

S P I N M O D E L の構成について

Victor G. KAC (MIT)

脇本 実 (三重大学教育学部)

(Minoru WAKIMOTO)

§ 0. まえがき

Spin Model は Link の不変量を構成するための一つの手法として, Jones[5] により導入されたもののようであるが, 筆者(M.W)がそれに関心を持つようになったのは, 昨年(1992年)11月に三重大学教育学部で行われた坂内英一氏(九州大学)の集中講義が, きっかけであった。Association Schemes をテーマにした明解な講義であったが, 集中講義の最終日に, 関連する話題として, Fusion algebra (at algebraic level) と spin model についての話をされた。坂内氏は(おそらく)書き上げたばかりの「数学」の論説[1]の原稿に沿いながら, Association scheme やその周辺の話を, 私にでも分かるように, 易しく, かみくだいて解説して下さったが,

(1) 「association scheme + modular不変性」を用いて spin model を作る話や,

(2) 有限巡回群の上に spin model を構成する話

などは, 非常に興味をそそられる話であった。

アフィン・リー環 \mathfrak{g} があると, レベル m の integrable 表現の modular 変換を使って Fusion algebra が構成されること (Verlinde の公式) は, よく知られている。有限巡回群は, アフィン・リー環 $A_{\ell}^{(1)}$ のレベル 1 の fusion algebra とみることが出来る。(坂内)² の preprints[2][4]を

お手本にしながら，この方法をリー環の言葉に焼き直して解釈してみようと試みた。リー環には fusion algebra たちが，あり余る程ある。これらに，(坂内)²の方法を適用してみたらどうなるだろうか？

しかし実際にやってみると，うまく行かない。うまく行くのは，

(#1) $A_{\ell}^{(1)}$, $D_{\ell}^{(1)}$, $E_{\ell}^{(1)}$ のレベル1の表現の時だけ，

であって，これらは実質的に上の(2)に含まれてしまう。一般のアフィン・リー環に拡張しようとする時，たちまち障害に突き当たる。何故(#1)の時だけうまく行くのか？・・・技術的な理由ではあるが，その事情は次のようである：integrable表現の指標の上には modular群 $SL_2(\mathbb{Z})$ が作用しているが， $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の作用を， $ch_{\lambda} |_S = \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} ch_{\mu}$ と書くとき，

(#2) $S_{m\lambda_0\mu}$ が μ に依らない (m は λ, μ のレベル)

となる場合には，spin model の構成がうまく行く。しかし integrable な表現で，この条件(#2)を満たすものは，(trivial表現，すなわち $m=0$ の場合を除けば)，(#1)のものしかない。

このように，(坂内)²の手法をリー環に拡張することは無理な問題のようにも見えた。しかし・・・我々はもっと広い表現のクラスを知っている。modular不変な表現は integrableな表現だけではない(cf.[7],[8])。admissible表現の世界を覗くと，条件(#2)と似ているが，それよりも少し弱い性質

(#2') $S_{m\lambda_0\mu}$ は (± 1 倍を除き) μ のとり方に依らない

を持つものが，どのアフィン・リー環にも沢山(無限個)ある。そして，この性質(#2')の下でも，話がうまく行くことが分かった。spin model だけでなく，その拡張である generalized spin model も generalized² spin model も，同時に構成出来る。

このようにしてアフィン・リー環の admissible表現を用いることによって spin models を構成することは，リー環の表現論の応用例としても，結構

面白いもののように思われた。しかしその後、著者たちの間で議論を重ねるにつれて、この構成法は非常に簡単になって行った。余分な脂肪はどんどんとれて行き、ついには・・・admissible表現も、modular不変性も、そしてリー環さえも洗い落とされてしまった。あとに残ったのは、ただ Lattice と、その上の2次形式のみ・・・spin model の構成には、たったこれだけのデータで十分だったのである。

§ 2 が本論であるが、この節の定理や Lemmas の証明はすべて高校生の練習問題程度なので省略する。我々の出発点であったリー環の話は、§ 2 の主定理の具体的な適用例として、§ 3 に略述する。

ここで構成した spin model から、新しい Link不変量が得られるかどうかについては、今のところ未だ分からない。

坂内氏には、spin model を教えていただいたり、論文のコピーを送っていただいたり、助言をいただいたり、終始大変お世話になりました。厚くお礼を申し上げます。

