数理解析研究所講究録
第 848 巻 1993 年 27-37

組合せ論に現れたある種の行列式と行列の記号的 LDU 分解

熊本大学 理学部　吉田 知行 (Tomoyuki YOSHIDA)

1. はじめに

この話は、論文 [5] を書いたときの苦労談です。最近伊藤豊治君 (北大数学) と一緒に、群作用を持つ t- デザインに関する Fisher 型の不等式を研究しました。かなり古めかしい話題ですが、有限群論や変換群論における最近のテクニックを使うと、また新しい見地が開けるかも知れないと思い、大学院生の伊藤君に考えてもらいました。伊藤君は一応の結果を出したのですが、仮定が強すぎるように思えたので、私も加わって、二人でこの問題に取り組みました。伊藤君がおもしろそうな事をやっているので、たまらず私が割り込んだ、というのが真相で、伊藤君には迷惑だったかも知れません。

$t=2$ の場合の経験 ([7]) から、ある有理数 Q が整数であることを証明すればよいことは分かっています。ところが簡単に思えた整数性の証明が一筋縄ではいかず、伊藤君と一緒に黒板を数式でいっぱいにして連日頭を悩ませることになりました。とりあえず小さな場合だけと、数式処理用ソフトを使って、$t=4,6,8$ での成立を確かめました。問題の有理数を、パラメタ $\lambda_i^j \in \mathbf{Z}$ を用いて書いてやるのですが、例えば $t=8$ の場合だと、何百もの項を持つ多変数の多項式となります。この多項式の表し方も、相当の自由度があるので、その正体がなかなか分かりませんでした。REDUCE を使って、小さい場合に調べてみると、それは特徴的な形をしたある行列の行列式でした。

そこで問題は、次の行列式の値を求めることに帰着されます:

$$\det\left[\binom{v-s-i+j}{v-k}\right]_{0\le i,j\le s}$$

計算機を用いて、t が 10 以下の場合にこの値が求められ、予想通りの値をとることが分かりました。

ところで一般の次数の行列式を求める強力な定跡があります。

$$\boxed{\text{行列式を求めるなら LDU 分解}}$$

$t\le 8$ の場合に、計算機で問題の行列の LDU 分解を求めて見ると、一般の場合の LDU 分解の予想が立ちます。ここから先もまだ二人がかりでてこずったのですが、何とか一般の場合の LDU 分解が証明できました。

これで Fisher 型の不等式が証明できた。10 年前ならともかく、今となっては結果はあまり役立たないかも知れないが、証明は我ながらエレガントだ。全く気持ちがよい。計算機を使った痕跡など完全に消し、証明を研きあげて論文を仕上げ、あとは投稿すればめでたしめでたし、となるはずだったのに・・・

2. ブロックデザイン

集合の対 $(X, \mathcal{B})$ が t-(v, k, λ) デザインであるとは、

$$|X| = v, \quad \mathcal{B} \subseteq \binom{X}{k}$$
$$|T| = t \Longrightarrow \sharp\{B \in \mathcal{B} \,|\, T \subseteq B\} = \lambda$$

であることをいう。普通、パラメタについて次を仮定する。

$$t \leq 2, \quad k > \lambda > 0, \quad v > k + t$$

$i \leq t$ のとき、X の任意の i- 点集合 $|I| = i$ に対し

$$\begin{aligned} \lambda_i &:= \sharp\{B \in \mathcal{B} \,|\, I \subseteq B\} \\ &= \lambda \binom{v-i}{k-i} \Big/ \binom{v-t}{k-t} \end{aligned}$$

である。これは I のとり方によらない。例えば、$\lambda_0 = |\mathcal{B}|$, $\lambda_t = \lambda$ である。

また $i + j \leq t$ のとき、$|I| = i, |J| = j, I \cap J = \emptyset$ なる任意の $I, J \subseteq X$ に対し、

$$\begin{aligned} \lambda_i^j &:= \sharp\{B \in \mathcal{B} \,|\, I \subseteq B, J \cap B = \emptyset\} \\ &= \lambda \binom{v-i-j}{k-i} \Big/ \binom{v-t}{k-t} \end{aligned}$$

