数理解析研究所講究録
第 845 巻 1993 年 26-33

On the Propagation of a Certain Polarization Set for Semilinear Systems of Real Principal Type

京大理 土居 伸一 (Shin-ichi Doi)

§0 序

N. Dencker [D] は ベクトル値超関数 (distribution) に対し、wave front set の精密化である polarization set を定義した。これは、特異性の最も高い成分に関する情報を含んでいる。そしてある擬微分作用素 (PsDOp) 系に対し、polarization set 版の特異性の伝播を証明した。又、C. Gerard [G1, 2] は、境界値問題の解の polarization set を調べた。

他方、非線形偏微分方程式に対する特異性の伝播や相互作用についての研究が、'70年代後半よりさかんに行われている (cf. [Be] の参考文献)。

筆者は [Doi] においてこの２者の合体、つまり Dencker の結果の半線形偏微分方程式系への拡張、を試みた。その際滑らかでない表象をもつ作用素を扱う必要があるため、元の polarization set の定義のままでは安定性に欠けるように思

われた。そこで [Doi] では、より安定性のある polarization set を導入し、それに対し前述の拡張を行った。本報告集では、その概要を述べたい。

§1. Polarization Set の定義と基本的性質

◎記号. $z_0=(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$, $r>0$ に対して

$$M(z_0,r)=\{a\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d});\ 0\le a\le 1,\ a=1\ (z=z_0\text{の近傍で})$$

$$\operatorname{supp}a\subset\{z\in\mathbb{R}^{2d};\ |z-z_0|<r\}\}$$

$$M(z_0)=\bigcup_{r>0}M(z_0;r)$$

とおく。$a,b\in M(z_0)$ に対し次のように定める：

$$a\ll b \overset{\text{def}}{\iff} b=1\ (\operatorname{supp}a\text{の近傍で})。$$

$a\in M(z_0)$ に対し、$a_n(x,\xi)=a(x,\frac{\xi}{n})$ $(n\in\mathbb{N})$ とおき、Ps.D Op 列 $\{a_n(x,D)\}_{n=1}^\infty$ を以後頻繁に用いる（[M1,2], [T] を参照せよ）。□

◎H^s の意味での波面集合 WF^s の特徴付. 次の補題が成り立つ。

補題 1.1 ([T])。$u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ に対し次は同値である：

(1) $z_0\notin WF^s(u)$

(2) $^\exists a\in M(z_0)$ s.t $\{\|a_n(x,D)u\|\}_{n=1}^\infty\in h^s$

(3) $^\exists r>0$ $^\forall a\in M(z_0,r)$ $\{\|a_n(x,D)u\|\}_{n=1}^\infty\in h^s$ 。

ただし $h^s=\{\{e_n\}_{n=1}^\infty;\ e_n\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^\infty n^{2s-1}e_n^2<\infty\}$ $(s\in\mathbb{R})$,

$h^\infty=\bigcap_{s\in\mathbb{R}}h^s$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ である。□

⑨ 新しい polarization set の導入。X を $\mathbb{R}^d$ の開集合とし、$\mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ で X 上の $\mathbb{C}^N$ 値超函数全体を表わす。つまり $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N) \Longleftrightarrow u = (u_j)_{j=1}^N,\ u_j \in \mathcal{D}'(X)$ である。$\mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ の内、台がコンパクトなもの全体を $\mathcal{E}'(X, \mathbb{C}^N)$ とかく。その他 $H^s_{loc}(X, \mathbb{C}^N)$, $\mathcal{D}'(X, \mathbb{R}^N)$ 等も同様に定める。

定義 1.2. $z_0 \in X \times (\mathbb{R}^d \setminus 0)$, $\theta \in (\mathbb{C}^N)'$, $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とする。$u \in \mathcal{E}'(X, \mathbb{C}^N)$ に対し、$u \in H^s(z_0, \theta)$ とは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $r > 0$ が存在し、$a \subset\subset b$ なる任意の $a, b \in M(z_0, r)$ に対し

$$(*) \quad \| a_n(x,D)\, \theta \cdot u \| \leq \varepsilon \| a_n(x,D) u \| + {}^{\exists}C n^{-1} \| b_n(x,D) u \| + {}^{\exists}e_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成立することと定める。ここで $C > 0$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \in h^s$ は、a, b, ε, r によるが n によらない、ある定数、数列である。□