§ 1. Spin Model の定義 :

この節では、 X は N 個の元から成る有限集合とする。また、 X_+ 、 X_- や、 X_i ($i=1,2,3,4$) は N 次 (複素) 正方行列で、その両足は X の元である。

定義 1.1. $(X ; X_{\pm})$ が “Spin model (by Jones)” or “symmetric spin model” であるとは、次の条件 (S0)~(S3) を満たすときに云う :

$$(S0) \quad X_{\pm} \text{ は対称行列}$$

$$(S1) \quad X_+ \circ X_- = J,$$

ここで、 \circ は行列の Hadamard積を表わす。 J は、すべての行列

要素が 1 の N 次正方行列である。

$$(S2) \quad X_+ \cdot X_- = N \cdot I \quad (I \text{ は単位行列})$$

(S3) (star triangle relation) 任意の $\alpha, \beta \in X$ に対して, N 次の縦ベクトル $Y_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^N$ を $(Y_{\alpha\beta})_{\mu} := (X_+)_{\mu\alpha} (X_-)_{\mu\beta}$ で定めると,

$$X_+ Y_{\alpha\beta} = \sqrt{N} (X_-)_{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta} \quad \square$$

Note. 条件 (S3) より, 行列 X_- の要素は X_+ の固有値の $N^{-1/2}$ 倍である。従って, 行列 X_- (及び X_+) の行列要素の中で, 異なるものは高々 N 個しかない。 □

Spin model の概念は, 宗政・綿谷 [9] により, non-symmetric の場合に拡張された:

定義 1.2. $(X; X_{\pm})$ は, 条件 (S1)(S3) と

$$(GS2) \quad {}^t X_+ \cdot X_- = N \cdot I$$

を満たす時に, “generalized spin model” or “non-symmetric spin model” と呼ばれる。 □

すなわち, このように定義すれば, これから Link 不変量が作れるということである。

Spin model は, (坂内)² [3] によって更に拡張されている:

定義 1.3. $(X; X_i (i=1 \sim 4))$ が “generalized² spin model” であるとは, 次の 3 条件 (GG1) ~ (GG3) を満たすときに云う:

$$(GG1) \quad X_1 \circ X_3 = X_2 \circ X_4 = J$$

$$(GGS2) \quad {}^t X_1 X_3 = {}^t X_2 X_4 = N \cdot I$$

(GGS3) (star triangle relation) 任意の $\alpha, \beta \in X$ に対して,

N次の縦ベクトル $Y_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^N$ を

$$(Y_{\alpha\beta})_{\mu} := (X_1)_{\mu\alpha} (X_4)_{\mu\beta}, \quad (Z_{\alpha\beta})_{\mu} := (X_4)_{\alpha\mu} (X_1)_{\mu\beta}$$

で定めると,

$$X_+ Y_{\alpha\beta} = N^{1/2} (X_-)_{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta}, \quad X_+ Z_{\alpha\beta} = N^{1/2} (X_-)_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta}$$

□

Note. この定義は一見複雑なように見えるが、実際には、なかなか使い勝手が良い。あとで § 4~ § 6 に述べるように、generalized² spin model から直ちに、vertex model や IRF-model, それに Braid群の表現などが得られる。

□

§ 2. Spin Model の構成

L : a lattice

\langle, \rangle : a \mathbb{Q} -valued bilinear form on L

として,

$$M := L^* \cap L = \{ \alpha \in L ; \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for all } \beta \in L \}$$

$$X := L/M \quad (\text{abelian group})$$

$$N := |X|$$

とおく。次の条件(*)が L, \langle, \rangle についての唯一の要請である:

$$(*) \quad \langle \alpha, \alpha \rangle \in 2\mathbb{Z} \quad \text{for all } \alpha \in M$$

Note. 条件(*)は、大きな制限ではない。もしも (L, \langle, \rangle) がこの仮定を満たさない時には、たとえば内積 \langle, \rangle を $\langle, \rangle' := (1/2)\langle, \rangle$ で置き換えれば良い。

□

次に

$$\varepsilon : X \longrightarrow \{\pm 1\} \quad \text{a group homomorphism}$$

を (任意に) 与えて,

$$t_\alpha := \varepsilon(\alpha) e^{\pi i \langle \alpha, \alpha \rangle}$$

$$D := \sum_{\alpha \in X} t_\alpha$$

とおく。このとき, 我々の主張は次の2つの定理である:

