数理解析研究所講究録
第 846 巻 1993 年 39-45

有限群の作用に付随した fusion algebra

Akihiro Munemasa (宗政昭弘)
九州大学理学部

1 有限群の group Hopf algebra の quantum double

Quantum double とは任意の Hopf 代数に対してその dual とのテンソル積に Hopf 代数の構造を入れたもので、定義は Drinfeld [6] による。ここでは有限群の group Hopf algebra の場合についてのみ、quantum double がどのようなものかを簡単に述べる。G を有限群とし、D を $G\times G$ を基底とする C 上のベクトル空間とする。D において積を次のように定義する。

$$(g,h)(k,l)=\delta_{h^{-1}gh,k}(g,hl)\quad (g,h,k,l\in G).$$

すると D は associative algebra になる。さらに、

$$\Delta:(g,h)\mapsto\sum_{x\in G}(x,h)\otimes(x^{-1}g,h)$$

$$\varepsilon:(g,h)\mapsto\delta_{g,1}$$

により D は Hopf 代数 になり

$$R=\sum_{g,h\in G}(g,1)\otimes(h,g)$$

により D は quasi-triangular になる。

そもそも私が quantum double に興味を持ちはじめたのは、Dijkgraaf–Vafa–Verlinde–Verlinde [5] に現われる fusion algebra が、実は group Hopf algebra の quantum double の中心であるということを知ったからである。論文 [5] では任意の有限群 G から出発して SL(2,Z) の作用する fusion algebra なるものを構成し、Verlinde formula が与えられている。一方、坂内 [1] によれば、fusion algebra は character algebra [8] と本質的に同じもので、self-dual な character algebra において構造定数を指標表で書き表わしたものが Verlinde formula に他ならない。従って、[5] に現われる fusion algebra を純代数的に構成し、対応する character algebra の self-duality を示すことができれば、Verlinde formula は証明されたことになる。そこで [5] への形式的な approach を試みた [11]、が、このよ

うな試みはすでになされていた (Bantay [3],[4], 和久井 [12])。次節では、坂内 [1] による fusion algebra を非可換な場合に一般化した定義を与え、[5] に現われる fusion algebra を構成する。この fusion algebra は可換だが、非可換な例は第3節で取り上げる。

2 Fusion algebras

Definition. 複表数体上の有限次元代数 $\mathcal{A}$ が、（基底 $x_0, \ldots, x_d$ に関して） fusion algebra であるとは次の条件をみたすときをいう。ただし、$x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^k x_k$ とする。

(1) $x_0 = 1$

(2) N_{ij}^k は非負整数

(3) 基底の置換 $\hat{}$: $x_i \mapsto x_{\hat{i}}$ で involutive な anti-automorphism が存在する

(4) $N_{ij}^k = N_{\hat{i}k}^j$

(5) ある一次表現 $x_i \mapsto k_i$, $k_i > 0$ が存在する

この定義は、坂内 [1] の integral fusion algebra at algebraic level から可換性の条件を除いたものである。

さて第1節で述べたように、group Hopf algebra の quantum double を考える。$\mathcal{A} = Z(D)$ を D の中心とすると、

$$\mathcal{A} = (\bigoplus_{gh=hg} \mathbf{C}(g,h))^G \cong \bigoplus_{i=0}^{d} Z(\mathbf{C}[C_G(g_i)])$$

となることは容易にわかる。ただし g_i $(i = 0, \ldots, d)$ は G の共役類の代表系である。この代数 $\mathcal{A}$ の中に次のような基底をとる。

$$x_{i,\alpha} = \frac{1}{|C_G(g_i)|} \sum_{h \in G} \sum_{g \in C_G(g_i)} \rho_{i,\alpha}(g)(h^{-1}gh, h^{-1}g_i h),$$

ただし、$\{\rho_{i,\alpha}\}_\alpha$ は $C_G(g_i)$ の既約指標全体の集合とする。このとき $\mathcal{A}$ は基底 $\{x_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ に関して可換な fusion algebra になる。また、SL(2,**Z**) は

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : (g,h) \mapsto (h, g^{-1}),$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (g,h) \mapsto (g, hg),$$

により quantum double の中心 $Z(D)$ に作用する。S, T を基底 $\{x_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ に関して行列表示すると、S は対称な、T は対角な、ユニタリ行列になる。さらに S による基底 $\{x_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ の像は、スカラー倍を除いて $\mathcal{A}$ の原始巾等元の集合 $\{e_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ になる。ただし

$$e_{i,\alpha} = \frac{\rho_{i,\alpha}(1)}{|C_G(g_i)|^2} \sum_{h \in G} \sum_{g \in C_G(g_i)} \rho_{i,\alpha}(g)(h^{-1}g_i h, h^{-1}gh).$$

