数理解析研究所講究録
第846巻 1993年 60-71

Cyclic group association scheme に付随した Spin model について

九大理 坂内悦子 (Etsuko Bannai)

§1. 序

いわゆる association scheme の modular invariance property を使って spin model の例がいくつか作られた。この modular invariance という性質と spin model の関係についてはさらに調べられて、逆に spin model が association scheme の Bose-Mesner algebra の中につくれるならば、さらにある条件を仮定してやるとある種の modular invariance property が成立つことがわかった(詳しくは§2の定理4参照)。ここでは定理4にもとづいて Cyclic group association scheme $\mathfrak{X}=(G_n, \{R_i\}_{0\le i\le n-1})$ 及びその subscheme $\tilde{\mathfrak{X}}=(G_n,\{\tilde{R}_i\}_{0\le i\le[\frac{n}{2}]})$ (ここで $\tilde{R}_i=R_i\cup R_{i'}$, $i=0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]$) についてそれ等の Bose-Mesner algebra の中にある、定理3の仮定をみたしている様な spin model をすべて決定した。

定義 1. Xを有限集合、ω_+ 及び ω_- を $X \times X$ 上で定義された複素数値関数とする. この時 任意のα、β、$\gamma \in X$ に対して次の条件(1)、(2) 及び (3)が成立つならば (X, ω_+, ω_-)を generalized (two-weight) spin model of Jones type と呼ぶ.

(1) $$\omega_+(\alpha,\beta)\,\omega_-(\beta,\alpha) = 1$$

(2) $$\sum_{x \in X} \omega_+(\alpha,x)\,\omega_-(x,\beta) = n\,\delta_{\alpha,\beta}$$

(3) (star triangle relation)
$$\sum_{x \in X} \omega_+(\alpha,x)\,\omega_+(x,\beta)\,\omega_-(x,\gamma) = D\,\omega_+(\alpha,\beta)\,\omega_-(\alpha,\gamma)\,\omega_-(\beta,\gamma)$$

ただし $D^2 = n = |X|$ である.

この定義は V. F. R. Jones による spin model の定義([7])の symmetric condition を落すことによって、川越－宗政－綿谷が一般化したものである([8]).

定理 2. (坂内－坂内－Jaeger ([2],[5])
(X, ω_+, ω_-) を Jones type の two-weight spin model とする. 集合Xによって index をつけられた行列を $W_+ = (\omega_+(\alpha,\beta))_{\alpha\in X,\beta\in X}$ 及び $W_- = (\omega_-(\alpha,\beta))_{\alpha\in X,\beta\in X}$ で定義する. $\mathfrak{A}$ を W_+, ${}^tW_+$ 及びJによって$\mathbb{C}$上生成される algebra とする. この時、もし$\mathfrak{A}$が行列のアダマール積(成

分ごとの積）に関して閉じているならば、$\mathfrak{A}$はある commutative self dual association scheme の Bose-Mesner algebra である。ここで J はすべての成分が 1 である行列を示す。
（注．この定理 2 は、はじめ F. Jaeger によって対称な spin model の場合に証明された（[5]）．）

いくつかの Jones type の two-weight spin model の例が（次に定義する modular invariance 又は quasi modular invariance property をみたす）self dual な association scheme の Bose-Mesner algebra の中に作られた（[1], [3]）．（もち論この様な性質をみたしていても spin model が存在しない例はあるが．）

<u>定義 3</u>．$\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ を commutative self dual association scheme とする．次の条件 (1)（又は (2)）をみたす対角行列 T が存在するならば $\mathfrak{X}$ は modular invariance（又は quasi modular invariance）property をみたすという．

(1) $(PT)^3=\sqrt{|X|}\,P^2$

(2) $(PT)^3=|X|^{\frac{3}{2}}I$

ここで P は $\mathfrak{X}$ の第一固有行列（又は指標表）である．
（注．定義 3 においてもし $\mathfrak{X}$ が symmetric であれば、条件

(1)と(2)は一致している.)

この逆に関しては次の定理がある([5])

定理 4. (Bannai-Bannai-Jaeger) $\mathfrak{X}=(X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ を commutative association scheme, A_i を関係 R_i に関する adjacency matrix, $\mathfrak{A}=\langle A_0, A_1, \cdots, A_d\rangle$ を $\mathfrak{X}$ の Bose-Mesner algebra, P と Q をそれぞれその第一及び第二固有行列とする. 今 $W_+=\sum_{i=0}^{d} t_i A_i$, $W_-=\sum_{i=0}^{d} t_{i'}^{-1} A_i$ $(t_i\neq 0,\ i=0,1,\cdots,d)$ に対して (X, W_+, W_-) が Jones type の two-weight spin model でありかつ W_+, ${}^tW_+$, J が $\mathbb{C}$ 上 $\mathfrak{A}$ を生成しているならば次の互いに同値な条件が成立つ.

