数理解析研究所講究録
第 845 巻 1993 年 34-48

Microlocal Analysis of Reproducing Kernels for Strictly Pseudoconvex Domains

平地健吾（大阪大理）
K. Hirachi (Osaka Univ.)

Fefferman は [F3] において，強擬凸領域におけるベルグマン核の漸近展開を境界の曲率を用いて表示するためのプログラムを提案した．このプログラムに沿って彼は，複素モンジュ-アンペール方程式の近似解から曲率を構成し，それらを用いて $\mathbb{C}^n$ 内の領域に対して核関数の展開の最初の $n-20$ 項を決定した．さらに Graham [G1] はモンジュ-アンペール方程式のより詳しい漸近解を用いて Fefferman の構成方法の拡張を行ない，$\mathbb{C}^2$ 内の領域に対してベルグマン核の展開の 5 項目までを決定した．

私の講演では，$\mathbb{C}^2$ の場合，各種の再生核のホロノミー系の理論を用いた具体的な計算結果を比較することにより，第 6 項も決定できるということをお話しした．しかし，それ以後の考察の結果，この 6 項目も Fefferman の手法で決定できることがわかってきた．このノートでは，講演の内容とは異なるのであるが，Fefferman のプログラムを $\mathbb{C}^2$ の場合を中心に，具体的な計算結果とともに紹介し，ベルグマン核の 6 項目までの展開を決定する（定理 1）．この展開は現在知られている最も詳しい結果である．より詳しい結果が得られた理由は，今まで行なわれていたウエイトによる評価を，ウエイトを正則，反正則に分解したバイウエイトを用いてより精確にしたところにある．基本的には Fefferman [F3] に沿って証明を行なうが [F3] の内容に含まれるものではない．多くの場所で 2 次元の特殊性を用いている．

1．Fefferman のプログラム　この節では Fefferman のプログラムを概説する．彼が提案したのは，ベルグマン核の漸近展開の決定をリーマン多様体上の熱核の漸近展開の類似として考えよう，ということである．熱核の場合，その展開の決定はリーマン構造の構造群である直交群に関する不変式論が用いられる．ベルグマン核の場合にも，領域の境界上の一点を固定し，その近傍での座標変換に対する変換則に注目すれば，その境界点での漸近展開の係数を不変式論を用いて決定できる（はずである）．具体的にはこのプログラムは次の 2 つの段階にわかれる．

1）ベルグマン核と同様な変換則を満たす関数（CR不変式と呼ぶ）を“沢山”構成する．リーマン幾何の場合，等長変換で保たれる関数はリーマン曲率の多項式として定義された．強擬凸領域の場合も境界の近くで曲率を定義し，その成分の多項式

として CR不変式を作りたい．（田中, Chern, Moser, Webster 等によりCR構造からきまる曲率が定義されているが，それらからCR不変式を構成する方法は知られていない；問題に即した形に曲率を定義する必要がある．）

2）ベルグマン核の漸近展開の係数が1）で構成された不変式で尽くされることを示す．この段階で不変式論が必要になる．リーマン幾何の場合その構造群である直交群は半単純であり，そのような群に対する不変式論は詳しく研究されている．双正則幾何（CR幾何）の場合，その構造群は $SU(n, 1)$ の放物型部分群である．この群に対する不変式論にはまだ未解決な問題が残されている．

1．1．不変式の構成　第一段階の説明から初めよう．まずベルグマン核の変換則を復習する．$\mathbb{C}^n$ 内の二つの領域 D, $\widetilde{D}$ の間に双正則写像 $F: D \to \widetilde{D}$ が存在するとき，各々の領域のベルグマン核 $B(z, \overline{z})$, $\widetilde{B}(z, \overline{z})$ の間にはつぎの変換則が成り立つ．

$$B(z, \overline{z}) = |F'(z)|^2\, \widetilde{B}(F(z), \overline{F(z)}) \tag{1. 1}$$

ここで $F'(z)$ は F の正則なヤコビ行列式である．ベルグマン射影子が正則 n 形式の空間で座標系によらずに定義されていると思えば，(1. 1) は射影子の核関数表示に用いる体積要素の間の変換則である．従って，CR不変式の構成も変換則を表わすバンドルの上で行なうのが自然であろう．どのようなバンドルを採用すればよいのかを調べるために，モデルケースであるジーゲル領域の場合を考察しよう．

$\mathbb{C}^n$ 内のジーゲル領域 D_0 は定義関数

$$\rho_0 = z_1 + \overline{z_1} - \sum_{j=2}^{n} z_j \overline{z_j}$$

を用いて $\rho_0 > 0$ で与えられる．よく知られているようにジーゲル領域の双正則変換は射影座標 $(\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$, $z_j = \zeta_j/\zeta_0$ を用いれば，ローレンツ計量

$$-\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\,|\zeta_0|^2 \rho_0 = -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\,(\zeta_0\overline{\zeta_1} + \zeta_1\overline{\zeta_0} - \sum_{j=2}^{n} \zeta_j\, \overline{\zeta_j})$$

