数理解析研究所講究録
第 845 巻 1993 年 139-148

$\mathcal{B}^2\mathcal{O}$ と境界値問題

東大数理　　山根 英司（Hideshi Yamane）

ある種のセミ双曲型境界値問題が一意可解であり，さらにその解の特異スペクトルが，境界値の特異スペクトルのみに応じて評価されることを，金子が示した．ここでは，この結果を第2超局所化する．境界値の取り扱いには（F-）マイルド性のアイデアを用いるので，先に正則パラメータについて準備する．

§1　$\mathcal{B}^2\mathcal{O}$（正則パラメータ付2-超函数の層）

$\mathbb{C}_z^{n_0+n_1} \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}_t^{n_2}$ 上で考える．$z=(z', \tilde{z})$ と書く．この上に層 $\mathcal{C}\mathcal{O}=\mathcal{C}_t\mathcal{O}_z$ がある．部分多様体 Λ^* を，

$\Lambda^* = \mathbb{C}_{z'}^{n_0} \times \mathbb{R}_{\tilde{x}}^{n_1} \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ で定めるとき，（§2以降 $n_0=1$ とする）

定義　$\mathcal{B}^2\mathcal{O}_{\Lambda^*} = R\Gamma_{\Lambda^*}(\mathcal{C}\mathcal{O})[n_1]$

命題　$\mathcal{B}^2\mathcal{O}_{\Lambda^*}$ は層である．正則パラメータ付2-超函数

の層と呼ぶことにする。$n_0=0$, $n_1=0$, $n_2=0$ のとき，それぞれ $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{CO}$, $\mathcal{BO}$ に他ならない.

（証明）

−1次以下のコホモロジーの消滅は既に柏原-Laurent で示されている．1次以上については，野呂による $\mathcal{CO}$ 版定理Bを用いて，Čech コホモロジーの計算で示される $\square$

<u>命題</u> $\Lambda^* = \mathbb{R}^{2n_0+n_1} \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2} \subset \mathbb{C}^{n_0}_{\bar{z}'} \times \mathbb{C}^{n_0}_{z} \times \mathbb{R}^{n_1}_{x} \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}_{t}$ とみなすと，$\mathcal{B}^2_{\Lambda^*}$ が定義される．このとき，部分コーシー・リーマン系 $\partial_{\bar{z}'} u = 0$ の $\mathcal{B}^2_{\Lambda^*}$ 解層は，$\mathcal{B}^2\mathcal{O}_{\Lambda^*}$ に一致する．特に高次解層は消滅する．

（証明）

$\mathcal{CO}$ に関して正則ド・ラム理論が成立するので SKK と同様にできる $\square$

<u>諸性質</u>

コーシーの積分定理・積分公式，オユマイクロ解析性伝播（特に一意接続性）が成立する．また Dolbeault 分解ができるので，Malgrange 型消滅定理も成り立つ．これらが $\mathcal{CO}$ に関する結果を含むことに注意しよう．

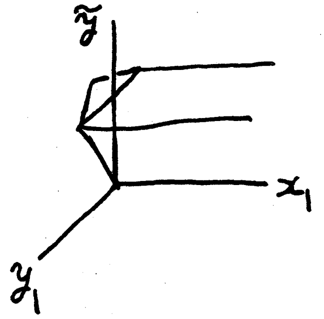
正則パラメータに関する境界値

$\mathcal{B}^2\mathcal{O}$ の切断が（z' 空間の無限小楔）$\times$（$\mathbb{R}^{n_1}\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ の開集合）の上で与えられたとき，$\mathrm{Im}\,z'\to 0$ の境界値をとることができる．これは $\mathcal{E}$-linear である．

§2 (F-)マイルド性と解の境界値

$n_0=1$ とする．$z=(z_1,\tilde{z})=(x_1+\sqrt{-1}\,y_1,\ \tilde{x}+\sqrt{-1}\,\tilde{y})$ と書く．$\Lambda^*\supset\Lambda:=\{y_1=0,\tilde{y}=0\}\supset\Delta:=\{z_1=0,\tilde{y}=0\}$ とする．前項の境界値は $\mathcal{B}^2_\Lambda$ に値をとる．また，$\Delta=\mathbb{R}^{n_1}\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ なので，$\mathcal{B}^2_\Delta$ が定義される．$\Delta\,(\subset\Lambda)$ を境界面とする境界値問題を考える．

