数理解析研究所講究録
第 844 巻 1993 年 50-57

Dirichlet 級数の $q-analogue$ について

青山学院高等部　　津村 博文 (Hirofumi　Tsumura)

§ 0. Introduction

複素数 q, u について, Carlitz は q-Bernoulli 数 $\{\beta_k(q)\}$ と u に付随した q-Euler 数 $\{H_k(u,q)\}$ を次のように定義した。

$$\beta_0(q)=1,\ \ \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}q^{j+1}\beta_j(q)-\beta_k(q)=\begin{cases}1 & (k=1)\\ 0 & (k\geq 2)\end{cases}$$

$$H_0(u,q)=1,\ \ \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}q^{j}H_j(u,q)-uH_k(u,q)=0 \quad (k\geq 1).$$

([2] 参照). とくに $q\to 1$ のとき $\beta_k(q)\to B_k$, $H_k(u,q)\to H_k(u)$ となる。 ここで $\{B_k\}$ と $\{H_k(u)\}$ は 各々次の式で定義される Bernoulli 数, Euler 数である。

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{t^k}{k!},$$

$$\frac{1-u}{e^t-u}=\sum_{k=0}^{\infty}H_k(u)\frac{t^k}{k!}.$$

[4] において, Koblitz は p-進 L-関数の q-analogue である $L_{p,q}(s,\chi)$ を構成し, 次の 2 つの問題を提出した。

(1) Are there complex analytic q-L-series which $L_{p,q}(s,\chi)$ can be viewed as interpolating, in the same way that $L_p(s,\chi)$ interpolates $L(s,\chi)$?

(2) Do Carlitz's $\beta_k(q)$ occur in the coefficients of some Stirling type series for p-adic or complex analytic $q-\log-\Gamma-$functions ?

問題 (1) については, 佐藤潤也氏により, また問題 (2) の p-adic case については, 筆者により解答があたえられた ([5],[7] 参照)。

この小文では, §1 において, 問題 (2) の complex case についての解答をあたえる。すなわち log $-\Gamma-$ 関数 の q-analogue である関数 $G(x,q)$ を構成し, その関数を使って佐藤氏の定義した q-L-series $L_q(s,\chi)$ の正の整数での値をあらわす。これらの関係式は Dirichlet-L-級数と log $-\Gamma-$ 関数 との古典的な関係式の q-analogue とみなせる。すなわち $G(x,q)$ は上記の問題 (2) が求めている log $-\Gamma-$ 関数 の q-analogue と考えられる。(詳細は [8] 参照) §2 においては, Riemann $\zeta-$ 関数 $\zeta(s)$ (をひねった級数) の q-analogue を考え, その性質を調べることにより, $\zeta(s)$ の正の整数における値の間の関係式 (漸化式) を求める。系として $\zeta(2)=\pi^2/6$ や $\zeta(4)=\pi^4/90$ などの古典的関係式や, $\zeta(3)$ の級数表現などが得られる。同様の手法を使えば, Dirichlet L-級数 の正の整数における値も求められる。(詳細は [9] 参照)

§ 1. log $-\Gamma-$ 関数の q $-$ analogue

$\mathbf{Z},\mathbf{R},\mathbf{C}$ を各々 有理整数環, 実数体, 複素数体とする。$q,\ u\in\mathbf{C}$ を各々 $|\,q\,|<1$, $|\,u\,|>1$ とする。このとき $z\in\mathbf{C}$ に対し $[z]=[z;q]=(1-q^z)/(1-q)$ とかく。仮定から

$$\lim_{n\to\infty}[n]=\frac{1}{1-q}. \tag{1.1}$$

そこで, $s\in\mathbf{C}$ に対し

$$\ell(s,u,q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{-n}}{[n]^s} \tag{1.2}$$

とおく。

LEMMA 1. $\ell(s,u,q)$ は全平面で正則であり, $k\geq 0$ となる $k\in\mathbf{Z}$ に対し,

$$\ell(-k,u,q)=\begin{cases}\dfrac{1}{u-1} & (k=0)\\[2ex] \dfrac{u}{u-1}H_k(u,q) & (k\geq 1)\end{cases}$$

Proof. [5] 参照。

そこで，つぎのような関数を定義する。

$$g(x,u,q)=\sum_{n=0}^{\infty}u^{-n}(x+[n])\log(x+[n]). \tag{1.3}$$

条件 $|u|>1$ から，$g(x,u,q)$ は locally analytic である。Lemma 1 と (1.3) から次の命題をえる。

PROPOSITION 1. $|x|>1/(1-|q|)^2$ となる $x\in\mathbf{C}$ に対し，

$$g(x,u,q)\doteq\frac{u}{u-1}\{x\log x+\frac{1}{u-q}(\log x+1)\}$$
$$+\frac{u}{u-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}H_{k+1}(u,q)\frac{1}{x^k}.$$

COROLLARY 1. $|x|>1/(1-|q|)^2$ となる $x\in\mathbf{C}$ に対し，

$$g'(x,u,q)=\frac{u}{u-1}(\log x+1)+\frac{u}{u-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}H_k(u,q)\frac{1}{x^k},$$

