a_i(\theta) = 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ となる。ここで再び (4) より

$$P'(\theta)\mathrm{Var}_\theta\varphi P(\theta) = P'(\theta)H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}P(\theta) = \mathrm{I}_k$$

となる。この式に左右から各々$P(\theta)^{-1}, (P'(\theta))^{-1}$をかけて与式を得る。

〔等号の十分条件〕．自明

また、(3) が成り立つとき、$\mathrm{Var}_\theta \varphi$ の対角成分に注意すると

$$\mathrm{var}_\theta \varphi_i^{(N)} = (h_{i1}(\theta), \ldots, h_{ik}(\theta))(E_\theta NI(\theta))^{(-1)} \begin{pmatrix} h_{i1}(\theta) \\ \vdots \\ h_{ik}(\theta) \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

となる。ここで

$$h_{ij}(\theta) = \mathrm{cov}_\theta\left(\varphi_i^{(N)}, Y_N^{(j)}\right)$$
$$E_\theta NI(\theta) = \left(\mathrm{cov}_\theta\left(Y_N^{(i)}, Y_N^{(j)}\right)\right) \quad (i, j = 1, \ldots, k)$$

となることより、Lehmann [6] の Theorem 2.7.1 を用いて、各$\theta \in \Omega, i = 1, \ldots, k$に対して

$$\varphi_i^{(N)} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^i(\theta) \left\{ \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \log p(X_l, \theta) + b_\alpha^{(i)}(\theta) \right\} \quad P_\theta - a.s.$$

を得る。但し、$a_\alpha^i(\theta), b_\alpha^i(\theta) (i = 1, \ldots, k)$ はθにのみ依存する関数である。また、上式が成り立つとき

$$\mathrm{Var}_\theta \varphi = H(\theta) \left(E_\theta NI(\theta)\right)^{-1} H'(\theta)$$

となることは明らか。

□

定数ではない写像$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ が、$E_\theta \varphi = g(\theta)$ の$\theta = \theta_0$における有効不偏推定量であるとは、$\theta = \theta_0$のとき (2) で等号が成り立つことをいう。また、φ がその期待値の任意の$\theta \in \Omega$における有効推定量であるとき、φ と対応する停止則は有効であるという。

なお、上の定理において、推定量と停止則が有効であるための必要十分条件に関する論文として Ghosh[7]、Stefanov[8] がある。

Wolfowitz [2] と同様にして、(A6) が成り立つための十分条件 (B1)、(B2) を次に挙げる。

(B1) 各 $\{N = n\}$ において、各 $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, r$に対してある可測関数 $T_n^{(ij)}(x_1, \ldots, x_n)$ があって、任意の $(x, \theta) \in \mathcal{X} \times \Omega$に対して

$$\left| \varphi_i^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \prod_{l=1}^{n} p(x_l, \theta) \right| \leq T_n^{(ij)}(x_1, \ldots, x_n)$$

かつ

$$\int_{\{N=n\}} T_n^{(ij)}(x_1,\ldots,x_n)\prod_{l=1}^{n}\mu(dx_l)<\infty$$

を満たす。

(B2) 各 $i=1,\ldots,r$について

$$t_n^{(i)}(\theta)=\int_{\{N=n\}}\varphi_i^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)\prod_{l=1}^{n}p(x_l,\theta)\mu(dx_l)$$

とすると、各 $i=1,\ldots,k, j=1,\ldots,r$について級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial t_n^{(i)}(\theta)}{\partial\theta_j}$ が一様収束する。

$k=r$の場合に前定理と同様にして、次の系を得る。

系．(A1) ～ (A7) の条件下で

$$g(\theta)=\theta+b(\theta),\qquad b(\theta)=(b_1(\theta),\ldots,b_k(\theta))'$$
$$B_{ij}(\theta)=\frac{\partial b_i(\theta)}{\partial\theta_j}\qquad (i,j=1,\ldots,k)$$

とおいて、$B(\theta)=(B_{ij}(\theta))\,(k\times k)$ とする。このとき損失関数を $W(\theta,d)=(d-\theta)'(d-\theta)$ とすると、φ の危険関数 $R(\theta,\varphi)$ は

$$R(\theta,\varphi)\geq \mathrm{tr}\left[b(\theta)b'(\theta)+(\mathrm{I}_k+B(\theta))(E_\theta NI(\theta))^{-1}(\mathrm{I}_k+B'(\theta))\right]$$