に関する特殊ユニタリー群 $SU(n, 1)$ の作用で与えられる．またジーゲル領域の原点でのイソトロピー群 H は $SU(n, 1)$ の元で $(\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_n) = (1, 0, \cdots, 0)$ を保つもののなす部分群に対応する．射影座標は一般の領域を考えるときには不都合なので，もとの座標に戻して $SU(n, 1)$ の作用を計算してみよう．$z_0 = \zeta_0$ とおき $(z_0, z_1, \cdots, z_n)$ を領域 D_0 上の $\mathbb{C}^*$-バンドル $E = \mathbb{C}^* \times D_0$ の座標だと思うことにする．$SU(n, 1)$ の作用は E 上では

$$(z_0, z) \to (z_0 F'(z)^{1/(n+1)}, F(z)) \tag{1.2}$$

で与えられる． ここで F は D_0 上の一次分数変換であり $F'(z)^{1/(n+1)}$ はその正則ヤコビ行列式の $n+1$ 乗根である（今の場合は $F'(z)$ は多項式の $n+1$ 乗の形をしているので $F'(z)^{1/(n+1)}$ は多項式である）． そしてこの作用はローレンツ-ケーラー計量 $-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}|z_0|^2\rho_0(z)$ を保存する．ベルグマン核の変換則は E の z_0 に関する斉次関数として表わされることに注意しよう． 変換則 (1.1) は E 上の関数 $|z_0|^{2(n+1)}B_0(z, \bar{z})$ が $SU(n, 1)$ の作用に関して不変であることと同値である．ここで B_0はジーゲル領域のベルグマン核 $B_0 = c_n \rho_0^{-n-1}$ である．

一般の強擬凸領域 D の場合にも同様な考察を行なってみよう．我々が目標にするのは，領域上の $\mathbb{C}^*$-バンドル $E = \mathbb{C}^* \times D$ にローレンツ-ケーラー計量を変換 (1.2) に関して保存されるように定義することである（この場合 F は自己同型だけではなく２つの領域の間の双正則写像を考える）．それができれば変換則を満たす関数，すなわち，E 上の z_0-斉次関数を計量から定義される曲率を用いて構成できる．

E 上のローレンツ-ケーラー計量をジーゲル領域の場合に倣って

$$-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}|z_0|^2\rho(z)$$

という形のものから作ろう．ここで $\rho(z)$ は領域の定義関数，内側で正になるものである．勿論，定義関数の選び方に任意性があるので対応する計量も一意的には決まらない．そこで，計量$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}|z_0|^2\rho(z)$にリッチ平坦であるという条件を要請してみる．この条件は定義関数が ρ が複素モンジュ-アンペール方程式

$$J(\rho) = (-1)^n \det\begin{pmatrix} \rho & \rho_1 & \cdots & \rho_n \\ \rho_{\bar{1}} & \rho_{1\bar{1}} & \cdots & \rho_{n\bar{1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{\bar{n}} & \rho_{1\bar{n}} & \cdots & \rho_{n\bar{n}} \end{pmatrix} = 1 \ \text{ in } D, \ \ \rho_j = \frac{\partial\rho}{\partial z_j}, \ \ \rho_{j\bar{k}} = \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial\bar{z}_k}$$

を満たすことと同値である．これは，ポテンシャル $U = -|z_0|^2\rho$ をもつケーラー計量のリッチ形式 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\left(\det\partial\bar{\partial}U\right) = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\left(|z_0|^{2(n+1)}J(\rho)\right) = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(J(\rho))$ であることからわかる（[FG] 参照）． 複素モンジュ-アンペール方程式の解が（境界条件 $\rho|_{\partial D} = 0$ のもとで）一意に存在することは Cheng-Yau [CY] によって保証されている．従って，リッチ平坦なローレンツ-ケーラー計量が一意に定義できることがわかる．残念ながら，モンジュ-アンペール方程式の解は一般には境界までこめて滑らかにはならない．しかし C^{n+1} 級の微分可能性はあるので，曲率テンソルをあまり数多く微分しないかぎりは意味がある．この点については後で詳しく調べるので，ここでは微分可能性についてはあまり気にせずに不変式の構成方法を説明する．

この計量の曲率を用いて　z_0-斉次関数を構成しよう．ローレンツ-ケーラー計量の曲率テンソルおよびその共変微分の成分の多項式で $SU(n, 1)$ の作用（基底の変換として作用する）で不変なものを考える．そのような不変多項式は，ワイルの半単純群に関する不変式論により，

$$\Omega = \mathrm{Trace}\left(\nabla^p \overline{\nabla}^q R \otimes \cdots \otimes \nabla^r \overline{\nabla}^s R\right)$$

の形の多項式の一次結合であることが知られている．そこで，このような多項式 Ω をワイル不変式とよぶことにする．ここで Trace は計量に関してスカラーになるまで縮約を行なうことを意味する．ワイル不変式はE上の関数を定義する．ポテンシャル $|z_0|^2\rho$ が z_0-斉次であることに注意すれば，ワイル不変式も z_0-斉次関数であり $\Omega = |z_0|^{2w}\omega(z)$ のように変数分離されることがわかる．ワイル不変式に対してそのウエイトを $|z_0|^2$ に関する次数 w で定義する．以下，誤解のない場合には，領域 D の関数ω も同じ記号 $\mathrm{Trace}\left(\nabla^p \overline{\nabla}^q R \otimes \cdots \otimes \nabla^r \overline{\nabla}^s R\right)$ で表わすことにする．

