

近似的 GCD を用いた有理関数近似¹⁾

愛媛大学 工学部²⁾ 甲斐 博 (Hiroshi KAI)
" 野田 松太郎 (Matu-Tarow NODA)

1. はじめに

我々はすでに近似的 GCD[6] を用いた有理関数近似の技法を提案し [3]、その有用性について議論している。有理関数近似は、多項式近似に次いで簡単な近似法であり、かつ特異点をもつ関数の近似にも適用できる。このような利点を持つにもかかわらず、有理関数近似の幅広い利用の障壁となっていた問題点は、近似有理関数の既約性にあった。有用な定理の多くは既約な有理関数を対象としているが [4, 5]、係数が浮動小数の場合には有理関数の既約性に関してはほとんど何もいえないことを文献 [3] で述べた。我々の考え方は、分子・分母の浮動小数係数多項式の近似的共通因子を求め、これによって有理関数を近似的に既約なものにする点にあった。

本論では、この新しい手法について詳しく検討し、かつ誤差を含んだデータの平滑化にも有効であることを示す。近似的 GCD を用いた有理関数近似は誤差の平滑化に有効であることを文献 [3] で示したが、本論ではこの点を再考する。特に誤差と近似的 GCD の cutoff ϵ の関係を与える。また最小二乗法、最良近似と比較を行ない有理関数近似の有用性を示す。

2. 近似的 GCD を使った有理関数近似

関数 $f(x)$ の範囲 $[a, b]$ での有理関数近似は次のようにして求める。有限個の離散点列 $x_0 = a, x_1, \dots, x_N = b$ を与え、対応する関数値 $f_i = f(x_i), i = 0, \dots, N$ を計算する。結局、 (x_i, f_i) の有限個の組を与えるので、関数値を実験データなどに置き換えても支障はない。これらの組を正確に通る有理関数

$$r_{m,n} = \frac{p_m}{q_n} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^n b_j x^j}$$

を決定する。この有理関数を (m, n) 有理関数と呼び、以下便利のために $b_0 = 1$ とおく。多項式の係数 a_j, b_j は一般に浮動小数であり、ガウス消去法により簡単に求め得る。

しかし、結果として得られる有理関数の近似区間内での連続性については何も保証されず、むしろ一般に分母の零点の存在により特異になる。整数係数ならば、GCD 計算により有理関数を既約化し、容易に特異性を除き得るが、浮動小数係数の場合は、従来から

¹⁾Rational Function Approximation by Using Approximate GCD Algorithm

²⁾Department of Computer Science, Ehime University

の技法のみではこのような処理は困難で、有理関数近似は実用的な手法とはいえない面があった。

この解決のため、通常の方法に代えて近似的 GCD 算法 [6] を使い、共通因子の代わりに近似的共通因子を用いることにより、浮動小数係数を持つ有理関数を既約にできる可能性がある。この方法は以下のようにまとめられる。

アルゴリズム 近似的 GCD を用いた有理関数近似

入力：有限個の点 x_0, x_1, \dots, x_N と対応する関数値 $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, \dots, N$)

近似的 GCD のための cutoff 値 ε ($0 < \varepsilon \ll 1$)

出力： $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_N, f_N)$ を近似する有理関数 $r(x) = p(x)/q(x)$

方法 1. 入力データを近似する (m, n) 有理関数

$$r_{m,n}^0(x) = \frac{p^0(x)}{q^0(x)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^n b_j x^j}, \quad b_0 = 1$$

を求める。ただし、 $N = m + n + 1$ 。

2. $p(x)$ と $q(x)$ の精度 ε の近似的 GCD を求める。

$$g(x) = \text{ApxGCD}(p^0(x), q^0(x); \varepsilon)$$

3. 近似的に既約な有理関数

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\frac{p^0(x)}{g(x)}}{\frac{q^0(x)}{g(x)}}$$