従って S は $\mathcal{A}$ の "指標表" を与え、また S^2 が $\{x_{i,\alpha}\}$ を集合として固定することから、"self-duality" がわかる（指標表、及び self-duality は character algebra に関して定義される [1],[2],[8]）。

3 群作用への一般化

この節では前節で構成した fusion algebra を、群作用の場合にいかに拡張するかを述べる。すなわち、有限群 G が集合 X に可移に作用している時、fusion algebra の構成法を述べる。これを、$G = H \times H$ が $X = H \times H/\Delta H$,（ただし $\Delta H = \{(h,h)|h \in H\}$）に作用している場合に適用すると前節の algebra が得られる。一般に集合 X は群構造を持たないので、Hopf 代数や quantum double の一般化を構成しているわけではない。今、群 G が集合 X に可移に作用しているとし、

$$Y = \{(g;x,y)|x,y \in X,\ g \in G,\ x^g = x,\ y^g = y\}.$$

とおく。$\tilde{\mathcal{A}} = \mathbf{C}Y$ を Y の元を基底とする $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とし、$\tilde{\mathcal{A}}$ に積を次のように定義する。

$$(g;x,y)(h;z,w) = \delta_{y,z}\delta_{g,h}(g;x,w).$$

このとき $\tilde{\mathcal{A}}$ は $\mathbf{C}$ 上の半単純代数になる。実際

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigoplus_{g \in G} M_{|F(g)|}(\mathbf{C})$$

である。ただし、$F(g) = \{x \in X|x^g = x\}$。群 G は集合 Y に作用する：

$$G \ni u : (g;x,y) \mapsto (u^{-1}gu; x^u, y^u).$$

この作用は $\tilde{\mathcal{A}}$ の自己同型を誘導し、従って固定部分空間

$$\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}^G = \{\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}|\alpha^g = \alpha,\ \forall g \in G\}$$

は $\tilde{\mathcal{A}}$ の subalgebra になる。容易に

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathcal{H}(C_G(g_i), F(g_i))$$

がわかる。ただし、$\{g_0,\ldots,g_m\}$ は G の共役類の代表系、$\mathcal{H}(C_G(g_i),F(g_i))$ は $C_G(g_i)$ の $F(g_i)$ 上の置換表現の centralizer algebra (Hecke algebra, commutant) である。従って、$\mathcal{A}$ が可換であるためには、すべての i について $C_G(g_i)$ の $F(g_i)$ 上の置換表現が multiplicity-free であることが必要十分である。例えば、G が、正則正規アーベル部分群をもてば、この条件はみたされる。

さて、$\mathcal{A}$ の fusion algebra としての基底を構成しよう。$X \times X$ 上の G-orbit の代表元を (a_i, b_i) $(0 \leq i \leq d)$ とし、G_i を (a_i, b_i) の固定部分群とする。$\{\rho_{i,\alpha}\}_\alpha$ を G_i の既約指標全体の集合とし、

$$x_{i,\alpha} = \frac{1}{|G_i|} \sum_{h \in G} \sum_{g \in G_i} \rho_{i,\alpha}(g)(h^{-1}gh; a_i^h, b_i^h)$$

とおく。このとき、$\{x_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ は $\mathcal{A}$ の基底をなし、この基底に関して $\mathcal{A}$ は fusion algebra となる。

Remark. （１）吉田知行氏 [13] は、全く別の構成法で代数 $\mathcal{A}$ を構成している。また、$G = H \times H$, $X = H \times H/\Delta H$ の場合 $\mathcal{A}$ が可換になることは、池田正氏が最初に気づいたことである、と御指摘いただいた。

（２）$G = H \times H$, $X = H \times H/\Delta H$ の場合を扱っている [5] の代数的再構成について、１９９２年１２月に京大数理研短期共同研究・代数的組合せ論と低次元トポロジー（研究代表者：河野俊丈）において、和久井道久氏が講演したとき、河東泰之氏が、部分作用素環との関連性を指摘し、一般の群作用の場合への拡張の可能性をほのめかした。一般に群 G とその部分群 H が与えられたとき（これは G が $X = G/H$ に作用していると考えてもよい）、hyperfinite II_1 factor と呼ばれる無限次元単純環の組 $M \supset N$ が自然に対応し、$M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$ に現われる N-N bimodule の同型類は有限個である。これら同型類を基底とし、$\otimes$ で積を導入した環が、実はこの節で構成した代数と同型になるのではないか、と私は予想した。この研究集会の直後山上滋氏より、この予想が正しいということを知らされた。