ワイル不変式の領域上の関数としての変換則を計算しよう．双正則写像 $F : D \to \widetilde{D}$ に対して $\mathbb{C}^*$-バンドルの同型 $\widetilde{F} : E \to \widetilde{E}$ が $\widetilde{F}(z_0, z) = (z_0\, F'(z)^{1/(n+1)}, F(z))$ で定義され，各々のバンドル上のリッチ平坦なローレンツ-ケーラー計量を保つ．よってワイル不変式もまた $\widetilde{F}$ によって保たれる．従って，ウエイト w のワイル不変式 $\Omega = |z_0|^{2w}\omega(z)$ に対しては

$$\omega(z) = |F'(z)|^{2w/(n+1)}\, \widetilde{\omega}(F(z))$$

が成り立つ．また，ポテンシャル $U = -|z_0|^2 r$ （ここで，rはモンジュ-アンペール方程式の解になっている定義関数；他の定義関数と区別するため r と書くことにする）も $\widetilde{F}$ による保存量なので，定義関数の変換則

$$r(z) = |F'(z)|^{-2/(n+1)}\, \widetilde{r}(F(z)) \tag{1.3}$$

を得る．即ち，ウエイト -1 の変換則を満たしている．

1．2．ベルグマン核の漸近展開　ワイル不変式がベルグマン核の漸近展開の係数にどのように現われるかを説明しよう．まず，発見的考察を行なう．モンジュ-アンペール方程式の解 r を用いたベルグマン核の展開

$$B = \frac{\varphi}{r^{n+1}} + \psi \log r$$

を考える．ここで φ, ψ は領域の境界まで滑らかな関数である．φ, ψ をさらに定義関数の羃に展開すると

$$\varphi = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j\, r^j + O(r^{n+1}), \qquad \psi = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\, r^j. \tag{1.4}$$

各係数は，ベルグマン核 (1. 1) と定義関数 (1. 3) の変換則の比較から，φ_j はウエイト j，ψ_j はウエイト $j+n+1$ の変換則

$$\varphi_j = \left|F'\right|^{2j/(n+1)}\, \widetilde{\varphi_j}\circ F, \qquad \psi_j = \left|F'\right|^{2(j+n+1)/(n+1)}\, \widetilde{\psi_j}\circ F$$

を満たすはずである．

問題はφ_j，ψ_jが上で構成したワイル不変式の一次結合で表わせるかどうかである．ここで $SU(n, 1)$ の放物型部分群 H に関する不変式の研究が必要になってくる．ワイル不変式は $SU(n, 1)$ 不変な多項式から定義されている．ところが φ_j，ψ_j の満たす不変性は（あとで示すように） H の作用によるものだけである．従って，$SU(n, 1)$ 不変多項式だけで H 不変式が尽くされるかどうかを確かめる必要がある．Fefferman はウエイトが $n-19$ 以下の不変式についてはこれが正しいことを証明した．また最近 Bailey-Eastwood-Graham によって，このウエイトの制限が取り除かれた（と [G3] において報告されている）．この結果をみとめれば φ_j，$j=0, 1, \cdots, n$ がワイル不変式の一次結合で表わせることがわかる．ところが，それより高次の係数は，ワイル不変式の構成に障害が出てくるので，定義ができなくなる．対数項 ψ_j が記述できないのは不変式論的な障害でなくFefferman の構成方法の限界によるものである．

2．$\mathbf{C}^2$ 内の領域の特殊な状況　3次元以上の空間においては対数項の係数 ψ_j についての情報は殆ど得られない．ところが，2次元の場合に限れば，対数項についてもその係数のうち初めの3項をワイル不変式を用いて書くことができる．まず結果を述べよう．

定理1　複素2次元強擬凸領域のベルグマン核 $B(z, \bar{z})$ は，モンジュ-アンペール方程式の滑らかな近似解 r とワイル不変式を用いてつぎのように展開される．

$$B = \varphi r^{-3} + \psi \operatorname{Log} r,$$

ここで

$$\varphi = \frac{2}{\pi^2} + O(r^3), \tag{2.1}$$

$$\psi = c_1\, \eta_1 + c_2 \left|\nabla\overline{\nabla}R\right|^2 r + \left(c_3 \left|\nabla^3 R\right|^2 + c_4 \left|\nabla^2\overline{\nabla}R\right|^2\right) r^2 + O(r^3) \tag{2.2}$$

η_1 はモンジュ-アンペール方程式の解の漸近展開の対数項の最初の係数として現われる関数である；この項は Fefferman の構成を拡張するために Graham [G2] において取

り入れられた．そこで η_1 も（拡張された）ワイル不変式とよぶことにする．また，c_1, c_2, c_3, c_4 は領域に依らずに定まる普遍定数である．

普遍定数の決定には，ベルグマン核およびワイル不変式の具体的な計算を行なう必要がある．c_1, c_2 は [G1], [HKN] で決定されている：

$$c_1 = \frac{-6}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{3}{5!\,2\pi^2}.$$

残りの c_3, c_4 についてもその計算方法はわかっている，またそれを，実行することも可能である．しかし今のところ検算ができていないので，その値の発表は別の機会に譲ることにする．

2次元の場合が特殊なのは次の幾何的な理由による．強擬凸領域の境界上の1点において境界を，CR幾何的に平坦な曲面，球面の双正則写像による像によりどれだけ近似できるかを考える．3次元以上の空間においては一般には4次以上の接触をさせることは不可能である．ところが2次元の場合にはいつも6次の接触をするようにできる（3節のモーザー標準形を参照）．よって2次元領域の境界は高い次元の場合いと比べて低い次数の曲率が消えている．この事実がワイル不変式の任意性の評価において好都合なのである．

3．ワイル不変式の任意性　以下では定理1の証明を目指し，考える問題をより精確に定式化してゆこう．まず，強擬凸領域での計算に便利な，モーザーの標準座標の説明から始める．記号を簡略化するために $\mathbb{C}^2$ の場合だけを考え，その座標を (z, w)，w の実部，虚部を $w = u + iv$ とおく．