である。これも I, J のとり方に依存しない。明らかに $\lambda_i^0 = \lambda_i$ である。

2- デザインを単にブロックデザインと呼ぶことがある。その場合、パラメタとして、

$$b := \lambda_0 = |\mathcal{B}|, r := \lambda_1, n := \lambda_1^1 = r - \lambda$$

をとり、2-(v, b, r, k, λ) デザインという。また n を位数と呼ぶ。この場合は、

$$vr = bk, (v-1)\lambda = (k-r)r \tag{1}$$

となっている。

Fisher の不等式 (1940) とは、2- デザイン $(X, \mathcal{B})$ に対する不等式

$$|X| \leq |\mathcal{B}|$$

のことである。

t- デザインについては次の Fisher 型不等式が知られている:

$$2s \leq t, k + s \leq v \Longrightarrow |\mathcal{B}| \geq \binom{v}{t}. \tag{2}$$

問題はこの不等式を、群作用をともなうブロックデザインに拡張することである。

3. 主定理

t-(v,k,λ) デザイン $(X,\mathcal{B})$ の自己同型とは、 X 上の置換 σ で、

$$B \in \mathcal{B} \Longrightarrow \sigma(B) \in \mathcal{B}$$

を満たすものである。

G を $(X,\mathcal{B})$ の自己同型からなる群、 R を (単位元を持つ) 可換環とする。このとき、 $\binom{X}{s}, \mathcal{B}$ 上の自由加群 $R\binom{X}{t}, R\mathcal{B}$ はともに RG- 加群である。さらに $2s \le t$ なら

$$\varphi : R\mathcal{B} \longrightarrow R\binom{X}{s} : B(\in \mathcal{B}) \longmapsto \sum_{\substack{T \in B \\ |T|=t}} T$$

は RG- **準同型** である。**線型写像** φ に対応する行列 N_s がいわゆる **結合行列** で、その (T,B) 成分は、 $T \subseteq B$ のとき 1、そうでないとき 0 である。

定理: $2s \le t$, $k+s \le v$ で、

$$\lambda_s^0, \lambda_s^1, \cdots, \lambda_s^s$$

が R の可逆元なら

$$\varphi : R\mathcal{B} \longrightarrow R\binom{X}{s}$$

は分裂する全射 RG- 準同型写像。

RG- 置換加群のなす加法的カテゴリーからの適当な加法的関手によって、定理の結論を飛ばしてやり、階数を比較すると Fisher 型の不等式が多数得られる。

例えば、 RG- 加群 V に対する $\mathrm{Ext}^n(-,V)$ を使うと、

$$\prod_{x \in X/G} H^n(G_x, V) \,\Bigg|\, \prod_{B \in \mathcal{B}/X} H^n(G_B, V) \tag{3}$$

これは Fisher 型不等式とも解釈できるが、有限群の構造論をやっていた私には、 0 次の移送定理のように思える。

特に $V = R = \mathbf{C}, \mathbf{n} = \mathbf{0}$ とすると、

$$\left|\binom{X}{s}/G\right| \le |B/G|$$

という Kreher [6] の定理が得られる。

また $p \not| \lambda_s^i$ $(i = 0,1,\cdots,s)$ なる素数 p と、 G の正規 p- 部分群 P に対し、

$$\left|\binom{X}{s}^P \Big/ G\right| \le \left|\mathcal{B}^P \big/ G\right|$$

が得られる。

この不等式はきわめて興味深いものであるが、厚見氏が既に発見していた ([1])。

さて上の定理を証明するには、$N_sN_s{}^t$ が (R を要素とする行列として) 逆行列を持つことを示せばよい。 ところで、

$$\det(N_sN_s{}^t) = \prod_{i=0}^{s}\left[\binom{k-s+i}{k-s}\lambda_s^i\right]^{\binom{v}{i}-\binom{v}{i-1}} \tag{4}$$