z-空間で図のような開集合 U を考える．



$F(z,t)\in C_t\mathcal{O}_z$ が，$U\times$（$\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ の開集合）で定義されていて，ここで $PF=0$ をみたすとする．ただし，P は $\mathrm{Im}\,z=0$ の近傍で定義されたマイクロ微分作用素で次の形とする：

$$(*)\quad P(z,t,D_z,D_t)=D_{z_1}^m+\sum_{0<|\alpha|\le m}A_\alpha D_{z_1}^{m-|\alpha|}D_{\tilde{z}}^{\alpha}+(\text{低階})$$

$$[A_\alpha,\ z_1]=0\quad,\quad \mathrm{ord}\,A_\alpha\leqq 0$$

さて野呂の意味での F の境界値 $u=b(F)\in\mathcal{B}^2_\Lambda$ は，もちろ

ん $P(x,t,D_x,D_t)u=0$ をみたす．また $Y(x_1)F(x_1,\tilde{z},t)$ $\in \mathcal{B}^2\mathcal{O}$ が定義されて，$\mathrm{Im}\,\tilde{z}\to 0$ の境界値 $[u]$ が定まる．これを u の canonical extension と呼ぶ．

$P[u]=\sum_{j=0}^{m-1} b_j^+(u)(\tilde{x},t)\,\delta^{(m-1-j)}(x_1)$, $b_j^+(u)\in\mathcal{B}^2_\Delta$

と書ける．$b_j^+(u)$ を u の境界値という．

一方，$(D_{z_1}^j F)(0,\tilde{z},t)\in C_t\,\mathcal{O}_{\tilde{z}}$ が定義されて，これらが $\mathcal{B}^2_\Delta$ の切断を定める．これらは，(境界系の取り方を除いて) $b_j^+(u)$ に一致する．

また，$\mathcal{B}^2_\Delta$ と $\mathcal{B}^2_\Delta$ に関する割算定理にもとづいて，小松・河合－Schapira の理論の $\mathcal{B}^2$ 版ができる．これで定義した canonical extension や境界値はもちろん上記のものと一致する．

§3 コーシー・コワレフスキー

この§では他と少し違った記号を使う．$\mathbb{C}^{n+1}_z=\mathbb{C}_{z_0}\times\mathbb{C}^n_{\tilde{z}}$ とし，$K,\ L>0$ とする．

$U_{K,L}=\{(z_0,\tilde{z})\in\mathbb{C}^{1+n}\ ;\ K|z_0|+|\tilde{z}|<L\}$

$V_L=\{\tilde{z}\in\mathbb{C}^n\ ;\ |\tilde{z}|<L\}$

とおく．ただし $|\tilde{z}|=|z_1|+\cdots+|z_n|$

$P(z,D_z)$ が $\overline{U_{1,L}}$ の近傍で定義された m 階の微分作用素で，$Y=\{(z_0,\tilde{z})\,;\,z_0=0\}$ が非特性とする．このとき $\exists K_0\geq 1$, $^\forall K\geq K_0$ に対し，次は位相をこめて同型：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U_{K,L}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(U_{K,L}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}(V_L) \\ u & \longmapsto & \left(Pu\ ;\ u|_{z_0=0}, \dots, D_{z_0}^{m-1} u|_{z_0=0}\right) \end{array}$$

さて，ここで，$\mathbb{C}_w^p$ の任意の開集合 Ω をとり，上の同型に完全関手 $\hat{\otimes}\,\mathcal{O}(\Omega)$ を施すと

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{z,w}(U_{K,L}\times\Omega) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{z,w}(U_{K,L}\times\Omega) \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_{\tilde{z},w}(V_L\times\Omega) \\ u(z,w) & \mapsto & \left(Pu\ ;\ u|_{z_0=0}, \dots, D_{z_0}^{m-1} u|_{z_0=0}\right) \end{array}$$

を得る．これを使うと，$C\mathcal{O}$ に関するコーシー・コワレフスキーの precise form が導かれる．

<u>定理</u> W を $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}_t^p$ の任意の開集合とするとき，次の同型が成立する：

$$\begin{array}{c} C_t\mathcal{O}_z(U_{K,L}\times W) \xrightarrow{\sim} C_t\mathcal{O}_z(U_{K,L}\times W) \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} C_t\mathcal{O}_{\tilde{z}}(V_L\times W) \\ u(z,t) \mapsto \left(P(z,D_z)u(z,t)\ ;\ u|_{z_0=0}, \dots, D_{z_0}^{m-1} u|_{z_0=0}\right) \end{array}$$