(1) $PTQTPT' = t_0 D^3 I$

(2) $PTQTQT = t_0 D P^2$

(3) $(QT)^3 = t_0 D^3 I$

(4) $(PT^{-1})^3 = t_0^{-1} D^3 I$.

ここで $T=\mathrm{diag}(t_0, t_1, \cdots, t_d)$, $T'=\mathrm{diag}(t_0, t_{1'}, \cdots, t_{d'})$, $A_{i'}={}^tA_i$, $i=0,1,\cdots,d$, である.

(注. 定理2により $\mathfrak{X}$ は self dual であるから上の条件(1), (2), (3)及び(4)は互いに同値である. 一般の association scheme についてはこれ等は同値であるとは限らない.)

従って symmetric でない場合にはどれをもって modular

invariance property を定義するか議論の余地がある．又 self dual でない association scheme に関しても modular invariance という性質が定義できるだろうかという問も自然に生れてくる．今のところ (1)、(2)、(3) 又は (4) をみたすような対角行列 T が存在するような self dual でない association scheme の例はみつかっていない．

§2. Cyclic group association schemes 及びそのある種の sub-schemes

G_n を位数 n の cyclic group，g をその生成元とする．$G_n\times G_n$ の部分集合を $R_i=\{(x,y)\in G_n\times G_n \mid yx^{-1}=g^i\}$，$i=0,1,\cdots,n-1$，で定義する．$\mathfrak{X}=(G_n,\{R_i\}_{0\le i\le n-1})$ は self dual な commutative association scheme である（[4]）．次に $\tilde{R}_0=R_0$，$\tilde{R}_i=R_i\cup R_{i'}$，$i=0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]$ （ここで $R_{i'}=\{(x,y)\mid (y,x)\in R_i\}$）とすると $\tilde{\mathfrak{X}}=(G_n,\{\tilde{R}_i\}_{0\le i\le[\frac{n}{2}]})$ は symmetric self dual commutative association scheme（$\mathfrak{X}$ の sub-scheme）である．関係 R_i 及び $\tilde{R}_i$ に対する adjacency 行列を A_i，$i=0,1,\cdots,n-1$ 及び $\tilde{A}_i$，$i=0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]$ とする．n が奇数ならば $\tilde{A}_0=A_0$，$\tilde{A}_i=A_i+A_{i'}=A_i+{}^tA_i$，$i=1,\cdots,[\frac{n}{2}]$ である．n が

偶数なら $\hat{A}_0 = A_0$, $\hat{A}_{\frac{n}{2}} = A_{\frac{n}{2}}$, $\hat{A}_i = A_i + A_{i'}$, $i=1,\cdots,\frac{n}{2}-1$ である．$\mathfrak{X}$ 及び $\hat{\mathfrak{X}}$ の Bose-Mesner algebra をそれぞれ $\mathfrak{A} = \langle A_0, A_1, \cdots, A_{n-1} \rangle$ 及び $\hat{\mathfrak{A}} = \langle \hat{A}_0, \hat{A}_1, \cdots, \hat{A}_{[\frac{n}{2}]} \rangle$ とする．このとき $\mathfrak{A}$ 及び $\hat{\mathfrak{A}}$ の primitive idempotents からなる基底 $\{E_0, E_1, \cdots, E_{n-1}\}$ 及び $\{\hat{E}_0, \hat{E}_1, \cdots, \hat{E}_{[\frac{n}{2}]}\}$ をそれぞれ適当にとることによって第一固有行列をそれぞれ

$$P = \left(P_j(i)\right)_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le n-1}} \quad \text{及び} \quad \hat{P} = \left(\hat{P}_j(i)\right)_{\substack{0 \le i \le [\frac{n}{2}] \\ 0 \le j \le [\frac{n}{2}]}}$$

とすることができる．ここで $\hat{P}_j(i)$ は以下に定義される．

n が奇数の場合

$$\hat{P}_j(i) = P_j(i) + P_{j'}(i) = \zeta^{ij} + \zeta^{-ij}, \quad 1 \le j \le \frac{n-1}{2},$$
$$0 \le i \le \frac{n-1}{2} \quad ; \quad \hat{P}_0(i) = P_0(i) = 1, \quad 0 \le i \le \frac{n-1}{2}$$

n が偶数の場合

$$\hat{P}_j(i) = P_j(i) + P_{j'}(i) = \zeta^{ij} + \zeta^{-ij}, \quad 1 \le j \le \frac{n}{2}-1, \quad 0 \le i \le \frac{n}{2} \ ;$$
$$\hat{P}_j(i) = P_j(i) = \zeta^{ij}, \quad j=0 \text{ 又は } \frac{n}{2}, \quad 0 \le i \le \frac{n}{2}.$$

（ここで ζ は 1 の原始 n 乗根である.）

この時次の定理5, 6 が成立つ．(定理5については [1] 参照.)

