数理解析研究所講究録
第 848 巻 1993 年 38-48

Young tableaux の構成アルゴリズム

九州大学総合理工学研究科　橋口 博樹 (Hiroki HASHIGUCHI)
九州大学理学部　仁木 直人 (Naoto NIKI)
岡山理科大学理学部　中川 重和 (Shigekazu NAKAGAWA)

1. はじめに

ヤングタブロー (単にタブロー) は, 対称群の表現論, 対称式の基底変換, Poincaré Function 等と深い関わりがある. 特に, 表現論では, 対称群の元である置換とスタンダードタブローの組が 1 : 1 に対応することが知られており, その証明の中で, 置換に対応する二つのスタンダードタブローを構成している. さらに [Knu70] では, この構成法を一般のタブローに拡張し, タブローの組とある性質をもった一行二列の配列とが 1 : 1 に対応することを示している. これらでは 1 : 1 の対応関係を示すことが主になっていて, タブローの構成には重点がおかれていない.

しかしながら, 対称式の基底変換という観点からタブローを見ると, タブローを数え上げる必要があり, 特に, これから定義する "P タブロー" の数え上げが重要である. 本報告では, P タブローの構成法を議論し, その実行アルゴリズムを作成する. P タブロー全体の集合に同値関係を定義し, 新たに P タブローの表現方法を導入することにより, P タブロー構成アルゴリズムの効率化を図るとともに, アルゴリズムの妥当性を示す. さらに, 不十分ではあるが個数に関する評価もしている.

尚, スタンダードタブローの構成は [Ski90] にある.

2. 基本事項

Definition 1 (分割) 自然数 n の分割を数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ で, $\sum \lambda_i = n$ かつ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_k \geq 0$ を満たすものと定める. ただし, 2 つの分割が 0 の個数のみで異なっているとき, それらは同一であるとみなす. λ の 0 でない λ_i の個数を $l(\lambda)$ で表し, λ が n の分割であることを $\lambda \vdash n$ と書く.

Definition 2 (台) n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{l(\lambda)})$ に対して, 四角形を, 一段目に左端から λ_1 個, 二段目に左端から λ_2 個, 三段目以降も同様に $l(\lambda)$ 段まで並べた図形を "台", もしくは "ヤング図形" という.

いま台を構成する四角形全てに, 1 から n までの数を入れることを考える. この時, この数付き図形 T の中の数 i の出現回数 c_i を並べた数列 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ を $c(T)$ で表そう.

Definition 3 (タブロー (ヤングタブロー)) n の分割 λ を台とする数付き図形 T において, 次の三つの条件を満たす時, T をタブローという.

1. 各行は左から右へ単調非減少である.

2. 各列は上から下へ単調増加である.

3. T の出現回数列 $c(T) = (c_1, \cdots, c_n)$ において，

$$\forall i \geq 1,\ c_{i+1} \neq 0 \Rightarrow c_i \neq 0.$$

図形 T がタブローである時，出現回数列 $c(T)$ をタブローの重みという．

Definition 4 (スタンダードタブロー) 特に，1 から n までの数が一回ずつ現れたタブロー，つまり $c = (1, 1, \cdots, 1)$ となるものをスタンダードタブローという．

台 λ と重み c が決まっても，タブローは一意にきまるわけではない．我々の関心は，台と重みが決まったときにタブローが幾つ存在するかということである．これについての一般的な公式はないが，台が決まったときのスタンダードタブローの個数には，次のようなエレガントな公式がある．

Proposition 1 (**Hook** の公式) λ を n の分割とし，λ を台にもつようなスタンダードタブローの個数を f^λ で表すと，

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{ij}}$$

である．ここで，$(i,j) \in \lambda$ は台 λ の i 行 j 列の四角形の場所を示す記号であり，

$$h_{ij} = \#|\{(i,j')\ ;\ j' \geq j\} \cup \{(i',j)\ ;\ i' \geq i\}|$$

である．また，記号 # は集合の要素数を表している．

Proof. [GNW79] を見よ．

3. P タブロー

この節では，新たに P タブローを定義し，共通の台を持つ P タブローの集合に同値関係を定義する．

Definition 5 (**P** タブロー) n の分割 λ を台にもつタブロー T が P タブローであるとは，T の重み $c(T)$ が n の分割になっているときをいう．