を満たす。但し、$\mathrm{I}E_k$は k次の単位行列を表す。

証明．仮定より $H(\theta)=\mathrm{I}_k+B(\theta)$ であり、定理 2 から

$$\mathrm{Var}_\theta\varphi-(\mathrm{I}_k+B(\theta))(E_\theta NI(\theta))^{-1}(\mathrm{I}_k+B(\theta))'$$

は非負値行列となる。一方

$$E_\theta(\varphi-\theta)(\varphi-\theta)'=b(\theta)b'(\theta)+\mathrm{Var}_\theta\varphi$$

であるから

$$E_\theta(\varphi-\theta)(\varphi-\theta)'-b(\theta)b'(\theta)-(\mathrm{I}_k+B(\theta))(E_\theta NI(\theta))^{-1}(\mathrm{I}_k+B(\theta))'$$

が非負値行列となり、このトレースをとって与式を得る。

□

3．多項試行の列に対する効率

以下では前節の確率変数 $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ を互いに独立な $r+1$-次元の多項試行の列、すなわち、各 $i=1,2,\ldots$ に対して、$X^{(i)} = \left(X_1^{(i)}, \ldots, X_{r+1}^{(i)}\right)$ とするとき、$X_j^{(i)} \in \{0,1\}$ $(j = 1,\ldots,r+1)$, $\sum_{j=1}^{r+1} X_j^{(i)} = 1$ であって

$$0 < \theta_j < 1 \quad (j = 1, \cdots, r+1), \qquad \sum_{j=1}^{r+1} \theta_j = 1$$

となる $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_{r+1})$ に対し

$$P_\theta(X_j^{(i)} = 1) = \theta_j, \qquad (j = 1, \cdots, r+1)$$

とする。ここで $Y^{(N)} = (Y_1^{(N)}, \ldots, Y_{r+1}^{(N)}) = \sum_{l=1}^N X^{(l)}$ とおくと、$Y^{(N)}$ は θ に対する十分統計量となる。従って $Y^{(N)}$ にもとづく推定量を考えれば十分である。ここでは停止則として $Y^{(N)}$ にもとづく非確率化停止則を用いることにする。

ある正整数 n があって、標本数 N が $N=n$ となるとき、この停止則を大きさ n の single sampling plan という。このとき $Y^{(N)}$ は、指数 n の多項分布に従うとみなせる。また、上の $Y^{(N)}$ に対して正整数 k があって

$$\sum_{j=1}^{i} Y_j^{(N)} = k \qquad (i = 1, \ldots, r+1)$$

となるとき、この停止則を i 次の指数 k の inverse sampling plan という。但し、$Y^{(N)}$ の成分に対する組み替えは許すものとする。このとき、$i=1$ の場合には負の多項分布、$i=r+1$ の場合には single sampling plan となる。ここでは、一般性を失わずに最初の j 番目までの座標をとることにする。

前節で $k=1$ の場合において、有効な推定量と停止則について Bhat and Kulkarni [3] による次の結果がある。

定理 3 (Bhat and Kulkarni[3])．(A1) ～ (A7) を満たす停止則と推定量のうち、single sampling plan と inverse sampling plan においてのみ有効推定量が存在し、その場合、推定量は $Y^{(N)}$ の成分の線形関数であるとき、またそのときに限って有効となる。

以下では、上の定理の結果が (2) においても成り立つ例を示す。

例 1 . 大きさ n の single sampling plan の場合.

$\hat{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_r)$ の不偏推定量として

$$\delta_N=(\delta_1^{(N)},\ldots,\delta_r^{(N)})=\frac{1}{N}Y^{(N)}$$

をとる。この場合 $Y^{(N)}$は、指数 n の多項分布とみなせるから

$$\mathrm{cov}_\theta\left(\delta_i^{(N)},\delta_j^{(N)}\right)=-\frac{1}{n}\theta_i\theta_j \quad (i\neq j)$$

$$\mathrm{var}_\theta\delta_i^{(N)}=\frac{1}{n}\theta_i(1-\theta_i) \quad (i=1,\ldots,r)$$