定理 2.1. $\gamma \in X$ を任意に fix して, X_\pm^γ を次のように定める:

$$(X_+^\gamma)_{\alpha\beta} := \left(\frac{\sqrt{N}}{Dt_\gamma} \right)^{1/2} \cdot t_{\gamma+\alpha-\beta}$$

$$(X_-^\gamma)_{\alpha\beta} := \left(\frac{\sqrt{N}}{Dt_\gamma} \right)^{-1/2} \cdot t_{\gamma+\alpha-\beta}^{-1}$$

このとき,

1) X_\pm^γ は generalized spin model である。

2) これが symmetric $\iff 2\gamma \in M$ □

定理 2.2. $\xi, \eta \in X$ と $A, B \in \mathbb{C}$ を $AB = \frac{\sqrt{N}}{Dt_\xi}$ となるように与えて, X_i ($i=1\sim 4$) を次のように定める:

$$(X_1)_{\alpha\beta} := At_{\xi+\alpha-\beta}, \quad (X_3)_{\alpha\beta} := A^{-1}t_{\xi+\alpha-\beta}^{-1}$$

$$(X_2)_{\alpha\beta} := Bt_{\eta+\alpha-\beta}, \quad (X_4)_{\alpha\beta} := B^{-1}t_{\eta+\alpha-\beta}^{-1}$$

このとき, X_i ($i=1\sim 4$) は generalized² spin model である。 □

証明の方針は次のようである。まず

$$S_{\alpha\beta} := N^{-1/2} e^{-2\pi i \langle \alpha, \beta \rangle}$$

とおけば, $S_{\alpha\beta}$ は次の性質を持つ:

Lemma A. 行列 $(S_{\alpha\beta})$ は unitary 行列である。

$$\text{Lemma B. 1) } S_{\alpha\beta} = N^{-1/2} \cdot \frac{t_\alpha t_\beta}{t_{\alpha+\beta}}$$

$$2) S_{\alpha,0} = N^{-1/2}$$

$$3) S_{\alpha+\alpha',\beta} = N^{1/2} S_{\alpha\beta} S_{\alpha',\beta}$$

$$4) \sum_{\beta \in X} S_{\alpha\beta} = N^{1/2} \delta_{\alpha,0}$$

$$\text{Lemma C. 1) } \sum_{\alpha \in X} t_\alpha S_{\alpha\beta} = DN^{-1/2} \cdot t_\beta^{-1}$$

$$2) \sum_{\alpha \in X} t_\alpha \overline{S_{\alpha\beta}} = DN^{-1/2} \cdot t_\beta^{-1}$$

$$3) \sum_{\alpha \in X} t_\alpha S_{\alpha+\beta,\gamma} = DS_{\beta\gamma} t_\gamma^{-1}$$

$$4) \sum_{\alpha \in X} t_{\alpha+\beta} \overline{S_{\alpha\gamma}} = D\overline{S_{\beta\gamma}} t_\gamma^{-1}$$

$$\text{Lemma D. } \sum_{\beta \in X} t_{\alpha+\beta} t_\beta^{-1} = N \cdot \delta_{\alpha,0}$$

Lemma E. 任意の $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in X$ について,

$$\sum_{\nu \in X} t_{\alpha+\nu} t_{\beta+\nu} t_{\gamma+\nu}^{-1} = D t_\lambda t_{\gamma-\beta+\lambda}^{-1} t_{\beta+\alpha-\lambda} t_{\alpha+\gamma-\lambda}^{-1}$$

Note. Lemma D より直ちに $|D| = N^{1/2}$ を得る。 □

§ 0. に書いたように, これらの Lemma の証明は, ほとんど自明であるか, または簡単な計算から直ちに従う。 Lemma D が (S2), (GS2), (GG2) を与え, Lemma E が star-triangle relation を与えて, 定理を得る。

§ 3. リー環の場合と Gauss和の公式

§ 0 に述べたように，この節での話が我々の構成法の原型であり，出発点であった。§ 2 で行ったように非常に一般的な setup の下での構成方法から見れば，この節で述べる事柄は単に lattice (L, \langle, \rangle) の具体的な例にすぎないが，リー環の場合には，modular変換を使うことにより，§ 2 の $D := \sum_{\alpha \in X} t_{\alpha}$ を求めることが出来ることに注意したい。すなわち，リー環の modular変換は Gauss和の公式を導くのである。