定義 1.2′. $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ に対して $u \in H^s(z_0, \theta)$ とは、x_0 の近傍で 1 となる $\varphi \in C_0^\infty(X)$ があって $\varphi u \in H^s(z_0, \theta)$ となることと定める。又、次のようにおく：

$$H^s(u) = \{ (z, \theta) \in X \times (\mathbb{R}^d \setminus 0) \times (\mathbb{C}^N)' ;\ u \in H^s(z, \theta) \}。\square$$

定義 1.3. $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ に対し、

$$E^s(u) = \{ (z, w) \in X \times (\mathbb{R}^d \setminus 0) \times \mathbb{C}^N ;\ w \cdot \theta = 0 \quad {}^{\forall}(z, \theta) \in H^s(u) \}。$$

とおく ── これが新しい polarization set である。ただし $w \cdot \theta$ は $\mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^N)'$ 上の双線形形式である。□

注意 $E^s(u)$ は z について conic, w について linear。

注意 1.4　Mを可算基をもつC^∞級多様体，Eをその上のC^∞級複素ベクトル束，E'をその双対，ΩをM上のC^∞級体積密度の束とし，$\mathcal{D}'(M,E)=C_0^\infty(M,E'\otimes\Omega)'$ とおく。このとき $u\in\mathcal{D}'(M,E)$ に対し，$E^s(u)$ と $H^s(u)$ が順に π^*E と π^*E' の部分集合として自然に定義できる。ただし π は $T^*M\setminus 0$ からMへの射影である。□

注意 1.5．$E^s(u)$ が Dencker [D] と Gérard [G] の意味での polarization set $WF^s_{pol}(u)$ の部分集合になっていることを証明できる。ただし $u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)$ に対し，

$$WF^s_{pol}(u)=\bigcap_{A:\,Au\in H^s} N_A$$

$$N_A=\{(z,w)\in(T^*X\setminus 0)\times\mathbb{C}^N\ ;\ w\in \operatorname{Ker} A_0(z)\}$$

. $A=(A_1,\cdots,A_N)$ は $1\times N$　0階 classical PsDOp (properly supported)

A_0：Aの主表象。□

◎ Polarization Set の基本性質

命題 1.6　$Pr\,(E^s(u)\setminus 0)=WF^s(u)\ \left(\overset{def}{=}\bigcup_{j=1}^{N} WF^s(u_j)\right)$。

ただし $Pr:(T^*X\setminus 0)\times\mathbb{C}^N\to T^*X\setminus 0$ は射影で，$E^s(u)\setminus 0$ の 0 は $(T^*X\setminus 0)\times\{0\}$ の略である。□

命題 1.7　$u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)$，P を m階 classical PsDOp の $M\times N$ 系，P_m をその主表象とする（properly supported は以後いちいち断わらないこととする）。このとき

$$P_m(z)\,E^s(u;z)\subset E^{s-m}(Pu,z),\quad z\in T^*X\setminus 0$$

が成立する。$P_m(z)$ が可逆な（従って $M=N$）z については等号が成立する。□

<u>注意</u> $E^s(u,z)$ で $E^s(u)$ の z 上のファイバーを表わす。

§2 主結果

X を $\mathbb{R}^d$ の開集合とし、X 上の非線形偏微分作用素系

(NL) $P[u] = F(x, \partial^\alpha u)_{|\alpha|\le m}$

を考える。ここで $u=(u_1,\cdots,u_N)$, $F=(F_j(x,u_\alpha)_{|\alpha|\le m})_{j=1,\cdots,M}$ であり、F は $\{(x,u_\alpha)_{|\alpha|\le m};\ x\in X,\ u_\alpha=(u_{k,\alpha})_{1\le k\le N}\in\mathbb{R}^N\}$ から $\mathbb{C}^M$ への C^∞ 写像である。P が半線形のときは、