<u>定理 5.</u> 上の記号のもとで $\mathfrak{X}$ が対角行列 $T = diag(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})$ に関して modular invariance property $PTQTPT' = t_0 D^3 I$ をみたすのは次の条件が成立つ

時に限る． ここで $D^2=n=|G_n|$ である．

(1) n が奇数の時

$$t_j=\zeta^{-\frac{j(j+2s-1)}{2}}t_0\quad ,j=1,2,\cdots,n-1,$$

$$t_0^2=D\zeta^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)^3(2s-1)^2}\Big/\sum_{l=0}^{n-1}\zeta^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)l^2},$$

$s\in\{0,1,\cdots,n-1\}$.

(2) n が偶数の時

$$t_j=\eta^{j(j+2s)}t_0\quad ,j=0,1,\cdots,n-1,$$

$$t_0^2=D\eta^{s^2}\Big/\sum_{l=0}^{n-1}\eta^{l^2}\quad ,\quad \eta^2=\zeta^{-1};$$

$s\in\{0,1,\cdots\cdots,n-1\}$.

<u>定理 6</u>．上の記号のもとで $\tilde{\mathcal{C}}$ が対角行列 $\tilde{T}=\mathrm{diag}(\tilde{t}_0,\tilde{t}_1,\cdots,\tilde{t}_{[\frac{n}{2}]})$ に関して modular invariance property $(\tilde{P}\tilde{T})^3=\tilde{t}_0D^3I$ をみたすのは次の条件が成立つ時に限る．ここで $D^2=n=|G_n|$ である．

$$\tilde{t}_j=\eta^{j^2}\tilde{t}_0\quad ,j=0,1,\cdots,[\tfrac{n}{2}],$$

$$\tilde{t}_0^2=D\Big/\sum_{l=0}^{n-1}\eta^{l^2}\quad ,\quad \eta^2=\zeta \text{ 又は } \zeta^{-1}$$

<u>定理 7.</u> T 及び $\hat{T}$ をそれぞれ定理5及び定理6で与えられた対角行列 $\mathrm{diag}(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})$, $\mathrm{diag}(\hat{t}_0, \hat{t}_1, \cdots, \hat{t}_{[\frac{n}{2}]})$ とする. $\hat{\mathfrak{A}}$ 及び $\mathfrak{A}$ の中に ($\hat{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ である) それぞれ行列 $W_+ = \sum_{i=0}^{n-1} t_i A_i$, $W_- = \sum_{i=0}^{n-1} t_i^{-1} A_i$ 及び $\hat{W}_+ = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \hat{t}_i \hat{A}_i$, $\hat{W}_- = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \hat{t}_i^{-1} \hat{A}_i$ をとってくる. この時 (G_n, W_+, W_-) 及び $(G_n, \hat{W}_+, \hat{W}_-)$ はそれぞれ loop variable が D の Jones type の two-weight spin model である. さらに (G_n, W_+, W_-) が symmetric であるのは n が奇数であれば定理5(1)における s が $2s-1 \equiv 0 \pmod{n}$ n が偶数であれば定理5(2)における s が $2s \equiv 0 \pmod{n}$ をみたす時に限る. $(G_n, \hat{W}_+, \hat{W}_-)$ は symmetric である.

さて, 次に $\mathfrak{X}$ 及び $\hat{\mathfrak{X}}$ に self dual な構造を与える基底のならべ方がどれぐらいあるかを調べてみる. これについては次の命題8, 9がある.

<u>命題 8.</u> σ を集合 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ の上の置換で $\sigma(0) = 0$ をみたすものとする. この時 $\mathfrak{A}$ の基底の組 $\{A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}\}$ と $\{E_0, E_{\sigma(1)}, \cdots, E_{\sigma(n-1)}\}$ が $\mathfrak{X}$ の self dual な構

造を与えるのは $\sigma(i) \equiv \pm\sigma(1)i \pmod{n}$ かつ $\sigma(1)$ と n が互いに素である場合に限る。この時その第一固有行列は $P^{\sigma} = (\zeta^{\sigma(1)ij})$ と表わせる。

命題9. $\hat{\sigma}$ を集合 $\{0, 1, \cdots, [\frac{n}{2}]\}$ 上の置換で $\hat{\sigma}(0) = 0$ をみたすものとする。この時 $\hat{\mathfrak{A}}$ の基底の組 $\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \cdots, \hat{A}_{[\frac{n}{2}]}\}$ と $\{\hat{E}_0, \hat{E}_1, \cdots, \hat{E}_{[\frac{n}{2}]}\}$ が $\hat{\mathfrak{X}}$ の self dual な構造を与えるのは $\hat{\sigma}(1)$ が n と互いに素であり次の条件をみたす場合に限る。