まず最初に，リー環固有の言葉（方言）や記号を準備する。 \mathfrak{g} を，有限次元単純リー環 ($/\mathbb{C}$) として，root-lattice, weight-lattice などを次のような記号で表す：

$$\begin{aligned} \Delta_+ &: \text{正の roots 全体のなす集合} \\ \mathfrak{h} &:= \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{C}\alpha &&: \text{Cartan subalgebra of } \mathfrak{g} \\ \ell &:= \text{rank}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{h} \\ (\mid) &: \mathfrak{g}\text{-invariant bilinear form on } \mathfrak{g} \\ &\text{s.t. } (\alpha \mid \alpha) = 2 && \text{if } \alpha \text{ is a long root} \\ k^\vee &:= \frac{(\alpha \mid \alpha)}{(\beta \mid \beta)} && (\text{但し } \alpha = \text{a long root, } \beta = \text{a short root}) \\ g &: \text{dual Coxeter number} \\ Q &:= \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{Z}\alpha &&: \text{root lattice} \\ Q^\vee &:= \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{Z}\alpha^\vee &&: \text{co-root lattice} \quad \left(\text{但し } \alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha \mid \alpha)} \right) \\ P &:= (Q^\vee)^* = \{ \lambda \in \mathfrak{h} ; (\lambda \mid \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \text{ for all } \alpha \in \Delta_+ \} \\ P^\vee &:= Q^* = \{ \lambda \in \mathfrak{h} ; (\lambda \mid \alpha) \in \mathbb{Z} \text{ for all } \alpha \in \Delta_+ \} \\ \rho &:= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha \in P \end{aligned}$$

とおく。そして次のような L, \langle, \rangle を考える：

Case I) $L := P$, $\langle , \rangle := u^{-1}(\cdot | \cdot)$; (但し $u \in \mathbb{N}$)

このとき,

$$M = uQ^\vee , \quad X = P/uQ^\vee , \quad N = u^\ell |P/Q^\vee| .$$

Case II) $L := P^\vee$, $\langle , \rangle := (g/u) \cdot (\cdot | \cdot)$, $\varepsilon(\lambda) := e^{2\pi i(\rho|\lambda)}$

但し $u \in \mathbb{N}$ st. $\gcd(u, g) = \gcd(u, k^\vee) = 1$;

このとき,

$$M = uP^\vee , \quad X = P^\vee/uP^\vee , \quad N = u^\ell .$$

Case III) $\mathfrak{g} = \text{simply-laced}$ (ie. $k^\vee = 1$) で,

$L := P$, $\langle , \rangle := ((g+1)/u) \cdot (\cdot | \cdot)$, $\varepsilon(\lambda) := e^{2\pi i(\rho|\lambda)}$

但し $u \in \mathbb{N}$ st. $\gcd(u, g+1) = 1$;

このとき,

$$M = uQ , \quad X = P/uQ , \quad N = u^\ell |J|$$

ここで, $|J|$ は次の通り :

\mathfrak{g} :	A_ℓ	D_ℓ	E_6	E_7	E_8
$ J $:	$\ell+1$	4	3	2	1

定理 3.1. Case I のとき,

$$\sum_{\lambda \in P/uQ} e^{\pi i |\lambda|^2 / u} = N^{1/2} e^{\pi i \ell} \quad \square$$

Case II or Case III のときには,

$$s := \begin{cases} g & (\text{Case II のとき}) \\ g+1 & (\text{Case III のとき}) \end{cases}$$

として,

$$\left[\frac{u}{s} \right]_{\mathfrak{g}} := \text{signature of } \prod_{\alpha \in \Delta_+} \sin \frac{\pi u(\rho|\alpha)}{s}$$

とおく。 $\left[\frac{u}{s}\right]_{\mathfrak{g}}$ は、平方剰余記号 (Jacobi-symbol) の拡張である。特に、Case II で、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$ のときには、

$$\left[\frac{u}{g}\right]_{\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})} = \left[\frac{u}{\ell+1}\right] = \text{Jacobi symbol}$$

となる (cf. Kac[6]).