<u>注</u> (z,t) 変数のマイクロ微分作用素について precise form が定式化・証明できればよいが，オーオー flat の話が出てくるので難しい。（t が 1 変数のときは Schapira）それに，仮にできたとしても，出てくる集合の形は難しくなり，直積状で話をまとめるのは無理だろう．

上の定理を使って掃き出しを行ないたい．P が (z,t) 変数のマイクロ微分作用素のときは，柏原-Schapira による，$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$

加群の SS の評価を利用すればよいが，少し結果が弱くなる。

§4 セミ双曲型境界値問題

定義A（金子）

$P(z, D_z)$ を微分作用素，I を $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_1}_{(\tilde{x};\sqrt{-1}\tilde{\xi}d\tilde{x})}$ の開集合とする．P が $\{x=(x_1,\tilde{x})\ ;\ x_1=0\}$ の正側に I-セミ双曲型とは，

$\forall L \subset\subset I$, $\exists \varepsilon_L > 0$ s.t.

$\sigma(P)(x;\zeta_1,\sqrt{-1}\tilde{\xi})=0$ が $(\tilde{x};\sqrt{-1}\tilde{\xi})\in L$, $0<x_1\leqq\varepsilon_L$ のときた $\mathrm{Re}\,\zeta_1>0$ なる根 ζ_1 を1つも持たないことをいう．

例　$I=\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_1}$ で $P=D_1^2-(D_2^2+\cdots+D_d^2)$，$d\leqq n_1+1$

$$P = D_1^2 - x_1 D_2^2 \quad (\text{トリコミ})$$

$$I=\{\xi_2<0\} \text{ で } P = D_1+\sqrt{-1}\,x_1D_2 \quad (\text{Lewy-溝畑})$$

ここで少し幾何学的な注意をする。$\Lambda=\mathbb{R}^{n_1+1}_x\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ の部分複素化を $\tilde{\Lambda}$ とするとき，才2特異特異スペクトルやマイクロ特性多様体は $\sqrt{-1}S^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$ 上に住んでいる．ところが，$\sqrt{-1}S^*_\Lambda\tilde{\Lambda}\simeq\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_1+1}\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ とみなせるので，以下断わりなくこの同一視を行なう。（Λ の代わりに Δ でも同様.）
$P=P(z,D_z)$ については，$Ch^2_\Lambda(P)=Ch(P)\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ となる．$\sigma_\Lambda\sigma(P)=\sigma(P)$ に注意しよう．上の定義のような P は"2-セミ双曲型"ともいえる．

<u>定理A</u> 上の定義のような I, P を考える. Ω_2 を $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ の開集合, $v_j \in \mathcal{B}^2_\Delta(\pi(I)\times\Omega_2)$ $(0\leqq j\leqq m-1)$ とし, $SS^2_\Delta(v_j)\subset I\times\Omega_2$ とする. このとき $\bigcup SS^2_\Delta(v_j)$ だけで決まる $\mathbb{R}^{n_1+1}$ における $\pi(I)$ の正側半近傍 $\tilde{\Omega}$ と $\lim_{\varepsilon\to 0} C(\varepsilon)=0$ なる $C(\varepsilon)>0$ が存在し, 片側境界値問題

$$\begin{cases} Pu=0, & u\in \mathcal{B}^2_\Lambda(\tilde{\Omega}\times\Omega_2) \\ b_j^+(u)=v_j & (0\leqq j\leqq m-1) \end{cases}$$

が一意可解. また $SS^2_\Lambda(u)\cap\{x_1=\varepsilon\}$ の ξ 成分は $\bigcup SS^2_\Delta(v_j)$ の ξ 成分の $C(\varepsilon)$ 近傍に入る.

(証明)

定義関数 $\in C\mathcal{O}$ に戻って正則コーシー問題を解く. その解が求める境界値を与えることは (F-)マイルドの話より出る. 解を掃き出し法 (双曲型不等式による) と $C\mathcal{O}$ の local Bochner で伸ばす. SS^2_Λ の評価はつくり方からわかる. 局所一意性は2-マイクロ西瓜割り定理と掃き出しによる $\square$

例 $(D_1^2 - x_1 D_2^2)u=0$ locally on $x_1>0$, $u\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ とすると $\{\xi_1=\xi_2=0\}$ に沿う u の第2特異スペクトルは, $SS^2_{\{\xi_2=0\}}(u|_{x_1\downarrow 0})\cup SS^2_{\{\xi_2=0\}}(D_1 u|_{x_1\downarrow 0})$ だけによる上からの評価をもつ. (境界値自体にはよらない)

マイクロ微分作用素の場合を考えよう.