定義　実解析的な境界を持つ強擬凸領域 D とその境界上の点 p に対して p の近傍での座標 (z, w) に対して，領域が

$$2u - z\bar{z} - \sum_{\substack{p+q\geq 6,\\ p,q\geq 2,\, l\geq 0}} A^{l}_{p\bar{q}} z^p \bar{z}^q v^l > 0$$

のように表示され，係数 $A^{l}_{p\bar{q}}$ が $A^{l}_{p\bar{q}} = \overline{A^{l}_{q\bar{p}}}$, $\forall p, q, l$ と $A^{l}_{3\bar{3}} = 0$, $\forall l \geq 0$ を満たしているとき (z, w) を<u>モーザーの標準座標</u>とよぶ．またこの座標による境界の表示を<u>モーザーの標準形</u>という．

領域の定義関数が，ジーゲル領域の定義関数 $\rho_0 = 2u - z\bar{z}$ に最も近い形で表示される座標がモーザーの標準座標である．各境界点に対して標準座標が存在し，ジーゲ

ル領域の原点でのイソトロピー群 H の作用を除いて一意である [CM]．これはリーマン多様体の標準座標が直交群の作用を除いて一意であることと同様な状況である．

モーザーの標準座標を用いて，ベルグマン核の漸近挙動を計算しよう．

命題 1　$\mathbb{C}^2$ 内の領域の境界がモーザーの標準形 $2u = z\bar{z} + \sum A^l_{p\bar{q}} z^p \bar{z}^q v^l$ で表されているとする．このときベルグマン核 $B(z, \bar{z})$ の $\gamma_t = (0, t/2),\ t \downarrow 0$ での挙動は

$$B(\gamma_t, \overline{\gamma_t}) = \varphi_t t^{-3} + \psi_t \operatorname{Log} t,$$

とおくとき

$$\varphi_t = \frac{2}{\pi^2} + O(t^3)$$

$$\frac{\pi^2}{2}\psi_t = -12 A^0_{4\bar{4}} + \left(60 A^0_{5\bar{5}} - 216 \left|A^0_{2\bar{4}}\right|^2\right) t + \left(F(-72, 1800, 1116, 660) - 6 A^2_{4\bar{4}} - 180 A^0_{6\bar{6}}\right) t^2 + O(t^3)$$

で与えられる．ここで

$$F(a, b, r, s) = a \operatorname{Im}\left(A^0_{2\bar{4}} A^1_{4\bar{2}}\right) + b \operatorname{Re}\left(A^0_{2\bar{4}} A^0_{5\bar{3}}\right) + r \left|A^0_{3\bar{4}}\right|^2 + s \left|A^0_{2\bar{5}}\right|^2.$$

命題 1 の証明の方法　この表示は核関数を特徴付ける単純ホロノミー系の解を漸近的に構成することにより得られる．漸近解の構成はミクロ微分作用素の逆作用素の計算に帰着される．しかしこの計算は長いので数式処理言語 *Mathematica* を用いた．計算方法については [B1, 2], [H-K-N] 参照．

この表示を見れば，漸近展開の係数はモーザーの標準形の係数 $A^l_{p\bar{q}}$ の多項式であることがわかる．よって CR不変式を次のように定義をするのは自然であろう．

定義　モーザーの標準形の係数 $A^l_{p\bar{q}}$ の多項式 $P(A^l_{p\bar{q}})$ が次の変換則を満たすときウエイト w の CR不変式という：2つのモーザーの標準形になっている領域

$$2u - z\bar{z} - \sum A^l_{p\bar{q}} z^p \bar{z}^q v^l > 0 \quad と \quad 2u - z\bar{z} - \sum B^l_{p\bar{q}} z^p \bar{z}^q v^l > 0$$

の間に原点を保つ双正則写像 F が存在するときには

$$P(A^l_{p\bar{q}}) = \left|F'(0)\right|^{2w/(n+1)} P(B^l_{p\bar{q}})$$

が成り立つ．

モーザーの標準座標が一つ与えられたとき他の標準座標はイソトロピー群 H の作用だけの任意性があるので，上で定義した CR不変式は H -不変式になる．係数 $A^l_{p\bar{q}}$

への H の作用を具体的に書くのは難しい．従って，CR不変式を決定するのは簡単ではない．それでローレンツ-ケーラー計量を用いた理論が必要になるのである．

4．モンジュ-アンペール方程式　リッチ平坦なローレンツ-ケーラー計量の構成においてポテンシャルは一般には滑らかにはならないことを注意した．どのような障害があるかを説明しよう．必要な結果をまとめて述べると

定理 2 [CY, F2, G2, LM]　D を $\mathbb{C}^n$ の滑らかな境界を持つ有界強擬凸領域とするとき，モンジュ-アンペール方程式 $J(u)=1$，$u|_{\partial D}=0$ は $u\in C^\infty(D)\cap C^{n+2-\varepsilon}(\overline{D})$, $\forall\varepsilon>0$ に一意的な解をもち，境界で

$$u\sim r+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(r^{n+1}\log r)^k,\quad r,\eta_k\in C^\infty(\overline{D}) \tag{4.1}$$

のように漸近展開される．この展開において r modulo $O(\partial D)^{n+2}$ および η_k modulo $O(\partial D)^{n+1}$ は境界の局所的な情報だけから一意にきまる．

本当の解 u は，領域の大域的な形に依存してきまり，その計算は困難である．曲率の計算は微分可能な範囲でしか行なわないので，本当の解 u のかわりにその滑らかな近似解 r を用いて計量を定義しても得られる結果は同じである；しかも近似解は境界の局所的な情報から具体的に構成可能である．