ここで $g'(x,u,q)=\dfrac{d}{dx}g(x,u,q)$ とする。

佐藤氏により，q-Riemann ζ-関数が，次のように定義された。([5] 参照)

$$\zeta_q(s)=\frac{2-s}{s-1}(1-q)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{[n]^{s-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{[n]^s}. \tag{1.6}$$

LEMMA 2. $\zeta_q(s)$ は $s=1$ のみで 1 位の極をもつ有理型関数で，$k\geq 1$ となる $k\in\mathbf{Z}$ に対し，

$$\zeta_q(1-k)=\begin{cases} q\beta_1(q) & (k=1)\\ -\dfrac{\beta_k(q)}{k} & (k\geq 2)\end{cases}$$

Proof. [5] 参照。

Lemma 1, Lemma 2 と (1.6) から, $k \geq 2$ となる $k \in \mathbf{C}$ に対し, 次の関係式をえる。

$$-\frac{\beta_k(q)}{k} = -\frac{k+1}{k} H_k(q^{-1}, q) + \frac{1}{1-q} H_{k-1}(q^{-1}, q). \tag{2.2}$$

そこで $G(x, q)$ を

$$G(x, q) = (qx - x - 1) g'(x, q^{-1}, q) + 2(1-q) g(x, q^{-1}, q) + \frac{1}{1+q} \tag{2.3}$$

と定義すると, 次の命題をえる。

PROPOSITION 2. $|\, x \,| > 1/(1- |\, q \,|)^2$ となる $x \in \mathbf{C}$ に対し,

$$G(x, q) = (x - \frac{1}{1+q}) \log x - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \beta_{k+1}(q) \frac{1}{x^k}.$$

REMARK. Proposition 2 の結果は, 古典的な漸近級数展開 ([10] 参照)

$$\log \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} \sim (x - \frac{1}{2}) \log x - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} B_{k+1} \frac{1}{x^k}$$

の q-analogue とみることができる。

$r \geq 1$ となる $r \in \mathbf{Z}$ について $\dfrac{d^r}{dx^r} f(x)$ を簡単に $f^{(r)}(x)$ とかくことにする。(1.3) から次の補題をえる。

LEMMA 3. $r \geq 2$ となる $r \in \mathbf{Z}$ に対し,

$$\frac{(-1)^r}{(r-2)!} g^{(r)}(x, u, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{-n}}{(x + [n])^{r-1}}.$$

ここで, 佐藤氏の q-L-series を考える。

$$\mathrm{L}_q(s, \chi) = \frac{2-s}{s-1}(1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \chi(n)}{[n]^{s-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \chi(n)}{[n]^s}, \tag{1.9}$$

ただし χ は primitive Dirichlet character で 導手は f とする。 この関数が Koblitz の問題 (1) の解答になっている。([4],[5] 参照)

$k \geq 2$ となる $k \in \mathbf{Z}$ について, 帰納的に

$$G^{(k)}(x,q) = (qx - x - 1)g^{(k+1)}(x, q^{-1}, q) + (1-q)(2-k)g^{(k)}(x, q^{-1}, q) \tag{3.3}$$

が示されるので, Lemma 3 と (1.9) より, 次の命題をえる。

PROPOSITION 3. $k \geq 2$ となる $k \in \mathbf{Z}$ に対し

$$L_q(k,\chi) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\frac{1}{[f]^k}\sum_{a=1}^{f} q^{a(2-k)}\chi(a)G^{(k)}(q^{-a}\frac{[a]}{[f]}, q^f)$$

REMARK. Lemma 3 と (1.9) より, $k \geq 2$ について

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}G^{(k)}(x,q) = \frac{2-k}{k-1}(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(x+[n])^{k-1}} \\ + (1+x-qx)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(x+[n])^k}\end{aligned} \tag{3.4}$$

をえる。 これは古典的な関係式

$$\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\frac{d^k}{dx^k}\log\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^k}$$

の q-analogue と考えられる。 これらのことから, $G(x,q)$ は $\log - \Gamma -$ 関数 の q-analogue と考えられる。

§ 2. $\zeta(s)$の正の整数における値について

以下, q を $q \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{2} \leq q < 1$ とする。また $c \geq 1$ となる $c \in \mathbf{Z}$ について

$$F(t,c,q) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(-q^{-c}, q)\frac{t^k}{k!}$$

とおく。[5] より

$$F(t,c,q)=(1+q^c)\sum_{n=0}^{\infty}(-q^c)^n e^{[n]t} \tag{2.2}$$

とかける。よって $F(t,c,q)$ は t について, 全平面で正則である。とくに $1/2\leq q\leq 1$ のときも, $F(t,c,q)$ は $|t|<\pi$ の範囲で t について正則であるから, 次の補題をえる。

LEMMA 4. $\frac{\pi}{2}\leq r<\pi$ となる任意の r に対し, 定数 $M(c,r)$ が存在して,

$$\left|\frac{H_k(-q^{-c},q)}{k!}\right|\leq M(c,r)\ \ (\frac{1}{r})^k. \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