となるから、$\delta^{(N)}$の共分散行列は

$$\mathrm{Var}_\theta\delta^{(N)}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\theta_1(1-\theta_1) & -\theta_1\theta_2 & \cdots & -\theta_1\theta_r\\ -\theta_2\theta_1 & \theta_2(1-\theta_2) & \cdots & -\theta_2\theta_r\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\theta_r\theta_1 & -\theta_r\theta_2 & \cdots & \theta_r(1-\theta_r)\end{pmatrix}=\frac{1}{n}C(\theta) \quad (\mathrm{say})$$

となる。一方、前節の $I(\theta)$ は

$$I(\theta)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_{r+1}} & \frac{1}{\theta_{r+1}} & \cdots & \frac{1}{\theta_{r+1}}\\ \frac{1}{\theta_{r+1}} & \frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_{r+1}} & \cdots & \frac{1}{\theta_{r+1}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{\theta_{r+1}} & \frac{1}{\theta_{r+1}} & \cdots & \frac{1}{\theta_r}+\frac{1}{\theta_{r+1}}\end{pmatrix} \tag{6}$$

であり、$H(\theta)=\mathrm{I}_r$(r次の単位行列)、$E_\theta N=n$ となる。このとき $C(\theta)I(\theta)$ の (i,j) $(1\leq i<j\leq r)$ 成分は、$\theta_{r+1}=1-\sum_{l=1}^r\theta_l$ より

$$\begin{aligned}&-\sum_{l=1}^{i-1}\theta_i\theta_l\frac{1}{\theta_{r+1}}+\theta_i(1-\theta_i)\frac{1}{\theta_{r+1}}-\sum_{l=i+1}^{j-1}\theta_i\theta_l\frac{1}{\theta_{r+1}}-\theta_i\theta_j(\frac{1}{\theta_j}+\theta_{r+1})-\sum_{l=j+1}^{r}\theta_i\theta_l\frac{1}{\theta_{r+1}}\\ &=\theta_i\left\{\frac{1}{\theta_{r+1}}\left(-\sum_{l=1}^r\theta_l+\theta_i+\theta_j+(1-\theta_i)-\theta_j\right)-1\right\}\\ &=\theta_i\left\{\frac{1}{\theta_{r+1}}\left(1-\sum_{l=1}^r\theta_l\right)-1\right\}=0\end{aligned}$$

となる。同様に、(i,i) $(i=1,\ldots,r)$ 成分は

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{l=1}^{i-1}\theta_i\theta_l\frac{1}{\theta_{r+1}}+\theta_i(1-\theta_i)\left(\frac{1}{\theta_i}+\frac{1}{\theta_{r+1}}\right)-\sum_{l=i+1}^{r}\theta_i\theta_l\frac{1}{\theta_{r+1}}\\
&=1
\end{aligned}
$$

となる。従って $C(\theta)I(\theta)=\mathrm{I}_r$、すなわち

$$
\mathrm{Var}_\theta\delta^{(N)}=H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta)
$$

となり、(2) で等号が成り立つ。

例2．i 次の指数 k の inverse sampling plan の場合 (i,k は正整数で $1\le i\le r+1$).

このとき、Bhat and Kulkarni[3] より

$$
E_\theta Y_j^{(N)}=k\theta_j/\sum_{l=1}^{i}\theta_l=k\theta_j/A_i \quad (j=1,\ldots,r+1)
$$

$$
\mathrm{Var}_\theta Y_j^{(N)}=\begin{cases} k\theta_j(A_i-\theta_j)/A_i^2 & (j\le i)\\ k\theta_j(A_i+\theta_j)/A_i^2 & (j>i)\end{cases}
$$

$$
\mathrm{cov}_\theta\left(Y_m^{(N)},Y_n^{(N)}\right)=\begin{cases} k\theta_m\theta_n/A_i^2 & (m\ne n, m,n>i)\\ -k\theta_m\theta_n/A_i^2 & (m\ne n, m,n\le i)\\ 0 & (m\le i<n)\end{cases}
$$

となることが示されている。但し A_i は $\sum_{l=1}^{i}\theta_l$ とする。今、$\hat{Y}^{(N)}=\left(Y_1^{(N)},\ldots,Y_r^{(N)}\right)$ をその期待値の不偏推定量として考える。このとき $\sum_{j=1}^{k}Y_j^{(N)}=N$ なので、$E_\theta N=k/A_i$ となる。従って、$\left(Y_1^{(N)},\ldots,Y_r^{(N)}\right)$ によって、その期待値の不偏推定をする場合にも例 1 と同様に一般化分散の下界を達成することが示される。