まず，任意の P タブローをスタンダードタブローに変換するアルゴリズムを挙げよう．

Algorithm 1 *from* P-Tableau *to* Standard Tableau

Input $Y = (y_{ij})$ P タブロー ただし y_{ij} は第 i 行 j 列の要素を表す
Output スタンダードタブロー

PS 1 もし $\#\{j \mid y_{1j} = 1\} = 1$ ならば，Y を返す．
さもなくば，$d \leftarrow \mathrm{Max}_{ij}(Y)$ とおく．
PS 2 $y_{ij} = d$ で，j が最大となるような添字の組を (i', j') とする．
PS 3 $y_{i'j'} \leftarrow y_{i'j'} + 1$ とする．
PS 4 もし $\{(i,j) \mid y_{ij} = d\} \neq \emptyset$ ならば，PS 1 にもどる．
さもなくば，$d \leftarrow d - 1$ とし，PS 2 にもどる．

Theorem 1 Algorithm 1は任意の P タブローに対して，それによって定まる唯一のスタンダードタブローを返す.

Proof. タブローの列における強意単調増加性により，PS 2 の j' が常に一意に決まり，また，最終結果はスタンダードタブローの条件を明らかに満たしている. ■

この Theorem 1 をに基づき，同じ台をもつ P タブロー全体の集合に同値関係を定義しよう.

任意の P タブロー Y に対して，Algorithm 1 を適用することを $\pi(Y)$ と書く. つまり，π は P タブロー全体からスタンダードタブロー全体への "写像" である.

Definition 6 n の分割 λ を台とする P タブロー全体を $\mathcal{P}_\lambda$ で表し，λ を台とするスタンダードタブロー全体の集合を $\mathcal{S}_\lambda$ で表す.

Definition 7 (同値関係 $\equiv$) n の分割 λ を台とする P タブロー $X, Y \in \mathcal{P}_\lambda$ に対し，

$$\pi(X) = \pi(Y)$$

であるとき，"X と Y が同値である" といい，

$$X \equiv Y \tag{1}$$

で表す.

Theorem 2

$$\mathcal{P}_\lambda/_{\equiv} \sim \mathcal{S}_\lambda \tag{2}$$

が成立する. 言い換えれば，スタンダードタブロー全体の集合が同値類の完全代表系になっている.

Proof. 定義より明らか. ■

Algorithm 1 は P タブローの中に現れる数と列番号 j の大きさにより "順序付け" を行なっている. その順番がスタンダードタブローとして現れている. このことを詳しく見てくために，P タブローに当てはめられている数とその場所を示すための指標を導入しよう.

4. P タブローの添字表現

Definition 8 自然数の組 (i, j) を並べた有限配列

$$A = \begin{array}{l} (i_{11},\ j_{11})\ (i_{12},\ j_{12})\ \cdots\ (i_{1m_1},\ j_{1m_1}) \\ (i_{21},\ j_{21})\ \cdots\ (i_{2m_2},\ j_{2m_2}) \\ \qquad\cdots\quad\cdots \\ (i_{l1},\ j_{l1})\ \cdots\ (i_{lm_l},\ j_{lm_l}) \end{array} \tag{3}$$

は次の四つの条件を満たすものとする.

1. 各行の要素の個数 $m_1, m_2, \cdots, m_l$ について,

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_l.$$

2. $i \geq 1$ のとき, $\forall j \geq 2$ に対して,

$$(i,j) \in A \text{ ならば, } (i, j-1) \in A$$

である. 同様に $j \geq 1$ のとき, $\forall i \geq 2$ に対して,

$$(i,j) \in A \text{ ならば, } (i-1, j) \in A.$$

3. 行番号$k < k'$のとき,

$$i_{k*} = i_{k'*} \text{ ならば, } \quad j_{k*} < j_{k'*}.$$

かつ

$$j_{k*} = j_{k'*} \text{ ならば, } \quad i_{k*} < i_{k'*}.$$

4. 任意の行番号 k について,

$$j_{k1} < j_{k2} < \cdots < j_{km_k}.$$

ここで, (i,j) が A の中にあることを $(i,j) \in A$ と書くことにし, A の k 行を

$$R_k(A) = (i_{k1},\ j_{k1})(i_{k2},\ j_{k2}) \cdots (i_{km_k},\ j_{km_k})$$

で表す.

Lemma 1 Definition 8 で定義された有限配列 A の要素 (i,j) はすべて異なる.