<u>定義B</u>　$w\in\mathbb{C}^{n_2}$ を $t\in\mathbb{R}^{n_2}$ の複素化とする. $P(z,w,D_z,D_w)$ を§2 (*) の形の作用素, $\Lambda^{\mathbb{C}}=\mathbb{C}_z^{1+n}\times\dot{T}^*\mathbb{C}^{n_2}_{(w;\theta)}$ とし, $\sigma_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\sigma(P)(z,w;\theta;\tilde{\zeta})$ をマイクロ・シンボルとする. ただし $\tilde{\zeta}$ は $T_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(T^*\mathbb{C}^{1+n_1+n_2})\simeq T^*\mathbb{C}^{1+n_1}\times\dot{T}^*\mathbb{C}^{n_2}$ のファイバーの座標. このときPが Ω_2 上 $\{x=(x_1,\tilde{x})\,;\,x_1=0\}$ の正側に2-I-セミ双曲型とはPが次の条件を満たすことをいう.

$\forall L\subset\subset I,\ \forall K\subset\subset\Omega_2,\ \exists\varepsilon_{K,L}>0$

s.t. $\sigma_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\sigma(P)(x;t;\sqrt{-1}\tau;\zeta_1;\sqrt{-1}\tilde{\xi})=0$ が, $(\tilde{x};\sqrt{-1}\tilde{\xi})\in L$, $(t;\sqrt{-1}\tau)\in K$, $0<x_1\le\varepsilon_{K,L}$ のときに $\mathrm{Re}\,\zeta_1>0$ なる根 ζ_1 を1つも持たない

<u>定理B</u>　Ω_2 を相対コンパクトな任意の開部分集合に取りかえると前定理と同様の結果が成立する.

(証明)

素朴な掃き出し法の代わりに, 公式 $SS(R\mathcal{H}om(\mathcal{E}/\mathcal{E}P,\ \mathcal{C}\mathcal{O}))\subset Ch^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(P)$ と柏原の non-characteristic deformation lemma を使う. $Ch^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(P)$ を評価するためには, マイクロ・シンボルに双曲型不等式を当てはめる. □

<u>例</u>　$P=D_n(D_1^2-x_1D_2^2)+\sum_{i+j=3}a_{ij}(x)D_1^iD_2^j+(\text{低階})\in\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}$

$\Lambda = \{(x; \sqrt{-1}\xi dx)\ ;\ \xi_1 = \xi_2 = 0,\ \xi_n \neq 0\} \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n$ とする。
$Pu=0$ の解 $u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}|_\Lambda \subset \mathcal{B}^2_\Lambda$ につき，$SS^2_\Lambda(u) \cap \{x_1 > 0\}$ は
$u|_{x_1=0}$，$D_1 u|_{x_1=0}$ ($\mathcal{B}^2$ の意味の制限) の第2特異スペクトル
だけによる上からの評価を持つ。

注　内田は定義Bに似たクラスのマイクロ微分方程式系に関して，境界Δへの regularity の伝播定理を示した。

一方，金子は自身の伝播定理と小松・河合・Schapira の標準的延長の理論を組み合わせて $(D_1 + \sqrt{-1}x_1 D_2)u = \delta$ on $\mathbb{R}^2$ の非可解性を示した，

これらをヒントに，内田の伝播定理と $\mathcal{B}^2$ 版 K-K-S 理論を用いて，$0 \in \mathbb{R}^n_x$ の近傍で次の方程式の非可解性を示すことができる（$\mathcal{B}^2$ 解なし ⇒ $\mathcal{B}$ 解なし）

$$\left[D_n (D_1 + \sqrt{-1}x_1 D_2)^m + \sum_{i+j=m+1} a_{ij}(x) D_1^i D_2^j + (\text{低階})\right] u = f$$

ただし f は 0 の近傍で与えられたある distribution で，0 の外で解析的。

文献

[1] Kaneko, A., Estimation of singular spectrum of boundary values for some semihyperbolic operators, J. Fac. Sci Univ

Tokyo Sec. IA 27 (1980)

[2] Kaneko, A., Singular spectrum of boundary values of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo 25 (1975)

(これの訂正が[1] P. 454 にある)

[3] 大島利雄，確定特異点型の境界値問題と表現論，上智大学講究録

(4) 戸瀬信之，修論（数研講究録 573）

[5] 内田素夫，修論

[6] 野呂正行，修論（数研講究録 573）

[7] Douady, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Asterisque 16 (1974)