なので、定理の結論はこの行列式が R で逆元を持つことと同値である。

$t=2, s=1$ の場合をやってみる。

$$b=\lambda_0,\ r=\lambda_1^0=\lambda_1,\ n=\lambda_1^1=r-\lambda,\ \lambda=\lambda_2$$
$$vr=bk,\ (v-1)\lambda=(k-1)r,\ n=r-\lambda$$

なので簡単な計算から、

$$\boxed{\frac{nr}{k}=r^2-b\lambda\in\mathbf{Z}}$$

となる。したがって、$rn(=\lambda_1^0\lambda_1^1)$ が可逆なら、

$$\begin{aligned}\det(N_sN_s{}^t) &= \lambda_1^0\cdot\left[k\cdot(\lambda_1^1)\right]^{v-1}\\ &= r(kn)^{v-1}\end{aligned}$$

も可逆である。これから定理の成立が分かる。なお [7] 参照。

4. 行列式

$2s=t,\ k+s\le v$ としてよい。パラメタ t,v,k,λ を使うと、$\lambda_i,\ \lambda_s^i$ は次で与えられる:

$$\lambda_i=\lambda\binom{v-i}{k-i}\Big/\binom{v-t}{k-t}$$
$$\lambda_s^i=\lambda\binom{v-s-i}{k-s}\Big/\binom{v-t}{k-t}$$

前節で説明したように、行列式 $\det(N_sN_s{}^t)$ が R の可逆元であることを証明したい。行列式の形から、そのためには

$$\prod_{i=0}^{s}\binom{k-i}{s-i}\ \Big|\ \prod_{i=0}^{s}\lambda_s^i$$

であることを示せばよい。

前説の $t=2$ の場合から、次が成立すると期待するのは自然である。

$$\boxed{Q := \frac{\prod_{i=0}^{s} \lambda_s^i}{\prod_{i=0}^{s} \binom{k-i}{s-i}} \in \mathbf{Z}[\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_s].}$$

実際 $s=1, t=2$ の場合、$nr/k = r^2 - b\lambda$ なので、確かに

$$\frac{\lambda_1^0 \lambda_1^1}{k} = {\lambda_1}^2 - \lambda_0\lambda_2$$

となっている。

$s=2, t=4$ の場合に計算機でやってみる。

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \lambda \frac{v\cdot(v-1)\cdot(v-2)\cdot(v-3)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)} \\
\lambda_1 &= \lambda \frac{(v-1)\cdot(v-2)\cdot(v-3)}{(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)} \\
\lambda_2 &= \lambda \frac{(v-2)\cdot(v-3)}{(k-2)\cdot(k-3)} \\
\lambda_3 &= \lambda \frac{v-3}{k-3} \\
\lambda_4 &= \lambda
\end{aligned}$$

であり、さらに

$$\begin{aligned}
\lambda_2^0 &= \lambda(v-2)(v-3)/(k-2)(k-3) \\
\lambda_2^1 &= \lambda(v-3)(v-k)/(k-2)(k-3) \\
\lambda_2^2 &= \lambda(v-k)(v-k-1)/(k-2)(k-3)
\end{aligned}$$

である。これを使って問題の有理数 Q について、

$$\begin{aligned}
Q = \frac{\lambda_2^0\lambda_2^1\lambda_2^2}{(k-1)\binom{k}{2}} &= \frac{(v-2)(v-3)^2(v-k)^2(v-k-1)}{(k-3)^3(k-2)^3(k-1)^2 k/2} \\
&= \underline{\lambda_0{\lambda_3}^2 + {\lambda_1}^2\lambda_4 + {\lambda_2}^3 - \lambda_0\lambda_2\lambda_4 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \\
&\quad + a(\lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2{\lambda_3}^2 - 2\lambda_1{\lambda_3}^2 - 2{\lambda_2}^2\lambda_4) \\
&\quad + b(\lambda_0\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\lambda_3 + {\lambda_1}^2\lambda_2 + \lambda_1{\lambda_2}^2 \\
&\qquad - 2\lambda_0{\lambda_2}^2 - 2{\lambda_1}^2\lambda_3)
\end{aligned}$$