4 Terwilliger algebras of association schemes

Association schemes を中心とする代数的組合せ論の哲学は、群の作用する空間から、群そのものを除外することである。第３節に述べたことは、可移に作用する群がなければ全く無意味である。第３節の内容を伊藤達郎氏に話した時、$G \times X \times X$ の部分集合 Y を基底としてとる代わりに、$X \times X \times X$ を考えたらどうか、と助言をいただいた。実際、前節の代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ の積の定義においては G の演算は全く用いられていない。そこで、有限集合 X に対し、$X \times X \times X$ を基底とする C 上のベクトル空間 $\tilde{\mathcal{A}} = \mathrm{C}[X \times X \times X]$ を考え、積を次で定義する。

$$(x; y, z)(u; v, w) = \delta_{x,u}\delta_{z,v}(x; y, w).$$

もちろん、これでは $\tilde{\mathcal{A}} = \oplus^n M_n(\mathrm{C})$、ただし $n = |X|$ となり全く面白くない。有限群 G が X に可移に作用していれば、$X \times X$ はいくつかの軌道 $R_0, R_1, \ldots, R_d$ に分れる。この

状況を一般化したのが association scheme の概念である。詳しくは [2] にゆずるが、association scheme の定義を知らない読者は、$R_0, R_1, \ldots, R_d$ を G の $X \times X$ 上の軌道と考えて差し仕えない。

さて、

$$A_i = \sum_{x \in X} \sum_{(y,z) \in R_i} (x; y, z).$$

$$E_i^* = \sum_{(x,y) \in R_i} (x; y, y),$$

$$T_0 = \mathrm{span}\{E_i^* A_j E_k^* | 0 \leq i, j, k \leq d\}$$

とおく。T を $\{A_i\} \cup \{E_i^*\}$ で生成された $\tilde{\mathcal{A}}$ の subalgebra とし、これを association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ の Terwilliger algebra と呼ぶ。明らかに T_0 は T の部分空間であり、$T_0 = T$ が成立するとき $\mathcal{X}$ は triply regular であるという。Triply regular であるための必要十分条件は $A_i E_j^* A_k \in T_0$ がすべての i, j, k について成り立つことである。今、$\{R_i\}_{0 \leq i \leq d}$ が実際にある群 G の $X \times X$ 上の軌道だとしよう。群 G は $X \times X \times X$ 上にも作用し、従って代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ に自己同型として作用する。Terwilliger 代数 T は G の固定部分代数 $\tilde{\mathcal{A}}^G$ の部分代数である。

最後に、Terwilliger 代数の応用として、spin model に関する Jaeger の定理の簡単な証明を与える。まず、Terwilliger 代数の生成元 $\{A_i\} \cup \{E_i^*\}$ のみたす関係を列挙しておく。ただし、$J = \sum_{i=0}^d A_i$, $R_i(x) = \{y \in X | (x, y) \in R_i\}$, $R_{i'} = \{(x, y) | (y, x) \in R_i\}$, $p_{ij}^k = |R_i(x) \cap R_{j'}(y)|$ $((x, y) \in R_k)$ とする。

Lemma 1 (i) $A_0 = \sum_{i=0}^d E_i^*$ *is the identity of* T.

(ii) $A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k$.

(iii) $E_i^* E_j^* = \delta_{ij} E_i^*$.

(iv) $E_i^* A_j E_k^* = \sum_{\substack{(x,y) \in R_i,\ (x,z) \in R_k \\ (y,z) \in R_j}} (x; y, z)$.

(v) $E_0^* A_j = E_0^* A_j E_j^*$, $A_j E_0^* = E_{j'}^* A_j E_0^*$.

(vi) $A_i E_j^* A_k = \sum_{x,y,z \in X} |R_i(y) \cap R_j(x) \cap R_{k'}(z)| (x; y, z)$.

(vii) $A_i E_0^* A_k = E_{i'}^* J E_k^*$.

(viii) $J E_j^* A_k = \sum_{i=0}^d p_{jk}^i J E_i^*$.

(ix) $A_i E_j^* J = \sum_{k=0}^d p_{ji'}^k E_k^* J$.