定理 3.2. Case II または Case III のとき、

$$\sum_{\lambda \in X} e^{2\pi i \{s|\lambda|^2 / (2u) + (\rho|\lambda)\}} = N^{1/2} \left[\frac{u}{s}\right]_{\mathfrak{g}} e^{\pi i \{(s-ug)/(4s)\} \dim(\mathfrak{g})}$$

□

定理 3.1 の証明には、レベル u の Θ -関数の modular変換を用いる。定理 3.2 はレベル m ($:=s/u-g$) の admissible表現の指標の modular変換を用いる。いずれの定理も、 $(TS^{-1})^3 = I$ なる関係式を modular変換の行列にあてはめて計算することによって、直ちに得られる。

(ここで、 $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。)

§ 4. Braid群の表現

以下の節では、 $(X; X_i (i=1 \sim 4))$ は § 2 で得られた generalized² spin model であるとし、 V を X の \mathbb{C} -linear span とする。

$$T_{\xi} \in \text{End}(V), \quad \Delta_{\eta} \in \text{End}(V \otimes V)$$

を、次の式で定義する：

$$T_{\xi}(\alpha) := N^{-1/2} \sum_{\gamma \in X} (X_1)_{\alpha\gamma} \gamma$$

$$\Delta_{\eta}(\alpha \otimes \beta) := (X_4)_{\alpha\beta} \alpha \otimes \beta$$

Lemma 4.1. $T_{\xi}^{(1)}, T_{\xi}^{(2)} \in \text{End}(V \otimes V)$ を $T_{\xi}^{(1)} := T_{\xi} \otimes I, \quad T_{\xi}^{(2)} := I \otimes T_{\xi}$

により定めると,

$$T_{\xi}^{(i)} \circ \Delta_{\eta} \circ T_{\xi}^{(i)} = \Delta_{\eta} \circ T_{\xi}^{(i)} \circ \Delta_{\eta} \quad (I=1,2) \quad \square$$

この証明に使うのは, generalized² spin model の条件の内の (GGS3) だけである。

Lemma 4.1 から直ちに, Braid群 $B_{2k} = \langle \sigma_i \mid 1 \leq i \leq 2k-1 \rangle$ の $\otimes^k V$ 上での表現が得られる:

定理 4.2. $\xi_1, \dots, \xi_k; \eta_1, \dots, \eta_{k-1} \in X$ を任意に fix して,

$$\pi(\sigma_{2i-1}) := I_1 \otimes \dots \otimes I_{i-1} \otimes T_{\xi_i} \otimes I_{i+1} \otimes \dots \otimes I_k \quad (1 \leq i \leq k)$$

$$\pi(\sigma_{2i}) := I_1 \otimes \dots \otimes I_{i-1} \otimes \Delta_{\eta_i} \otimes I_{i+2} \otimes \dots \otimes I_k \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

とおくと, これは Braid群 B_{2k} の表現である。 \square

§ 5. Vertex Model と R-Matrix

ここでは Jones[5] の定義を簡素化して, 次のような vertex model を考える:

定義: \mathbb{C} に値を持つ函数 $w_{\pm}(a, b \mid x, y)$ が vertex model であるとは, 次の条件を満たす時に云う:

$$(V1) \quad \sum_{a', b' \in X} w_+(a, a' \mid b, b') w_-(b', b'' \mid a', a'') = \delta_{a, a'} \delta_{b, b''}$$

$$(V2) \quad \sum_{a', b' \in X} w_+(a, a' \mid b', b'') w_-(b, b' \mid a', a'') = \delta_{a, a'} \delta_{b, b''}$$

$$(V3) \quad \sum_{a', b', c' \in X} w_+(a, a' \mid b, b') w_+(a', a'' \mid c, c') w_+(b', b'' \mid c', c'')$$

$$= \sum_{a', b', c' \in X} w_+(a, a' \mid c', c'') w_+(b, b' \mid c, c') w_+(a', a'' \mid b', b'')$$

\square

定理 5.1. $(X; X_i (i=1\sim 4))$ を 定理 2.2 で得られた generalized² spin model とし, V を X の \mathbb{C} -linear span とする。このとき,

$$w_+(a, b|x, y) := N^{-1/2} \delta_{a+b, x+y} ({}^t X_1)_{ay} (X_4)_{by}$$

$$w_-(a, b|x, y) := N^{-1/2} \delta_{a+b, x+y} ({}^t X_2)_{ax} (X_3)_{ay}$$

とおけば, w_{\pm} は vertex model である。 □

この定理と, 次の定理とを組み合わせることによって, generalized² spin model $(X; X_i (i=1\sim 4))$ から, Braid群 B_k の表現が得られる。これは前節で構成した表現とは別の表現である。