(SL) $P[u] = P_m(x,D)u + G(x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le m-1}$

なる形をとる。ここで $P_m(x,D)$ は m 次斉次な線形部分で、$G(x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le m-1}$ は低階を表わす。

<u>注意</u> $D=(D_1,\cdots,D_d)$, $\partial=(\partial_1,\cdots,\partial_d)$, $D_j = i^{-1}\partial_j = i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$。

<u>定理2.1</u> $u\in C^{m+\rho}\cap H^s_{loc}(X,\mathbb{R}^N)$, $\rho>0$, $s\le s_1\le s+\rho$ と(NL)を仮定すると $z\in X\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$ に対し、

$$P_m(z)\,E^{s_1}(u,z)\subset E^{s_1-m}(P[u],z)$$

が成立する。ただし

$$P_m(x,\xi)=\sum_{|\beta|=m}\left(\frac{\partial F_j}{\partial u_{k,\beta}}(x,\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\le m}\right)_{\substack{\downarrow j=1,\cdots,M\\ \to k=1,\cdots,N}}\cdot(i\xi)^\beta$$

さらに $M=N$ で $P_m(z)$ が可逆な z に対して等号が成立する。

<u>注意</u> 定理 2.1 の仮定を $u\in C^{m-1+\rho}\cap H^{s}_{loc}(X,\mathbb{R}^N)$, $\rho>0$ $s\leq s_1<s+\rho+1$, (SL) にかえると 同じ結論が成立する。

<u>注意</u> C^r は $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ のとき C^r 級函数を、$r>0$, $r\notin\mathbb{N}$ のとき $C^{[r]}$ 級でかつ $[r]$ 回導函数がすべて $r-[r]$ 次Hölder連続である函数を表す。

<u>約束</u> これ以後 $M=N$, (SL) を常に仮定する。

<u>定義 2.2</u> ([D])。$P_m(x,\xi)$ が $z_0=(x_0,\xi_0)\in T^*X\setminus 0$ で実主要型 (real principal type) であるとは、$(1-m)$ 次正斉次な N 次行列 $\widetilde{P}_{1-m}\in C^\infty(T^*X\setminus 0)$ が存在して

$$\widetilde{P}_{1-m}(z)\,P_m(z)=q_1(z)\,I_N \quad (z_0\text{ の錐近傍で})$$

がなりたつことを言う。ただし q_1 は実数値スカラーで、$q_1=0$ ならば dq_1 と ξdx は一次独立となる (z_0 の錐近傍で)。すると

$$R_{P_m}=\{\,z\in T^*X\setminus 0\ ;\ \det P_m(z)=0,\ P_m(z)\text{ は } z \text{ で実主要型である}\,\}$$

は超曲面で、$(T_z R_{P_m})^\sigma=\langle H_{q_1}(z)\rangle$ は R_{P_m} 上の1次元分布を定める。その積分曲線を P の陪特性曲線とよぶことにする。ここで $\sigma=\sum_{j=1}^{d}d\xi_j\wedge dx_j$, $V^\sigma=$ “V の σ に対する直交空間” である。

定義 2.3 (cf [DJ])．γ を P の陪特性曲線，L を $\gamma\times\mathbb{C}^N$ の C^1 級複素1次元部分束，$u\in C^{m-1}(X,\mathbb{R}^N)$ とする。L がさらに (i)(ii) をみたすとき、L を (P,u) の γ 上の Hamilton orbit と呼ぶ：

(i) $L\subset N_{P_m}=\{(z,w)\in(T^*X\setminus 0)\times\mathbb{C}^N;\ w\in\ker P_m(z)\}$,

(ii) L は局所的に次をみたす C^1 級切断 w ではられる：

$$\left(H_{q_1}+\frac{1}{2}\{\widetilde{P}_{1-m},P_m\}+i\widetilde{P}_{1-m}P^s_{m-1}\right)w=0\ 。$$