近似解 r を用いてローレンツ-ケーラー計量 $-\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}|z_0|^2r(z)$ を定義した場合，r の選び方の任意性に注意しなければならない．本当の解ではないので，リッチ平坦という条件は少しくずれる．つぎの命題ではワイル不変式がどこまで一意的に定義されるかを調べる．

命題 2　$\mathbb{C}^2$ におけるウエイト w のワイル不変式は（領域上の関数とみなすとき）$O(\partial D)^{6-w}$ の任意性を除いて一意 (well-defined) である．すなわち

ウエイト 4：　$\|\nabla\overline{\nabla}R\|^2$ および $\|\nabla^2R\|^2$ は modulo $O(\partial D)^2$ で一意

ウエイト 5：　$\|\nabla^3R\|^2$ および $\|\nabla^2\overline{\nabla}R\|^2$ は modulo $O(\partial D)$ で一意．

ここで $\|\nabla^p\overline{\nabla}^qR\|^2$ は曲率テンソル $\nabla^p\overline{\nabla}^qR$ のノルムの 2 乗である．

2 次元の場合，ウエイト 3 以下のワイル不変式は定数以外に存在せず，ウエイト 6 以上のワイル不変式は一意的であるとは限らない．3 次元以上の場合はウエイト

w のワイル不変式の任意性は $O(\partial D)^{n+2-w}$ である（[G] 参照）．2次元の場合により良い評価が成り立つ理由は3節の終わりに述べた幾何的な理由による．命題2は [G] で述べられている任意性の評価よりウエイト1だけ鋭いものである．

<u>命題2の証明</u>　考える領域の境界はモーザーの標準形になっているとする．

$$\rho = 2u - z\bar{z} - \sum A^{l}_{p\bar{q}} z^p \bar{z}^q v^l$$

とおき$(\rho, z, \bar{z}, v)$を原点の近くの座標として採用する．　このときモンジュ-アンペール方程式の滑らかな近似解 r は modulo $O(\partial D)^4$ で一意である．従って $(\rho, z, \bar{z}, v)$ に関してテーラー展開すると r は次のように書くことができる．

$$r = \sum_{m=1}^{3} B^{lm}_{p\bar{q}} z^p \bar{z}^q v^l \rho^m + \sum_{m \geq 4} C^{lm}_{p\bar{q}} z^p \bar{z}^q v^l \rho^m \tag{4.1}$$

ここで p, q, l に関する和は省略している．解の任意性は $C^{lm}_{p\bar{q}}$ だけに含まれ，$B^{lm}_{p\bar{q}}$ は $A^{l}_{p\bar{q}}$ の多項式になっている（Fefferman の解の構成から明らか [F2] 参照）．ワイル不変式はこの r から計量をつくり曲率テンソルを計算しトレースをとって作られる．

$\Omega = |z_0|^{2w}\omega(\rho, z, \bar{z}, v)$ をウエイト w のワイル不変式とし ω の$(\rho, z, \bar{z}, v) = (t, 0, 0, 0)$，$t \to 0$ での境界挙動を調べよう．

$$\omega(t, 0, 0, 0) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \cdots$$

とおくと，ワイル不変式の構成方法からただちに，各係数 ω_j は $A^{l}_{p\bar{q}}$, $C^{lm}_{p\bar{q}}$ の多項式になることがわかる．この多項式が Ω のウエイトが低いときには $C^{lm}_{p\bar{q}}$ を含まないことを示そう．

まず拡大写像による不変性に注目しよう．正の実数 $\lambda \in \mathbf{R}^+$ に対し変換

$$\begin{aligned}
z &\to \lambda z, \\
v &\to \lambda^2 v, \\
\rho &\to \lambda^2 \rho, \\
A^{l}_{p\bar{q}} &\to \lambda^{p+q+2l-2} A^{l}_{p\bar{q}}, \\
C^{lm}_{p\bar{q}} &\to \lambda^{p+q+2l+2m-2} C^{lm}_{p\bar{q}}
\end{aligned}$$

を考える．この変換で2つの定義関数 ρ, r は $\rho \to \lambda^2 \rho$，$r \to \lambda^2 r$ と変換され，ウエイト w のワイル不変式は変換則 $\omega \to \lambda^{-2w} \omega$ を満たす．よってその展開の係数 ω_j は変換則 $\omega_j \to \lambda^{-2(w+j)} \omega_j$ を満たす．次にユニタリー群の作用を考えよう．

$e \in U(n-1)$ の作用を

$$
\begin{aligned}
z &\to e\,z,\\
v &\to v,\\
\rho &\to \rho,\\
A^{l}_{p\bar{q}} &\to e^{p}\bar{e}^{q} A^{l}_{p\bar{q}},\\
C^{lm}_{p\bar{q}} &\to e^{p}\bar{e}^{q} C^{lm}_{p\bar{q}}
\end{aligned}
$$

で定義する．この作用で ρ, r は不変なのでワイル不変式 ω もまたそうである．従って ω_j は $U(n-1)$ 不変式になる．

補題　上記の $\mathbf{R}^{+}\cdot U\,(n-1)$ 作用に関する $A^{l}_{p\bar{q}}$，$C^{lm}_{p\bar{q}}$ の不変多項式でウエイトが5以下かつ線型項を持たないものは $C^{lm}_{p\bar{q}}$ を含まない．