(1) n が奇数の時

$$\hat{\sigma}(i) \equiv \pm\hat{\sigma}(1)i \pmod{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}$$

(2) n が偶数の時

$$\hat{\sigma}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

$$\hat{\sigma}(i) \equiv \pm\hat{\sigma}(1)i \pmod{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1$$

命題8, 9 はそれぞれ $\mathfrak{X}$ 又は $\hat{\mathfrak{X}}$ の self dual な構造をすべて考えるためには1の原始 n 乗根 ζ をすべて考えれば十分であることを示している。

また、簡単な考察から（すなわち定理5及び6で与えられた複素数 $t_0, \cdots, t_{n-1}$ 及び $\hat{t}_0, \cdots, \hat{t}_{[\frac{n}{2}]}$ を観察することにより）次の命題が得られる。

命題 10 (1)定理7で与えた spin model (G_n, W_+, W_-) のうち行列 W_+, ${}^tW_+$, J が $\mathfrak{A}$ を生成するものは n が奇数であれば定理5(1) における s が $(2s-1, n)=1$, n が偶数であれば定理5(2) における s が $(2s, n)=1$ をみたしている場合に限る.

(2)定理7で与えた symmetric spin model $(G_n, \widetilde{W}_+, \widehat{W}_-)$ を与える行列 $\widetilde{W}_+$ 及び J は $\mathfrak{A}$ を生成している.

以上の結果をすべてまとめると次の定理が得られる.

定理11. (1) Cyclic group association scheme $\mathfrak{X}$ に付随した spin model (G_n, W_+, W_-) に対して W_+, ${}^tW_+$, J が $\mathfrak{X}$ の Bose-Mesner algebra を生成するのは次の場合に限る.

n が奇数の時: $W_+ = \sum_{j=0}^{n-1} t_j A_j$, $W_- = \sum_{j=0}^{n-1} t_j^{-1} A_j$

$$t_j = \zeta^{-\frac{j(j+2s-1)}{2}} t_0, \quad j=1,2,\cdots,n-1,$$

$$t_0^2 = D\zeta^{-(\frac{n+1}{2})^3(2s-1)^2} \Big/ \sum_{\ell=0}^{n-1} \zeta^{-(\frac{n+1}{2})\ell^2},$$

$(2s-1, n)=1$.

n が偶数の時: $W_+ = \sum_{j=0}^{n-1} t_j A_j$, $W_- = \sum_{j=0}^{n-1} t_j^{-1} A_j$

$$t_j = \eta^{j(j+2s)} t_0, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1,$$
$$t_0^2 = D\eta^{s^2} / \sum_{\ell=0}^{n-1} \eta^{\ell^2}, \quad \eta^2 = \zeta^{-1}, \quad (2s, n) = 1.$$

(2) $\tilde{\mathfrak{X}} = (G_n, \{\tilde{R}_i\}_{0 \le i \le [\frac{n}{2}]})$ に付随した spin model $(G_n, \tilde{W}_+, \tilde{W}_-)$ に対して $\tilde{W}_+$ と J が $\tilde{\mathfrak{A}}$ を生成するのは次の場合に限る.

$$\tilde{W}_+ = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \tilde{t}_j \tilde{A}_j, \quad \tilde{W}_- = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \tilde{t}_j^{-1} \tilde{A}_j,$$
$$\tilde{t}_j = \eta^{j^2} \tilde{t}_0, \quad j = 1, \cdots, [\tfrac{n}{2}],$$
$$\tilde{t}_0^2 = D / \sum_{\ell=0}^{n-1} \eta^{\ell^2}, \quad \eta^2 = \zeta \text{ 又は } \zeta^{-1}.$$

文献

(1) E. Bannai and E. Bannai, Spin models on finite cyclic groups, preprint.

(2) E. Bannai and E. Bannai, Generalized spin models and association schemes, preprint.

(3) E. Bannai, E. Bannai, T. Ikuta and K. Kawagoe, Spin models constructed from the Hamming association schemes $H(d, q)$. 第10回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (1992).

(4). E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I: Association Schemes, Benjamin/Cummings, Melo Park CA, 1984.

(5). E. Bannai, E. Bannai and Jaeger, in preparation.

(6) F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, Geom. Dedicata 4 (1992), 23-52.

(7) V.F.R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pac. J. Math. 137 (1989), 311-334.

(8) K. Kawagoe, A. Munemasa and Y. Watatani, Generalized spin models, preprint.