(x) $E_0^* A_i E_j^* A_k = \delta_{ij} \sum_{l=0}^{d} p_{ik}^l E_0^* A_l E_l^*$.

(xi) $A_i E_j^* A_k E_0^* = \delta_{jk'} \sum_{l=0}^{d} p_{ik}^l E_{l'}^* A_l E_0^*$.

Definition. 有限集合 X 上の spin model とは、$X \times X$ 上の複素数値関数 w_+, w_- で次の条件を満たすものである。

(i) $w_+(x,y)w_-(y,x) = 1 \quad \forall x, y \in X$.

(ii) $\sum_{z \in X} w_+(x,z)w_-(z,y) = \delta_{x,y}|X|$.

(iii) 任意の $a, b, c \in X$ に対して、

$$\sum_x w_+(a,x)w_+(x,b)w_-(x,c) = \sqrt{|X|}\, w_+(a,b)w_-(b,c)w_-(a,c).$$

Theorem 2 (Jaeger [7]) $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2\})$ を *symmetric association scheme* とし、$w_+ : (x,y) \mapsto t_i \ ((x,y) \in R_i)$, $w_- : (x,y) \mapsto t_i^{-1} \ ((x,y) \in R_i)$ を *spin model* とする。$t_1 \neq t_2$ ならば、$\mathcal{X}$ は *triply regular* である。

Proof.

$$W = \sum_{i=0}^{d} t_i A_i,$$

$$W^* = \sqrt{|X|} \sum_{i=0}^{d} t_i^{-1} E_i^*$$

とおくと、spin model の定義から $WW^*W = W^*WW^*$ がわかる。$W^*WW^* \in T_0$ だから、$WW^*W \in T_0$ となる。定義より、$W = t_0A_0 + t_1A_1 + t_2A_2$ は A_0, A_1, J の線形結合である。Lemma 1 (i), (viii) によって、$A_0W^*W \in T_0$, $JW^*W \in T_0$。仮定より $t_1 \neq t_2$ だから、$A_1W^*W \in T_0$ となる。同様に $A_1W^*A_1 \in T_0$。さらに Lemma 1 (vii) によって、$A_1E_0^*A_1 \in T_0$、従って

$$t_1^{-1}A_1E_1^*A_1 + t_2^{-1}A_1E_2^*A_1 \in T_0.$$

一方

$$A_1E_1^*A_1 + A_1E_2^*A_1 = A_1^2 - A_1E_0^*A_1 \in T_0.$$

ここで $t_1 \neq t_2$ より $A_1E_1^*A_1 \in T_0$ となる。これは subconstituent が strongly regular であることを意味している。後は簡単な counting argument で証明は完結する。 □

この講演をするにあたり多くの助言をいただいた綿谷安男氏、佐野隆志氏、吉田知行氏に深く感謝する。この研究集会の後、山上滋氏、幸崎秀樹氏に論文 [9] を解説していただいたことは大変参考になった。また、丹原大介氏からも多くの助言をいただいた。

References

[1] E. Bannai, Association schemes and fusion algebras (an introduction), to appear in J. Algebraic Combinatorics.

[2] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I: Association schemes, Benjamin/Cummings 1984.

[3] P. Bantay, Orbifolds and Hopf algebras, Phys. Lett. B **245** (1990), 477–479.

[4] P. Bantay, Orbifolds, Hopf algebras, and the moonshine, Lett. in Math. Phys. **22** (1991), 187–194.

[5] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, and H. Verlinde, The operator algebra of orbifold models, Comm. Math. Phys. 123 (1989), 485–526.

[6] V. G. Drinfel'd, Quantum groups, in "Proc. Int. Congress of Mathematicians", Berkley, California, 1986, Acad. Press, 798–820.

[7] F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, Geom. Dedicata **44** (1992), 23–52.

[8] Y. Kawada, Über den Dualitätssatz der Charaktere nichtcommutativer Gruppen, Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), **24** (1942), 97–109.

[9] H. Kosaki and S. Yamagami, Irreducible bimodules associated with crossed product algebras, Internat. J. Math. **3** (1992), 661–676.

[10] H. Kosaki, A. Munemasa and S. Yamagami, On fusion algebras associated with finite group actions, *in preparation.*

[11] A. Munemasa, A formal approach to the fusion algebras for finite groups, preprint.

[12] M. Wakui, Fusion algebras for orbifold models, preprint.

[13] 吉田知行, 有限 G 集合のカテゴリーのスパン, 「代数的K - 理論」研究集会報告集, 1982 年 12 月, 東京工業大学, 104–128.