証明　$A^{l}_{p\bar{q}}$ のウエイトを $p+q+2l-2$ で $C^{lm}_{p\bar{q}}$ のウエイトを $p+q+2l+2m-2$ で定義すると，各$A^{l}_{p\bar{q}}$ はウエイト2以上であり，$C^{lm}_{p\bar{q}}$ は $m \geq 4$ よりウエイト3以上である．よって線型項以外でウエイト5以下かつ $C^{lm}_{p\bar{q}}$ を含む単項式は $A^{0}_{2\bar{4}}C^{04}_{0\bar{0}}, A^{0}_{4\bar{2}}C^{04}_{0\bar{0}}$ の2つだけである．しかし，これらの単項式を含む多項式は $U(n-1)$ 不変にはなりえない．従って $C^{lm}_{p\bar{q}}$ は現われない．

ワイル不変式は2つ以上の曲率テンソルの積のトレースとして定義されるので ω_j は線型項を含まない（リッチ平坦であることを思い出そう）．　従って補題より $w+j \leq 5$ であれば ω_j は $C^{lm}_{p\bar{q}}$ を含まない．これはウエイト w のワイル不変式 ω の $(\rho, z, \bar{z}, v)=(t, 0, 0, 0)$, $t \to 0$ での挙動が modulo $O(t^{6-w})$ で一意的であることを示している．この評価が境界の各点で成り立つので Ω が modulo $O(\partial D)^{6-w}$ で一意である（近似解の取り方によらない）ことがわかる．

5．放物型不変式論　4節の議論でワイル不変式が厳密に定義された．我々が知りたいのは3節で定義したCR不変式である．この節ではCR不変式とワイル不変式の関係を明らかにし，CR不変式の決定がどのようにして $SU(n, 1)$ の放物型部分群 H に関する不変式論に帰着されるかを述べる．

まずリッチ平坦ローレンツ-ケーラー計量の曲率とモーザー標準形の係数の対応を調べよう．それにはモーザー標準座標 $(w, z)=(z_1, z_2)$ を用いて曲率を計算すればよい．領域上の $\mathbb{C}^{*}$-バンドル $E=\mathbb{C}^{*}\times D$ の座標を (z_0, z_1, z_2) とし，この座標に関して曲率テンソルを成分表示したものを　$R_{j\bar{k}l\bar{m},\beta}$　で表わそう．ここで　$\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_p)$

$\in \{0, 1, 2, \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}^p$であり，対応する座標に関する共変微分を表わす．　モンジュ-アンペール方程式の近似解 r の展開 (4. 1) およびケーラー計量のポテンシャルが $U=|z_0|^2 r(z_1, z_2)$ という形をしていることからただちに $R_{j\bar{k}l\bar{m},\beta}$ が原点上のファイバーで $A^l_{p\bar{q}}, C^{lm}_{p\bar{q}}$ の多項式 P をもちいて

$$R_{j\bar{k}l\bar{m},\beta}=z_0{}^a\,\overline{z_0}{}^b P(A^l_{p\bar{q}}, C^{lm}_{p\bar{q}})$$

のように表示されることがわかる．一般には右辺の多項式 P は $C^{lm}_{p\bar{q}}$ を含み，そのような成分は CR不変量ではない．ところが，$a\leq 2$ または $b\leq 2$ であれば P は $C^{lm}_{p\bar{q}}$ を含まないことが展開 (4. 1) から示すことができる．そこで $R_{j\bar{k}l\bar{m},\beta}$ のバイウエイトを (a, b) で，ウエイトを $(a+b)/2$ で定義する．以下では，ウエイト 5 までの CR不変式に決定に必要な，ウエイト 6 以下でバイウエイトが (3, 3) 以外の項の計算を行なう．バイウエイトが (3, 3) の項は C^{04}_{00} を含み CR不変量ではない．

ウエイト 3 以下の曲率テンソルの成分は $R_{j\bar{k}l\bar{m},\beta}$ は指数の置換に関して不変であることに注意しよう．なぜなら $A^l_{p\bar{q}}$ が最低ウエイト 2 を持つので（$A^l_{p\bar{q}}$ のウエイトは 4 節の補題の証明の中で定義した）$R_{j\bar{k}l\bar{m},\beta}=z_0{}^a\,\overline{z_0}{}^b P(A^l_{p\bar{q}})$ は $A^l_{p\bar{q}}$ に関して線型になることがわかる；一方，リッチの等式によれば指数の置換によって出てくるずれは曲率の 2 次式である．よってそのずれの項は 0 になる．

対称性がわかったので，記号を簡単にするために正則，反正則な指数を集めて $R_{p_1\cdots p_s\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}$ のように書くことにする．そうするとリッチテンソルが消えるという条件は

$$R_{1p_1\cdots p_s\bar{0}\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}+R_{0p_1\cdots p_s\bar{1}\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}-R_{2p_1\cdots p_s\bar{2}\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}=0 \tag{5. 1}$$

と表される．またポテンシャルが $|z_0|^2 r(z_1, z_2)$ という形をしたケーラー計量の曲率なので

$$\begin{aligned} R_{0p_1\cdots p_s\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}&=-(s-1)R_{p_1\cdots p_s\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}\\ R_{p_1\cdots p_s\bar{0}\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}&=-(t-1)R_{p_1\cdots p_s\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}\end{aligned} \tag{5. 2}$$

および

$$\overline{R_{p_1\cdots p_s\overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}}=R_{q_1\cdots q_t\overline{p_1}\cdots\overline{p_s}} \tag{5. 3}$$