Proof. 定義の条件 *4* より, 同一行の要素はすべて異なる. 定義の条件 *3* より 異なる行に同一の要素はない. ■

Lemma 2 Definition 8で定義された有限配列 A の一行目の要素

$$R_1(A) = (1,1)(1,2) \cdots (1, m_1)$$

である.

Proof. (概略) 定義の条件 *2* から $(1,1)$ が存在がする.
条件 *3* より, $(1,2) \cdots$ が存在するときには, 適当な番号までは一行目に存在している. ■

Theorem 3 P タブローの集合 $\bigcup_{\lambda \vdash n} \mathcal{P}_\lambda$ と (8) で定義された n 個の要素をもつ有限配列全体の集合は 1 : 1 に対応する.

Proof. λ を台とする任意の P タブロー Y について，P タブローの重みを $c(Y)$ とするとき，$c(Y)$ により定まる "台" を考える．この台の第 k 行目に，$c_k = y_{ij}$ となる (i,j) を j の小さい順に左端から並べてできる配列を A と書く．この配列 A が Definition 8の四条件を満たすことを示そう．

$c(Y) = (c_1, c_2, \cdots, c_{l(c)})$ は分割だから，

$$c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{l(c)}$$

なので 条件 *1* を満たす．

分割 λ から得られる台は "連結" であり，しかも，上詰めかつ左詰めになっているので条件 *2* を満たす．また Definition 3 の *3* より，A には空白行が現れない．

P タブローに当てはめられた数 $k > k'$ について，Definition 3 の *1* と *2* から，k と k' が同じ行に位置しているとき，k' は k よりも左にあり，k と k' が同じ列に位置しているときには下側にある．したがって 条件 *3* を満たすことが分かる．

Definition 3 から同じ数は同一の行に存在しない．また 配列 A には $c_k = y_{ij}$ となる (i,j) を j の小さい順に左端から置いてある．したがって，条件 *4* を満たす．

逆に，Definition 8の有限配列 A から，

$$\lambda_i = \#\{\, (t,j) \in A \,|\, t = i\}$$

を台にもつような P タブロー Y を構成できることは，Lemma 1，2 および上の証明から明らかである．■

以後 P タブロー に対応する有限配列 (3) を P タブローの "添字表現" と呼ぶことにし，P タブロー Y の添字表現を $I(Y)$ で表す．

Example 1 (P タブローと添字表現)

$$Y = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & & & \end{matrix} \quad \leftrightarrow \quad I(Y) = \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (1,4) & \\ (2,2) & (1,5) & \\ (1,6) & & \\ (2,3) & & \end{matrix}$$

上の P タブローに π を作用させると，

$$\pi(Y) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 9 & & & \end{matrix} \tag{4}$$

となる．

また，その添字表現は

$$
I(\pi(Y)) = \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (1,4) \\ (2,2) \\ (1,5) \\ (1,6) \\ (2,3) \end{array} \qquad (5)
$$

である．

Algorithm 1を添字表現を通してみると，π の作用は，P タブローの添字表現の要素を一行目の右端から左端へ，上から下へ順番をつけて並べた添字表現のスタンダードタブローを出力していることが分かる．

Definition 9 (添字表現の標準形) ある P タブローの添字表現

$$
A = \begin{array}{l} (i_{11},\ j_{11})\ (i_{12},\ j_{12})\ \cdots\ (i_{1m_1},\ j_{1m_1}) \\ (i_{21},\ j_{21})\ \cdots\ (i_{2m_2},\ j_{2m_2}) \\ \qquad \cdots \quad \cdots \\ (i_{l1},\ j_{l1})\ \cdots\ (i_{lm_l},\ j_{lm_l}) \end{array}
$$

が与えられた時，A の要素 (i,j) を一行一列目から

$$
\begin{array}{c} (i_{11},\ j_{11}) \\ (i_{12},\ j_{12}) \\ \vdots \\ (i_{1m_1},\ j_{1m_1}) \\ (i_{21},\ j_{21}) \\ \vdots \\ (i_{lm_l},\ j_{lm_l}) \end{array} \qquad (6)
$$

と並べ換えて得られる配列 (6) を A の標準形といい，$\Pi(A)$ で表す．

Example 5 からも分かるように，次の定理が明らかに成立する．

Theorem 4 任意の P タブロー Y について

$$
\Pi(I(Y)) = I(\pi(Y)).
$$

5. 同値類の作成

Definition 7 である分割を台にもつ P タブロー全体に同値関係を定義したので，その同値類について調べよう．Y をスタンダードタブローとしたとき，Y と同値な P タブロー X を具体的に求めるアルゴリズムを示そう．