定理 5.2. (Jones[5]) $w_{\pm}(a, b|x, y)$ が vertex model のとき, $R, R^{\vee} \in \text{End}(V \otimes V)$ を

$$R(a \otimes b) := \sum_{\alpha', \beta' \in X^+} w_+(a, \alpha' | b, \beta') \cdot a' \otimes b'$$

$$R^{\vee}(a \otimes b) := R(b \otimes a)$$

で定めると, $\text{End}(V \otimes V)$ において, 次の 1) 2) が成り立つ:

$$1) \quad R_{12}^{\circ} R_{13}^{\circ} R_{23} = R_{23}^{\circ} R_{13}^{\circ} R_{12}$$

$$2) \quad R_{12}^{\vee} R_{23}^{\vee} R_{12}^{\vee} = R_{23}^{\vee} R_{12}^{\vee} R_{23}^{\vee}$$

そこで

$$3) \quad \pi(\sigma_i) := I_1 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_{i-1} \otimes R_{i, i+1}^{\vee} \otimes I_{i+2} \otimes \cdots \otimes I_k \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

は, Braid群 B_k の $\otimes^k V$ 上での表現である。 □

§ 6. IRF-model

Jones[5]に従って, IRF-model を次のように定義する:

定義: \mathbb{C} に値を持つ関数 $w_{\pm}(a, b, x, y)$ が次の条件を満たすとき,

$(X; w_{\pm})$ を IRF-model という:

$$(I0) \quad \sum_{x \in X} w_{\pm}(a, b, a, x) = 1$$

$$(I1) \quad \sum_{x \in X} w_{+}(a, b, x, d) w_{-}(x, b, e, d) = \delta_{a, e}$$

$$(I2) \quad \sum_{x \in X} w_{+}(a, b, c, x) w_{-}(c, e, a, x) = \delta_{b, e}$$

$$(I3) \quad \sum_{x \in X} w_{+}(a, b, x, f) w_{+}(b, c, d, x) w_{+}(x, d, e, f) \\ = \sum_{x \in X} w_{+}(b, c, x, a) w_{+}(a, x, e, f) w_{+}(x, c, d, e)$$

□

定理 6.1. $(X; X_i (i=1 \sim 4))$ を定理 2.2 で得られた generalized² spin model とする。ただし, η は $2\eta \in M$ となるように選んでおく。このとき

$$w_{+}(a, b, c, d) := B^2 D^2 N^{-3/2} \cdot ({}^t X_1)_{ac} (X_4)_{bd} \\ = DN^{-1} \cdot t_{\xi}^{-1} t_{\xi+c-a}^{-1} t_{\eta+b-d}^{-1} \\ w_{-}(a, b, c, d) := B^{-2} D^{-2} N^{1/2} \cdot ({}^t X_3)_{ac} (X_2)_{bd} \\ = \bar{D}N^{-1} \cdot t_{\xi} t_{\xi+a-c}^{-1} t_{\eta+b-d}^{-1}$$

とおけば, w_{\pm} は IRF-model である。 □

R e f e r e n c e s

- [1] 坂内英一: 代数的組合せ論～アソシエーションスキームの最近の話題
「数学」, Vol.45 No.1 (1993年1月号), 55-75.
- [2] E.Bannai & E.Bannai: Spin models on finite cyclic groups,
preprint.

- [3] E.Bannai & E.Bannai: Generalized generalized spin models, preprint.
- [4] E.Bannai & E.Bannai: Generalized spin models and association schemes, preprint.
- [5] V.F.Jones: On knot invariants related to some statistical mechanical models, *pacific J. Math.*, 137(1989), 311-334.
- [6] V.G.Kac: Simple Lie groups and the Legendre symbol, in *Lecture Notes in Math.* 848, Springer-Verlag 1981, 110-124.
- [7] V.G.Kac & M.Wakimoto: Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 85 (1988), 4956-4960.
- [8] V.G.Kac & M.Wakimoto: Classification of modular invariant representations of affine algebras, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, *Adv. Ser. in Math. Phys.* 7, World Scientific 1989, 138-177.
- [9] A.Munemasa & Y.Watatani: Generalized spin models, preprint.