ただし q_1，$\widetilde{P}_{1-m}$ は定義 2.2 にあらわれるもので，さらに

$$\{\widetilde{P}_{1-m},P_m\}=\sum_{j=1}^{d}\left(\partial_{\xi_j}\widetilde{P}_{1-m}\,\partial_{x_j}P_m-\partial_{x_j}\widetilde{P}_{1-m}\,\partial_{\xi_j}P_m\right)$$

$$P^s_{m-1}=P_{m-1}-\frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{d}\partial_{x_j}\partial_{\xi_j}P_m$$

$$P_{m-1}(x,\xi)=\sum_{|\beta|=m-1}\left(\frac{\partial G_j}{\partial u_{k,\beta}}(x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le m-1}\right)_{\substack{\downarrow j=1,\dots,N\\ \to k=1,\dots,N}}\cdot(i\xi)^\beta$$

である。

注意　局所的に $L=\{(x(t),\xi(t),\alpha w(t));\ |t|<\varepsilon,\ \alpha\in\mathbb{C}\}$,

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\nabla_\xi q_1(x(t),\xi(t))\\ \dot{\xi}(t)=-\nabla_x q_1(x(t),\xi(t))\\ \dot{w}(t)+\left(\frac{1}{2}\{\widetilde{P}_{1-m},P_m\}+i\widetilde{P}_{1-m}P^s_{m-1}\right)(x(t),\xi(t))\,w(t)=0\\ q_1(x(0),\xi(0))=0,\quad P_m(x(0),\xi(0))\,w(0)=0\ 。\end{cases}$$

定理 2.4　$u\in C^{m-1+\rho}\cap H^s_{loc}(X,\mathbb{R}^N)$，$\rho>0$，$s\le s_1\le s+\rho$ を仮定する。L を (P,u) の γ 上の Hamilton orbit とする。

もし $\gamma \cap WF^{s_1+1-m}(P[u]) = \phi$ ならば,

$$E^{s_1}(u) \cap L = \gamma \times \{0\} \text{ 又は } L$$

である。言いかえると, (P, u) の γ 上の Hamilton orbit L_1, $L_2, \cdots, L_k$ があって次が成立する:

$$E^{s_1}(u)|_{\gamma} = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k \quad 。$$

<u>注意</u> $\rho \notin \mathbb{N}$ のとき, s, s_1 の範囲は [Bo], [Me] でのものに相当している。又, P が線形ならば $s_1 \in \mathbb{R}$ で以上の主張がなりたち, Dencker の結果に対応している。

REFERENCES

[**Be**] M. Beals, "Propagation and interaction of singularities in nonlinear hyperbolic problems," Birkhäuser, 1989.

[**Bo**] J. M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **14** (1981), 209–246.

[**D**] N. Dencker, *On the propagation of polarization sets for systems of real principal type*, J. Funct. Anal. **46** (1982), 351–373.

[**Doi**] S. Doi, *On the propagation of a certain polarization set for semilinear systems of real principal type*, to appear in J. Math. Kyoto. Univ.

[**G1**] C. Gérard, *Réflexion du front d'onde polarisé des solutions de systémes d'équations aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sc. Paris **297** (1983), 409–412.

[**G2**] C. Gérard, *Propagation de polarisation pour des problemes aux limites convexes pour les bicaracteristiques*, Comm. in P.D.E. **10** (1985), 1347–1382.

[**Hö**] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators of type 1,1*, Comm. Partial Diff. Eq. **13:9** (1988), 1085–1111.

[**Me**] Y. Meyer, *Remarques sur un théorème de J. M. Bony*, Suppl. ai Rend. del Circolo mat. di Palermo **II:1** (1981), 1–20.

[**M1**] S. Mizohata, "On the Cauchy problem," Academic Press, 1985.

[**M2**] S. Mizohata, *On the Cauchy problem for hyperbolic equations and related problems —micro-local energy method—*, in "Hyperbolic equations and related topics," Kinokuniya, 1986, pp. 193–233.

[**T**] Y. Takei, *A fine microlocalization and hypoellipticity*, J. Math. Kyoto. Univ. **29** (1989), 127–157.