この同値類の中の P タブローを特徴付けるものとして，P タブローの最大値に着目する．この最大値のことを P タブロー Y の次数と呼び，$\deg(Y)$ で表す．

Lemma 3

$$Y \in \mathcal{S}_\lambda \ (\lambda \vdash n) \Leftrightarrow \deg(Y) = n.$$

次のアルゴリズムは，同値類の中の l 次 の P タブローから，$l-1$ 次の P タブローを構成するアルゴリズムである．

Algorithm 2 *from* P-Tableau with degree l *to* P-Tableaux with degree $l-1$

Input Y l 次 P タブロー $(l>1)$
Output $l-1$ 次 P タブローの集合

(Initialize) P タブロー Y の添字表現を $I(Y)$ とする

$$I(Y) = \begin{array}{l} (i_{11},\ j_{11})\,(i_{12},\ j_{12})\ \cdots\ (i_{1m_1},\ j_{1m_1}) \\ (i_{21},\ j_{21})\ \cdots\ (i_{2m_2},\ j_{2m_2}) \\ \quad\cdots\quad\cdots \\ (i_{l1},\ j_{l1})\ \cdots\ (i_{lm_l},\ j_{lm_l}) \end{array}$$

$$Stack = \emptyset$$

SSP 1 $k = l$ とせよ．
SSP 2 $Z = I(Y)$ とせよ．$k = 2$ ならば，SSP 5 へ行く．
SSP 3 $m_k = 1$ かつ $m_{k-2} \geq m_{k-1} + 1$ かつ $j_{k-1\,m_{k-1}} < j_{k\,m_k}$ ならば，
$R_{k-1}(Z) \leftarrow (i_{k-1\,1},\ j_{k-1\,1})\ \cdots\ (i_{k-1\,m_l},\ j_{k-1\,m_l})\,(i_{k\,m_k}, j_{k\,m_k})$,
$R_k(Z) \leftarrow R_{k+1}(Z),\ R_{k+1}(Z) \leftarrow R_{k+2}(Z),\ \cdots,\ R_{l-1}(Z) \leftarrow R_l(Z)$.
Z を P タブローに変換し，$Stack = Stack \bigcup \{\, I^{-1}(Z)\,\}$ とする．
さもなくば，$Stack$ を返す．
SSP 4 $k \leftarrow k-1$ とし，SSP 2 へもどる．
SSP 5 $(k=2)$ もし $m_2 = 1$ かつ $i_{2\,m_2} = 1$ ならば，
$R_1(Z) \leftarrow (i_{1\,m_1}, j_{1\,m_1})\ \cdots\ (i_{1\,m_1}, j_{1\,m_1})\,(i_{2\,m_2}, j_{2\,m_2})$,
$R_2(Z) \leftarrow R_3(Z), \cdots, R_l(Z) \leftarrow R_{l-1}(Z)$ とする．
Z を P タブローに変換し，$Stack \leftarrow Stack \bigcup \{\, I^{-1}(Z)\,\}$ とする．
SSP 6 $Stack$ を返す．

Definition 10 Algorithm 2を l 次 P タブロー Y に適用した時，出力される $l-1$ 次の P タブローの集合を $D(Y)$ で表す．もちろん $D(Y) = \emptyset$ となる場合がある．

このとき明らかに次の定理が成立する．

Theorem 5

$$\#[D(Y)] \le 2.$$

Algorithm 2の逆アルゴリズムとして，スタンダードタブローでない P タブローを次数の一つ高い P タブロー に変換するアルゴリズムを挙げよう．

Algorithm 3 *from* P-Tableau with degree l *to* P-Tableau with degree $l+1$

Input Y l 次 P タブロー $(l < n)$
Output $l+1$ 次 P タブロー

(Initialize) P タブロー Y の添字表現を $I(Y)$ とする

$$I(Y) = \begin{array}{l} (i_{11},\ j_{11})\,(i_{12},\ j_{12})\ \cdots\ (i_{1m_1},\ j_{1m_1}) \\ (i_{21},\ j_{21})\ \cdots\ (i_{2m_2},\ j_{2m_2}) \\ \quad\cdots\quad\cdots \\ (i_{l1},\ j_{l1})\ \cdots\ (i_{lm_l},\ j_{lm_l}) \end{array}$$