が成り立つ。これらの関係式を用いればウエイト 3 以下でバイウエイト (3, 3) 以外の曲率テンソルは

$$S^0_{2\bar{4}},\ S^0_{3\bar{4}},\ S^0_{2\bar{5}},\ S^1_{2\bar{4}},\ S^0_{3\bar{5}}$$

という 5 個の成分およびその共役の一次結合で表せる．ここで $S^r_{p\bar{q}}$ は

$$S^r_{p\bar{q}} = R_{\underbrace{2\ldots 2}_{p}\underbrace{\bar{2}\ldots\bar{2}}_{q}\underbrace{\bar{1}\ldots\bar{1}}_{r}},$$

という形の成分の略記である．これらの $S^r_{p\bar{q}}$ の $A^l_{p\bar{q}}$ による表示を計算するのは $A^l_{p\bar{q}}$ の関する線型性を用いれば簡単である．$S^r_{p\bar{q}}$ の $(z_0, z_1, z_2) = (1, 0, 0)$ での値は

$$S^r_{p\bar{q}} = \left.\frac{\partial^{p+q+r} r}{\partial z_1{}^p \partial \overline{z_1}{}^q \partial \overline{z_2}{}^r}\right|_{(z_0, z_1) = (0, 0)}$$

であたえられる．この微分を計算すると $(z_0, z_1, z_2) = (1, 0, 0)$ において

$$\begin{aligned}
S^0_{2\bar{4}} &= -16\, A^0_{2\bar{4}}, \\
S^0_{3\bar{4}} &= 144\, A^0_{3\bar{4}}, \\
S^0_{2\bar{5}} &= -240\, A^0_{2\bar{5}}, \\
S^1_{2\bar{4}} &= 168\, i\, A^1_{2\bar{4}} - 720\, A^0_{3\bar{5}}, \\
S^0_{3\bar{5}} &= -720\, i\, A^1_{2\bar{4}} + 2880\, A^0_{3\bar{5}},
\end{aligned} \tag{5. 4}$$

をえる．この5つの関係式は $A^l_{p\bar{q}}$ について解くことができることに注意しよう．得られた結果を命題としてまとめると

<u>**命題 3**</u>　二つの実ベクトル空間 A_3, R_3 を次のように定義する．

$A_3 = \Big\{ \{A^l_{p\bar{q}}\}$; $A^l_{p\bar{q}}$ はモーザー標準形の係数でウエイト3以下，バイウエイト (3, 3) 以外の項$\Big\}$,

$R_3 = \Big\{ \{R_{p_1\cdots p_s \overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}\}$; $R_{p_1\cdots p_s \overline{q_1}\cdots\overline{q_t}}$ はウエイト3以下，バイウエイト (3, 3) 以外の対称テンソルで関係式 (5. 1), (5. 2), (5. 3) を満たす$\Big\}$

このとき (5. 4) で定義される $\Phi: A_3 \to R_3$ は同型であり A_3, R_3 への H の作用を保つ．

従って CR不変式（R_3 上の H 不変多項式）の決定は R_3 上の $H \subset SU(n, 1)$ による基底の変換で不変な多項式の決定に帰着される．

命題で除外されているバイウエイト (3, 3) の項についても考察しておく．モーザー標準形の係数でバイウエイト (3, 3) なのは $A^0_{4\bar{4}}$ だけである．この項はモンジュ-アンペール方程式の解の漸近展開の最初の対数項 η_1 の $(z_0, z_1, z_2) = (1, 0, 0)$ での値として現われる：$\eta_1 = 4\, A^0_{4\bar{4}}$（これは Graham [G1, 2] において証明された）．この項も（拡張された）ワイル不変式とよぶことにしよう．

これで CR不変式とワイル不変式の関係が明らかになった．

$$\{A_3\text{ 上のCR不変式}\} \overset{\Phi}{\cong} \{R_3\text{ 上の }H\text{ 不変式}\}$$
$$\subseteq \{R_3\text{ 上の }SU(n,1)\text{ 不変式}\} = \{R_3\text{ 上のワイル不変式}\}$$

我々が知りたいのは一行目と二行目が等しいかどうかである．これらが等しいことは Bailey-Eastwood-Graham によって完全に証明された（ウエイトおよび次元に関する制限なしに）と [G3] で報告されている．代数的な部分は解決されたが，まだ曲率の構成に制限があるので，まだすべてのCR不変式が決定されたわけではない．この制限を取り除くためのCR幾何の研究が必要である．上記の議論で決定されたCR不変式をまとめると

定理3 $\mathbb{C}^2$ において，ウエイト5以下のCR不変式のワイル不変式である．ウエイト5以下のワイル不変式の完全な表はつぎのとおり：ウエイト0は定数のみ；ウエイト1，2は0のみ；

ウエイト3：　η_1

ウエイト4：　$\|\nabla\overline{\nabla}R\|^2,\quad \|\nabla^2 R\|^2$

ウエイト5：　$\|\nabla^3 R\|^2,\quad \|\nabla^2\overline{\nabla}R\|^2.$

ウエイト4の二つのワイル不変式は一次従属であり $7\|\nabla\overline{\nabla}R\|^2 = 3\|\nabla^2 R\|^2$ が成り立つ．ウエイト5の二つのワイル不変式は独立である．また，これらをモーザー標準形の原点において計算するとCR不変式の $A^{\,l}_{p\bar{q}}$ による表示をえる：

ウエイト3：　$\eta_1 = 4A^{0}_{4\bar{4}}$

ウエイト4：　$\frac{1}{3}\|\nabla\overline{\nabla}R\|^2 = \frac{1}{7}\|\nabla^2 R\|^2 = 2^8 |A^{0}_{2\bar{4}}|^2$

ウエイト5：　$\|\nabla^3 R\|^2 = -4(5!)^2 F(-5, 18, 18, 1)$

$\|\nabla^2\overline{\nabla}R\|^2 = -4(5!)^2 F(-37/15, 10, 57/5, 4/3)$

ここで　$F(a, b, r, s) = a\,\mathrm{Im}\left(A^{0}_{2\bar{4}}A^{1}_{4\bar{2}}\right) + b\,\mathrm{Re}\left(A^{0}_{2\bar{4}}A^{0}_{5\bar{3}}\right) + r|A^{0}_{3\bar{4}}|^2 + s|A^{0}_{2\bar{5}}|^2$.