が得られる。ここで a, b は任意の整数である。$\lambda_0, \cdots, \lambda_s$ が代数的に独立でないので、このような自由度が表れるのである。

$t=6$ でも同様の計算をすると数百もの項を含んだ多項式が得られる。それを見ると問題の多項式は、$s+1$- 次の斉次多項式のようである。

アンダーラインをした部分の多項式は何だろう。

慣れた人なら見てすぐ分かるであろうが、私たちはその正体がつかめずかなり苦しんだ。この多項式を不変にする群の構造を考えたり、いろいろな試行錯誤のあげく、この多項式は

$$\det\begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_4 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

と表わせることが分かった。まったく簡単なところで手こずってしまったが、それにしてもこのようなきれいな行列がでてくるとは考えてもおらず、これを発見したときはまったく興奮した。

そこで問題は、一般の場合に、この行列式の値が本当に予想される値になるかという問題になる。つまり次の等式を確かめたい:

$$Q=\prod_{i=0}^{s}\frac{\lambda_s^i}{\binom{k-s+i}{k-s}}=\det\begin{bmatrix} \lambda_s & \lambda_{s-1} & \cdots & \lambda_1 & \lambda_0 \\ \lambda_{s+1} & \lambda_s & \ddots & \ddots & \lambda_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_s & \lambda_{s-1} \\ \lambda_{2s} & \cdots & \cdots & \lambda_{s+1} & \lambda_s \end{bmatrix} \tag{5}$$

等式の右辺は整数であるから、Q も整数となり、補題が証明される。

5. LDU 分解

問題の行列式の値は、$t=2, s=1$ の場合は正しい。実際

$$b:=\lambda_0=|\mathcal{B}|, r:=\lambda_1, n:=\lambda_1^1=r-\lambda$$

と置くと、良く知られた次の関係式がある。

$$vr=bk, (v-1)\lambda=(k-1)r$$

これより、簡単な計算で、

$$\frac{nr}{k}=r^2-b\lambda=\det\begin{bmatrix} r & b \\ \lambda & r \end{bmatrix}\in\mathbf{Z}.$$

となる。

$s=2,3,4,5$ は、REDUCE を使って確かめた。$s=2$ は手計算でも証明できた。一般の場合も正しいとの確信を持って、証明にとりかかった。そこで、定跡 — 行列式を求めるなら LDU- 分解 — が登場する。

問題の行列式は、

$$\det[\lambda_{s+i-j}] = \prod_{i=0}^{s} \frac{\lambda_s^i}{\binom{k-s+i}{k-s}}$$

である。この行列を考えるとき、$t = 2s$ としてよい。また λ はほとんど無視してかまわない。

$$\lambda_i = \lambda \binom{v-i}{k-i} \Big/ \binom{v-t}{k-t}$$
$$\lambda_s^j = \lambda \binom{v-s-j}{k-s} \Big/ \binom{v-t}{k-t}$$

なので、$t = 2s$ を止めたとき、$[\lambda_{s+i-j}]$ の要素は v と k の有理式である。

REDUCE でプログラムを組んで、$[\lambda_{s+i-j}]$ の LDU- 分解を求めた。$\lambda = 1$ とし、$s = 2, 3, 4$ とやって行った。パソコン上の REDUCE としては、このあたりが限度のようだ。その後、大型計算機やワークステーション上の REDUCE も使ってみたが、なぜか速度的にはパソコンとあまり違わなかった。

例えば、$s = 1$ の場合

$$\begin{pmatrix} r & b \\ \lambda & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda/r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & n/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$r = \lambda\frac{v-1}{k-1}, b = \lambda\frac{v(v-1)}{k(k-1)}, n = \lambda\frac{n-k}{k-1}$$