4．多項試行の列に対する応用

独立な二項試行の列に対して、その成功の確率 p を推定する場合、Wasan[4] は次のような 3 つの問題を考えた。(i) $m\ge 1$ とするとき、$E_pN\le m$ の下で $\mathrm{var}_p\delta^{(N)}$ を最小にする。

(ii) ある正の実数 a に対して、$\mathrm{var}_p\delta^{(N)} \le a$ の下で E_pNを最小にする。(iii) $c(>0)$ を 1 標本抽出当たりの費用として、$\mathrm{var}_p\delta^{(N)} + cE_pN$ を最小にする。但しいずれの場合も$\delta^{(N)}$は p の不偏推定量とする。

ここでは、Wasan と同様にして、未知母数のうち$\hat{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ を推定し、次のような問題を考える。(A1) ～ (A7) を満たす停止則と$\hat{\theta}$の不偏推定量 $Z^{(N)} = (Z_1^{(N)}, \ldots, Z_r^{(N)})$ について次のことを示す。

(I). $m \ge 1$ とするとき、$E_\theta N \le m$ の下で$\sum_{l=1}^r \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)}$を最小にする。

(II). ある正の実数 a に対して、$\sum_{l=1}^r \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} \le a$ の下で $E_\theta N$を最小にする。

(III). $c(>0)$ を 1 標本抽出当たりの費用として、$\sum_{l=1}^r \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} + cE_\theta N$ を最小にする。

(I) の場合 .

定理 4 . 定理 2 の正則条件を満たす停止則と$\hat{\theta}$の任意の不偏推定量 $Z^{(N)} = (Z_1^{(N)}, \ldots, Z_r^{(N)})$ において、(I) に対して停止則として指数 m の single sampling をとり、推定量として

$$Z^{(N)} = (\sum_{l=1}^m X_1^l, \ldots, \sum_{l=1}^m X_r^l) \tag{7}$$

をとればθに関して一様に最適である。

証明 . 上の条件下で

$$\sum_{l=1}^r \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} \ge \mathrm{tr}\left(H(\theta)(E_\theta NI(\theta))^{-1}H'(\theta)\right) \tag{8}$$

であり、等号成立は single sampling かまたは inverse sampling のいずれかである。ところが今、$\hat{\theta}$の不偏推定量についてのみ考えているので、inverse sampling では有効な不偏推定量は存在し得ない。よって、(8) で等号は single sampling となる。この single sampling の指数を m とすると、$\sum_{l=1}^m X^l$はθに対する完備十分統計量となる。そこで、$Z^{(N)}$として (7) をとれば、これは$\hat{\theta}$の一様最小分散不偏推定量 (UMVUE) である。従ってこの問題では、停止則として指数 m の single sampling をとり、推定量として上の $Z^{(N)}$をとれば良い。

□

(II) の場合．

まず、次を示す。

定理 5．定理 2 の正則条件を満たす停止則と$\hat{\theta}$の任意の不偏推定量 $Z^{(N)} = (Z_1^{(N)}, \ldots, Z_r^{(N)})$ において、ある正整数 m があって、任意のθに対して

$$\sum_{l=1}^{r} \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} \le \left(\frac{r}{r+1}\right)^2 \frac{1}{m}$$

となるとき

$$E_{\theta_0} N \ge m$$

となる。但し、$\theta_0 = (1/(r+1), \ldots, 1/(r+1))$ である。また、single sampling の下で UMVUE を用いたときのみ等号が成立する。

証明．与えられた条件及び定理 2 より

$$\left(\frac{r}{r+1}\right)^2 \frac{1}{m} \ge \sum_{l=1}^{r} \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} \ge \frac{1}{E_\theta N} \sum_{l=1}^{r} \theta_l(1-\theta_l) \tag{9}$$

となるので

$$E_\theta N \ge m \left(\frac{r+1}{r}\right)^2 \sum_{l=1}^{r} \theta_l(1-\theta_l)$$

を得る。特に$\theta = \theta_0$とすれば

$$E_{\theta_0} N \ge m \left(\frac{r+1}{r}\right)^2 \left(\frac{r}{r+1}\right)^2 = m$$