ウエイト4以下のCR不変式は Graham [G1] により決定されていた．ウエイト5についても Graham [G1] で計算されているが，残念ながら，簡単なミスで2つの不変式のうちの一つしか得られていない（その式も符号の間違いがある）．ウエイト5のCR不変式がワイル不変式で表現できたのはバイウエイトをもちいた議論を行なっ

たからである．ウエイト６の CR不変式が Fefferman, Graham によって定義されたワイル不変式でないことは計算機を用いた長い計算から示すことができる．これらの CR不変式を含む形にワイル不変式の構成を拡張するのが今後の目標である．

注意　Bailey-Eastwood-Graham による不変式論の結果の証明を私はまだ見ていないが，定理３は [G1] の論法に倣って $A^{l}_{p\bar{q}}$ への H の作用を具体的に計算し素朴に CR不変多項式を探すことによっても証明できる（それほど大変ではない）．

６．定理１の証明　不変式に関する準備は十分なので，ベルグマン核がワイル不変式をもちいて展開できることは殆ど明らかであろう．対数項についてだけ説明しよう．$B=\varphi r^{-3}+\psi \operatorname{Log} r$ とおくと ψ は境界の近傍（内側だけ）でウエイト３の変換則を満たす．従って，その境界値はウエイト３の CR不変式である．定理３により普遍定数 c_1 が存在して $\psi-c_1\eta_1$ は境界で０になる．次に $(\psi-c_1\eta_1)r^{-1}$ を考える．r はウエイト -1 の変換則をみたすので $(\psi-c_1\eta_1)r^{-1}$ はウエイト４の変換則をみたし，その境界値はウエイト４の CR不変式になる．従って普遍定数 c_2 が存在して $(\psi-c_1\eta_1)r^{-1}-c_2\|\nabla\bar{\nabla}R\|^2$ が境界で０になるようにできる．ここでは $\|\nabla\bar{\nabla}R\|^2$ を用いたが $\|\nabla^2 R\|^2$ を用いても普遍定数がかわるだけで議論は全く同じである．次に

$$\frac{\psi-\left(c_1\eta_1+c_2\|\nabla\bar{\nabla}R\|^2 r\right)}{r^2}$$

を考える．これは境界でウエイト５の CR不変式になり，普遍定数 c_3, c_4 を用いて

$$\frac{\psi-\left(c_1\eta_1+c_2\|\nabla\bar{\nabla}R\|^2 r\right)}{r^2}=c_3\|\nabla^3 R\|^2+c_4\|\nabla^2\bar{\nabla}R\|^2.$$

が境界で成り立つようにできる．これは (2. 2) と同値である．

注意　以上の議論で，命題２のワイル不変式の任意性の評価と定理２の r, η_1 の任意性の評価が用いられていることに注意しよう．ウエイト６の展開を行なおうとすると，これらすべての一意性がくずれる．従って定理１より詳しい展開をえるには新しい発想が必要である．

参考文献

[B1] L. Boutet de Monvel, *Complément sur le noyau de Bergman*, Séminaire EDP, École Polytech. (1985--86)

[B2] L. Boutet de Monvel, *Le noyau de Bergman en dimension 2*, Séminaire EDP, École Polytech. (1987--88)

[CY] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, *On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation,* Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 507--544.

[CM] S. S. Chern and J. K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds,* Acta Math. **133** (1974) 219--271.

[F1] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains,* Invent. Math. **26** (1974) 1--65.

[F2] C. Fefferman, *Monge-Ampere equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains,* Ann. of Math. (2) **103** (1976) 395--416, *Correction*, ibid. **104** (1976), 393--394.

[F3] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis,* Adv. in Math. **31** (1979) 131--262.

[FG] C. Fefferman and R. Graham, *Conformal invariants*, Astérisque, hors séries (1985) 95--116

[G1] R. Graham, *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel,* in "Complex Analysis II" (C. A. Berenstein, ed.), Lect. Notes in Math. 1276, 108--135, Springer, 1987

[G2] R. Graham, *Higher asymptotics of the complex Monge-Ampere equation,* Compositio Math. **64** (1987) 133--155.

[G3] R. Graham, *Invariant theory of parabolic geometries,* in "Complex Geometry" (G. Komatsu, et al. ed.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 143, 53--66, Dekker, 1992

[HKN] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, *Two methods of determining local invariants in the Szegö kernel,* "Complex Geometry" (G. Komatsu, et al. ed.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 143, 77--96, Dekker, 1992

[K] M. Kashiwara, *Analyse micro-locale du noyau de Bergman,* Séminaire Goulaouic-Schwartz, École Polytech. 1976--77.

[LM] J. Lee and R. Melrose, *Boundary behaviour of the complex Monge-Ampere equation,* Acta Math. **148** (1982) 159--192.