そこで $\ell(s)=\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n^s$ とおくと, 次の補題がえられる。ただし E_n は $E_n=H_n(-1)$ (§0 参照) である。注として $E_{2n}=0\ (n\geq 1)$ である。

LEMMA 5. $k\geq 1$ となる $k\in\mathbf{Z}$ と, $|\theta|\leq\pi$ となる$\theta\in\mathbf{R}$ に対し, 次が成り立つ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2k}}\cos(n\theta)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j\theta^{2j}}{(2j)!}\ell(2k-2j)-\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{2(2k)!}.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2k+1}}\sin(n\theta)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}\ell(2k-2j)-\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{2(2k+1)!}.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2k+1}}\cos(n\theta)=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j\theta^{2j}}{(2j)!}\ell(2k+1-2j)+\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^j\theta^{2j}}{2(2j)!}E_{2j-1-2k}.$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2k}}\sin(n\theta)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}\ell(2k-2j-1)+\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^j\theta^{2j+1}}{2(2j+1)!}E_{2j+1-2k}.$

PROOF. 容易にわかるように

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2kn}}{[n]^{2k}}\cos([n]\theta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\theta^{2j}}{(2j)!}\ell(2k-2j,-q^{-2k},q)$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j\theta^{2j}}{(2j)!}\ell(2k-2j,-q^{-2k},q)-\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}\frac{1}{q^{-2k}+1}$$

$$+\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^j\theta^{2j}}{(2j)!}\frac{q^{-2k}}{q^{-2k}+1}H_{2j-2k}(-q^{-2k},q) \tag{2.4}$$

ただし $k\geq 1$,$|\theta|<\pi$。(2.4) の左辺と右辺の第 1 項は, $q^n/[n]\leq 1/n$ に注意すれば, また右辺の第 3 項は Lemma 4 から $q\in[1/2,1]$ で一様収束するので, $q\to 1$ としてよい。$H_{2j-2k}(-q^{-2k},q)\to E_{2j-2k}=0$ に注意すれば, (1) をえる。 (2),(3),(4) も同様に証明できる。

ここで, Lemma 5 において, $\theta=\pi/2$ とすると, 関係式

$$\ell(s)=(2^{1-s}-1)\zeta(s),$$

を使えば, 次の命題をえる。

PROPOSITION 4. $k\geq 1$ となる $k\in\mathbf{Z}$ に対し,

$$\begin{aligned}&2^{-2k}(2^{1-2k}-1)\zeta(2k)\\&=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j}{(2j)!}(\frac{\pi}{2})^{2j}(2^{1-2j+2k}-1)\zeta(2k-2j)-\frac{(-1)^k}{2(2k)!}(\frac{\pi}{2})^{2k}.\end{aligned}$$

PROPOSITION 5. $k\geq 1$ となる $k\in\mathbf{Z}$ に対し,

$$\begin{aligned}&2^{-2k-1}(2^{-2k}-1)\zeta(2k+1)\\&=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j}{(2j)!}(\frac{\pi}{2})^{2j}(2^{2j-2k}-1)\zeta(2k+1-2j)-\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\frac{\pi}{2})^{2k}log\ 2\\&\quad+\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2(2j)!}(\frac{\pi}{2})^{2j}E_{2j+1-2k}.\end{aligned}$$

REMARK. 上記の命題から, $\zeta(2)=\pi^2/6$, $\zeta(4)=\pi^4/90$, また

$$\zeta(3)=\frac{\pi^2}{21}(4\log 2+\pi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+4)!}(\frac{\pi}{2})^{2m}E_{2m+1}).$$

などがえられる。 $\zeta(5),\zeta(7)$ などの級数表現も同様にえられる。 また Lemma 5 を用いると, 同様にして Dirichlet L-級数の正の整数における値も求められる。([9] 参照)

REFERENCES.

[1] R.Askey, The q-gamma and q-beta functions, *Applicable anal.*, **8** (1978), 125-141.

[2] L.Carlitz, q-Bernoulli numbers and polynomials, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 987-1000.

[3] L.Carlitz, q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 332-350.

[4] N.Koblitz, On Carlitz's q-Bernoulli numbers, *J. Number Theory*, **14** (1982), 332-339.

[5] J.Satoh, q-analogue of Riemann's ζ-function and q-Euler numbers, *J. Number Theory*, **31** (1989), 346-362.

[6] H.Tsumura, On the values of a q-analogue of the p-adic L-function, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, **44** (1990), 49-60.

[7] H.Tsumura, A note on q-analogues of the Dirichlet series and q-Bernoulli numbers, *J. Number Theory*, **39** (1991), 251-256.

[8] H.Tsumura, On a q-analogue of the log $-\Gamma-$function, preprint.

[9] H.Tsumura, On evaluation of the Dirichlet series at positive integers by q-calculation, preprint.

[10] E.Whittaker and G.Watson, A course of modern analysis, 4-th ed., Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1958.