となる。また、Bhat and Kulkarni[3] により (9) で等号となるのは、single sampling で UMVUE のときのみであることがわかる。

□

上の定理により、single sampling の下で UMVUE を用いないかぎり、正則条件と $\sup_\theta \sum_{l=1}^{r} \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} \le \left(\frac{r}{r+1}\right)^2 \frac{1}{m}$ を満たす停止則と不偏推定量に対しては、$E_{\theta_0} N > m$ となってしまうことになる。言い替えれば、指数 m の single sampling は (II) に対して許容的であるということになる。しかし、この場合に $\sup_\theta \sum_{l=1}^{r} \mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)} \le \left(\frac{r}{r+1}\right)^2 \frac{1}{m}$ について、

指数 m の single sampling が一様に $E_\theta N$を最小としないことが、$r=1$ の場合に Wasan[4] により与えられている。

(III) の場合．

(I) の条件を満たす停止則と$\hat{\theta}$の任意の不偏推定量 $Z^{(N)}=(Z_1^{(N)},\ldots,Z_r^{(N)})$ において、危険関数を

$$R(\theta,Z^{(N)})=\sum_{l=1}^{r}\mathrm{var}_\theta Z_l^{(N)}+cE_\theta N$$

とする。但し、c は正の定数とする。ここでは、$\sup_\theta R(\theta,Z^{(N)})$ を最小にすることを考える。

まず、停止則として指数 m の single sampling 、$\hat{\theta}$の不偏推定量として UMVUE である $\hat{Z}^{(N)}$をとると、上の危険関数は

$$R(\theta,\hat{Z}^{(N)})=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{r}\theta_l(1-\theta_l)+cm$$

となる。ここで$\theta=\theta_0=(1/(r+1),\ldots,1/(r+1))$ とすれば

$$R(\theta_0,\hat{Z}^{(N)})=\frac{1}{m}\left(\frac{r}{r+1}\right)^2+cm$$

となる。この式を m の関数とみなせば、$m=(1/\sqrt{c})(1/(r+1))$ が整数のとき、最小値 $2\sqrt{c}r/(r+1)$ をとる。一方、定理 2 より (I) の条件を満たす停止則と$\hat{\theta}$の任意の不偏推定量 $Z^{(N)}=(Z_1^{(N)},\ldots,Z_r^{(N)})$ に対して

$$R(\theta,Z^{(N)})\geq\frac{1}{E_\theta N}\sum_{l=1}^{r}\theta_l(1-\theta_l)+cE_\theta N$$

となる。ここでも$\theta=\theta_0$として、同様に

$$R(\theta_0,Z^{(N)})\geq\frac{1}{E_{\theta_0}N}\left(\frac{r}{r+1}\right)^2+cE_{\theta_0}N\geq\frac{2r}{r+1}\sqrt{c}\tag{10}$$

を得る。ここで Bhat and Kulkarni[3] により、single sampling であるときに限って (10) は等号となる。言い替えれば、停止則として指数 $m=(1/\sqrt{c})(r/(r+1))$ の single sampling plan で UMVUE を用いる場合以外のとき、$R(\theta_0,Z^{(N)})>\frac{2r}{r+1}\sqrt{c}$となる。よって、これは許容的である。

参考文献

[1] Zacks, S. (1971). *The Theory of Statistical Inference.* Wiley, New York.

[2] Wolfowitz, J. (1946). The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential process. *Ann. Math. Statist.*, **18**, 215-230.

[3] Bhat, B. R. and N. V. Kulkarni (1966). On efficient multinomial estimation. *J. Roy. Statist. Soc. ser B*, **28**, 45-52.

[4] Wasan, M. T. (1964). Sequential optimum procedures for unbiased estimation of a binomial parameter. *Technometrics*, **6**, 259-271.

[5] Graybill, F.A. (1983). *Matrices with applications in Statistics.* 2nd ed. Wadsworth, Inc.

[6] Lehmann, E. L. (1983). *Theory of Point Estimation.* Wiley, New York.

[7] Ghosh, B. K. (1987). On the attainment of the Cramér-Rao bound in the sequential case. *Sequntial Analysis*, **6**, 267-288.

[8] Stefanov, V. T. (1990). A note on the attainment of the Cramér-Rao bound in the sequential case. *Sequntial Analysis*, **9**, 327-334.