に注意しておく。

ともかく s の小さい場合に LDU- 分解が求められて、それから一般の場合の見当がついた。

証明の概略を述べよう。記号が面倒なので、共通因子を消しておく。

$$\det[\lambda_{s+i-j}]_{0\le i,j\le s} = \prod_{i=0}^{s} \lambda_s^i \Big/ \binom{k-s+i}{k-s}$$

を示すには、次の等式を証明すればよい。

$$\det\left[\binom{v-s-i+j}{v-k}\right]_{0\le i,j\le s} = \prod_{i=0}^{s} \binom{v-s-i}{k-s} \Big/ \binom{k-s+i}{k-s}$$

左辺の行列 A の LDU- 分解は次のようになりそうだ。

$$A := \left[\binom{v-s-i+j}{v-k}\right]_{0\le i,j\le s} = LDU$$

$$
\begin{aligned}
L_{ij} &:= \binom{i}{j}\binom{v-s-i}{v-k-j} \Big/ \binom{v-s-i}{v-k-i} \\
D_{ij} &:= \delta_{ij}\binom{v-s-i}{k-s} \Big/ \binom{k-s+i}{k-s} \\
U_{ij} &:= \binom{j}{i}\binom{v-s+j-i}{v-k-i} \Big/ \binom{v-s}{v-k-i}
\end{aligned}
$$

6. Pfaff-Saalschütz の定理

最後に証明しなければならないのは、等式 $LDU = A$、つまり

$$\sum_{j=0}^{s} L_{i,j} D_{j,j} U_{j,n} = A_{in}$$

である。行列の LDU- 分解に比べると、行列の積を求めるのは簡単だろう、と思ったが、また苦しむことになった。

LDU の (i,j)- 成分を計算すると、

$$\sum_{r=0}^{i} \frac{\binom{i}{r}\binom{v-s-i}{v-k-r}\binom{v-s-r}{k-s}\binom{j}{r}\binom{v-s+j-r}{v-k-r}}{\binom{v-s-i}{v-k-i}\binom{k-s+r}{k-s}\binom{v-s}{v-k-r}}$$

となる。これが $A_{i,j}$ であることを示したい。

このように 2 項係数や階乗がたくさん出てくる級数となると、まず一般超幾何級数を思い出す。一般超幾何級数とは、次の型の級数である:

$${}_pF_q(\alpha_1, \cdots, \alpha_p; \beta_1, \cdots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

ここで

$$(\alpha)_0 := 1, (\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

とした。この記号を用いると、証明したい式は次のようなものである:

$$\boxed{{}_3F_2(-\alpha, -\beta, -n; \gamma, \delta; 1) = \frac{(\alpha+\beta)_n(\beta+\gamma)_n}{(\gamma)_n(\alpha+\beta+\gamma)_n}}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\alpha = i, \beta = v-k, n = j, \gamma = k-s-i+1 \\
&\delta = 1-\alpha-\beta-\gamma-n
\end{aligned}
$$

とした。これはまさしく Pfaff–Saalschütz の定理 (1797, 1890) である。

かくて、定理は証明された。

7. おわりに

(1) 伊藤豊治君は、有限体上のデザインにまで我々の定理を拡張した。これは彼の論文 [4] に出るはずである。ここで Pfaff–Saalschütz の定理に相当するのは、F. H. Jackson (1910) によるその q-analogue である ([3])。

(2) 行列式を求めるのに、行列の LDU- 分解 (あるいは Bruhat 分解の類) を使うのは、なかなか良いアイデアである。行列によっては、驚くほどエレガントなやり方になり得る。ただし、等式 $A = LDU$ の証明が意外と面倒なことがある。実際、本論で述べた $[\lambda_{s+i-j}]$ の LDU 分解では、小さい次数の場合に計算機で見当を付け、一般の次数の場合には Pfaff–Saalschütz の定理を持ち出すことになった。