SP 1 $k \leftarrow l$ とする．
SP 2 $R_k(I(Y))$ から (i_{k,m_k}, j_{k,m_k}) を取り除き， $R_{k+1}(I(Y)) = (i_{k,m_k}, j_{k,m_k})$ とする．
SP 3 もし $R_k(I(Y)) \neq$ "空行" ならば $I(Y)$ を P タブローに変換し，その P タブローを返す．さもなくば， $k \leftarrow k-1$ とし， SP 2 にもどる．

Definition 11 任意の $Y \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \mathcal{S}_\lambda$ について， Algorithm 3を適用して得られる P タブローを $U(Y)$ で表す．

このとき Algorithm 3 と Algorithm 2 について次の Lemma が成立する．

Lemma 4 任意の $Y \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \mathcal{S}_\lambda$ $\lambda \vdash n$ について $U(Y)$ は唯一存在し，

$$Y \in D(U(Y))$$

である．

Proof. （概略） PS 2， PS 3 で更新された $k-1$, k, $k+1$ 行の長さ m_{k-1}, m_k, m_{k+1} が Algorithm 3 の SSP 3 もしくは SSP 5 の条件を満たすことから Lemma が成立する． ■

また Algorithm 3 と Algorithm 1 について次の Lemma が成立する．

Lemma 5 任意の $Y \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \mathcal{S}_\lambda$ $\lambda \vdash n$ について，

$$\pi(Y) = U^{(n-\deg(Y))}(Y)$$

である．つまり， Algorithm 3 を再帰的に適用していく操作が Algorithm 1 である．

Lemma 4 より，同値類の元全体を求めるには，スタンダードタブローに Algorithm 2 を適用し，新たにできた P タブロー に再び Algorithm 2 を適用していくという具合に再帰的に構成していけばよい．このとき 構成される P タブロー全体は二分木の形をしている

Example 2 (二分木)

$$
\begin{tikzcd}
 & 12345 \arrow[d, "D"] & & \\
 & 11234 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "D"] & & \\
11223 & & 11123 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "D"] & \\
 & 11122 & & 11112 \arrow[d, "D"] \\
 & & & 11111
\end{tikzcd}
$$

6. 対称式への応用

P タブローを用いた応用例として，対称式の基底変換を挙げる.

Definition 12 (単項対称式) 変数を $x_1, \cdots, x_n$ とし， λ を n の分割とするとき，単項対称式 m_λ を

$$m_\lambda = \sum x^\alpha$$

で定義する，ここで，和は λ の異なる順列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ でとり， $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ とする.

Definition 13 (シュアー多項式) 変数を $x_1, \cdots, x_n$ とし，数列 $\delta = (n-1, n-2, \cdots, 1, 0)$ と n の分割 λ に対して，

$$a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})$$
$$a_\delta = \det(x_i^{n-j})$$

とすると，シュアー多項式 s_λ は

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

で定義され，これは $\mathbb{Z}$ 係数の n 次同次対称多項式である.

ここで大事なことは，今定義した $\{s_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ と $\{m_c\}_{c\vdash n}$ が， n 次の同次対称多項式全体のつくる S_n 加群の基底になっているということである. したがって， s_λ を $\{m_c\}_{c\vdash n}$ で展開することができ，また， m_c を $\{s_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ で展開することもできる.

Proposition 2 (Littlewood-Richardson) λ を n の分割とする．シュアー多項式 s_λ を単項対称式 $\{m_c\}_{c\vdash n}$ で展開した

$$s_\lambda = \sum_{c\vdash n} k_{\lambda c}\, m_c$$

の係数 $k_{\lambda c}$ は，λ を台とし，c を重みとする P タブローの個数に等しい．

Proof. [LR34] もしくは [Mac79] を見よ．ただし，[LR34]，[Mac79] には，シュアー多項式を一般化した Skew Schur function についての証明がある．

Example 3 (P タブローの例) 3 と 4 の分割について P タブローの例を挙げる．もちろん，P タブローの個数は，シュアー多項式と単項対称式の変換係数になっている．現在のところ，7 以下の分割に対して，すべての P タブローを構成することができた．以下の表の見方は次の通りである．

	$\cdots\ c\ \cdots$
$\vdots$	$\vdots$
λ	$P_\lambda^{(c)}$
$\vdots$	$\vdots$

$P_\lambda^{(c)}$ には 台 λ 重み c の P タブローをリストで表現したものを並べ，それぞれのリストの第 i 成分が P タブローの i 行を表している．