LDU 分解を用いて行列式を求める例を他にふたつ紹介しよう。

$$A(n) := \left[\binom{2i}{i-j+1}\right]_{1\le i,j\le n}$$

と置くと、2 項定理から容易に得られる等式

$$2\left(\binom{2k}{0} - \binom{2k}{1} + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{2k}{k-1}\right) + (-1)^k\binom{2k}{k} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

を用いて、次のような形の LDU 分解

$$A(n) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \ddots \\ & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

が得られ、したがって、

$$\det A(n) = 2$$

となる。

もうひとつ有名な例として、Van der Monde の行列

$$H := \left[j^i\right]_{0\le i,j\le n}$$

は次のような LDU 分解を持つ:

$$H = [S(i,j)]\,[i!\delta_{i,j}]\left[\binom{j}{i}\right]$$

ここで $S(i,j)$ は第 2 種 Stirling 数である。この分解は次の等式から明らかである。

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)i!\binom{x}{i}$$

したがって、

$$\det H = 0!1!2!\cdots n!$$

となる。

(3) 本論では、Pfaff–Saalschütz の定理がある種の行列の LDU 分解を意味することを述べた。他にも LDU 分解と関係する (有限) 級数の和があるかも知れない。

(4) ところで我々が知りたかったのは

$$\begin{bmatrix} \lambda_s & \lambda_{s-1} & \cdots & \lambda_0 \\ \lambda_{s+1} & \lambda_s & \cdots & \lambda_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{2s} & \lambda_{2s-1} & \cdots & \lambda_s \end{bmatrix} \quad \text{もしくは} \quad \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_s & \lambda_{s+1} & \cdots & \lambda_{2s} \end{bmatrix}$$

のような型の行列の行列式であった。この行列はいったい何だろう。ブロックデザインの理論でどのような役割を演じているのだろうか。今も分からないままである。

ところが、講演のあと、東京大学大型計算機センターの村尾裕一氏から、この行列には **Toeplitz** 行列 という名前が付いていて、符号理論では頻繁に用いられている、ということをご指摘いただいた。例えば R.E.Blahut の本 ([2]) では、行列式や逆行列についての話がのっているそうである。村尾氏にお礼申し上げます。

Toeplitz 行列という名前は、作用素環の理論における Toeplitz 作用素に由来するという。実際その作用素を行列で表せば、$[a_{j-i}]_{i,j\in\mathbf{Z}}$ のような行列になる。
もうひとつ Toeplitz 行列が登場するところがある。それは最小 2 乗法の意味での近似多項式の決定に出てくる Gauss の正規方程式である:

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m & s_{m+1} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & s_{2m-1} \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m-1} & s_{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{m-1} \\ t_m \end{bmatrix}.$$

ここで、

$$s_k := \sum_{j=0}^{m} {x_j}^k, \quad t_k := \sum_{j=0}^{m} {x_j}^k y_j$$

である。

References

[1] T. Atsumi, *On an inequality of Ray-Chaudhuri and Wilson for t-designs with group action*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math., Phys. and Chem.), **21** (1988), 33–38.

[2] R. E. BLAHUT, "*Fast Algorithms for Digital Signal Processing*", Addison-Wesley, 1985.

[3] G. GASPER/M. RAHMAN, "*Basic Hypergeometric Series*", Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge Univ. Press, 1990.

[4] T. ITOH, *Brauer functors and Fisher's inequality for t-designs over a finite field with group action*, Hokkaido Math. J.(to appear).

[5] T. ITOH/T. YOSHIDA, *Brauer functors and Fisher's inequality for t-designs with group action*, (preprint).

[6] D. L. KREHER, *An incidence algebra for t-designs with automorphisms*, J. Combinatorial Theory (A), **42** (1986), 239-251.

[7] T. YOSHIDA, *Fisher's inequality for block designs with finite group action*, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo Sec. IA **34** (1987), 513,-544.