3 の分割

	{ 3 }	{ 2, 1 }	{ 1, 1, 1 }
{ 3 }	{ { 1, 1, 1 } }	{ { 1, 1, 2 } }	{ { 1, 2, 3 } }
{ 2, 1 }		{ { 1, 1 } { 2 } }	{ { 1, 3 } { 2 } } { { 1, 2 } { 3 } }
{ 1, 1, 1 }			{ { 1 } { 2 } { 3 } }

4 の分割

	{ 4 }	{ 3, 1 }	{ 2, 2 }	{ 2, 1, 1 }
{ 4 }	{ { 1, 1, 1, 1 } },	{ { 1, 1, 1, 2 } }	{ { 1, 1, 2, 2 } }	{ { 1, 1, 2, 3 } }
{ 3, 1 }		{ { 1, 1, 1 } { 2 } }	{ { 1, 1, 2 } { 2 } }	{ { 1, 1, 2 } { 3 } } { { 1, 1, 3 } { 2 } }
{ 2, 2 }			{ { 1, 1 } { 2, 2 } }	{ { 1, 1 } { 2, 3 } }
{ 2, 1, 1 }				{ { 1, 1 } { 2 } { 3 } }

	{ 1, 1, 1, 1 }
{ 4 }	{ { 1, 2, 3, 4 } }
{ 3, 1 }	{ { 1, 2, 3 } { 4 } } { { 1, 2, 4 } { 3 } } { { 1, 3, 4 } { 2 } }
{ 2, 2 }	{ { 1, 3 } { 2, 4 } } { { 1, 2 } { 3, 4 } }
{ 2, 1, 1 }	{ { 1, 3 } { 2 } { 4 } } { { 1, 4 } { 2 } { 3 } } { { 1, 2 } { 3 } { 4 } }
{ 1, 1, 1, 1 }	{ { 1 } { 2 } { 3 } { 4 } }

7. おわりに

最初の目標である P タブローをすべて構成するということは，今回用意したアルゴリズムで達成できた．このアルゴリズムの妥当性を評価するために，数学的な見方，考え方が大いに役立っていると思う．

数式処理に限らず，計算機が自然科学の分野で理論的補足や理解の手助けをしている場合がしばしばある．逆に，今回のように，アルゴリズムの妥当性と，ある種の効率評価に，数学的手段が利用できる場合もある．今後は，これまで以上に，理論と算法の両面にわたる幅広い研究が必要になってくると思われる．

既に，対称式の基底変換や 対称群の表現論を統計に応用した研究がなされ，いくつかの研究成果が報告されている [Nik89] [NN91] [Dia88]．これらの研究もふまえて，対称群の表現論で重要なシュアー多項式を統計の立場から見直すことを今後の課題としたい．

また，本報告で定義した P タブローの添字表現の導入により，タブローの数え上げに関する何らかの結果が期待できるであろう．

参 考 文 献

[Dia88] P. Diaconis. *Group Representations in Probability and Statistics*, Vol. **11** of *Institute of Mathematical Statistics, Lectur Notes-Monograph Series.* Harvard, CA, 1988.

[GNW79] C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf. A probabilistic proof of formula for the number of Young tableaux of a given shape. *Adv. in Math.*, Vol. **31**, pp. 104–109, 1979.

[Knu70] D. E. Knuth. Permutations, matrices and generalized Young tableaux. *Pacific J. Math.*, Vol. **34**, pp. 709–27, 1970.

[LR34] D. E. Littlewood and A. R. Richadson. Group characters and algebra. *Phil. Trans.*, Vol. **A 233**, pp. 99–141, 1934.

[Mac79] I. G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall polynomials.* Oxford University Press, Oxford, 1979.

[Nik89] N. Niki. Algorithms on the representation of multisystem symmetric polynomials and their applications in statistics. *Proc. 11th Int. Symp. Computer at the University.*, Vol. **5.1**, pp. 1–6, 1989.

[NN91] S. Nakagawa and N. Niki. Change of bases of symmetric polynomials of several systems of quantities and their applications to distribution theory of multivariate statistics. *Theory and Applications in Computational Statistics*, 1991.

[NY92] N. Niki and M. Yoshida. Poincaré funcitons of point sets in projective spaces. *Kyushu University Sries A Mathmatics*, Vol. **XLVI No 2**, , 1992.

[Ski90] S. Skiena. *Inplementing Discrete Mathematics.* Allan M. Wylde, 1990.