を求める。ただし、多項式の除算は近似除算を行う。

4. 以下の有理関数の正規化を行う。

(a) $q(x)$ の定数項を 1 にする ($r(x)$ を $q(x)$ の定数項で割る)。

(b) $r(x)$ の微小係数項を無視する。

このような手法で求めた有理関数近似の有用性は、ハイブリッド積分への応用も含めて、[3][1] に詳しく述べた。

3. 有理関数近似による誤差の平滑化

3.1. 小さな誤差を含むデータの場合

近似的 GCD を用いた有理関数近似のアルゴリズムは入力データ列を近似する有理関数を出力する。その際、純粹な関数近似として考える場合には、近似精度についての詳しい検討のみが必要であるが、実験データなどのように誤差を含んだデータを近似する場合は、いかに滑らかに近似するかという面も重要になる。

以下の例で示すように、誤差を含んだデータの有理関数補間を求めた場合、データの揺れは有理関数のするどい特異点として吸収される。しかし、提案したアルゴリズムを適用すると、そのような特異点部分が分子分母の多項式の近似的 GCD として除去され、その結果データを滑らかに近似する有理関数になることが分かる。ここでは、いくつかの簡単な関数の値に誤差を加えたものをデータ列として与え、それに対する結果を検討する。

始めに次のようなモデルを考える。

例 1

- 関数 $\frac{\sin 2x}{2x+1}$ 、区間 $[0, 1]$
- サンプル点として等間隔に 21 個のデータ列に変換する。
- データ列各点に $O(10^{-3})$ の誤差 (平均 2.414×10^{-3} 、分散 8.096×10^{-6}) を加える。

以上のデータをアルゴリズムに適用する。

- 有理関数補間 $r_{10,10}^0(x) = \frac{p_{10}^0(x)}{q_{10}^0(x)}$

ここで、

$$p_{10}^0(x) = 1.519 \times 10^{-3} + 1.967x - 44.76x^2 + 4.198 \times 10^2x^3 - 2.153 \times 10^3x^4 \\ + 6.701 \times 10^3x^5 - 1.319 \times 10^4x^6 + 1.650 \times 10^4x^7 - 1.268 \times 10^4x^8 \\ + 5.435 \times 10^3x^9 - 9.906 \times 10^2x^{10}$$

$$q_{10}^0(x) = 1.000 - 20.55x + 1.671 \times 10^2x^2 - 6.853 \times 10^2x^3 + 1.427 \times 10^3x^4 \\ - 9.541 \times 10^2x^5 - 2.002 \times 10^3x^6 + 5.126 \times 10^3x^7 - 4.755 \times 10^3x^8 \\ + 1.968 \times 10^3x^9 - 2.720 \times 10^2x^{10}$$

- cutoff $\varepsilon = 10^{-1}$ を与え、 $p^0(x), q^0(x)$ の近似的 GCD を求める。

$$g_8(x) = \text{ApxGCD}(p^0, q^0; 10^{-1}) \\ = 2.264 \times 10^{-3} - 4.936 \times 10^{-2}x + 0.4409x^2 - 2.121x^3 + 6.053x^4 - 10.55x^5 \\ + 11.03x^6 - 6.351x^7 + 1.546x^8$$

- 近似的 GCD を取り除いた有理関数近似

$$r_{2,2}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \\ = \frac{1.895 \times 10^{-3} + 2.001x - 1.450x^2}{1.000 + 1.246x - 0.3983x^2}$$

$r(x)$ と与えたデータを Fig. 1 に示す。

このようにここで求めた有理関数近似は誤差を含んだデータのごく近くを滑らかに通ることが分かる。誤差を含むデータに対し有理関数近似を求める際には、与えた誤差と近似的 GCD の cutoff ε 値との関係を考えることが重要である。

図に示した場合は、 $O(10^{-3})$ の誤差を与えたデータ列を近似し、 $\varepsilon = 10^{-1}$ としたとき、次数 8 の近似的 GCD が求まり、その結果として既約な (2, 2) 有理関数を得た。同様の計算を ε を変えて行なうと、 $\varepsilon = 10^{-3}$ までは同じ結果が得られたが、 $\varepsilon = 10^{-4}$ 以下にすると、近似的 GCD の次数は 7 となり、(3, 3) 有理関数が得られるようになる。この有理関数は分母に零点を含み既約性を失う。すなわち、含まれる誤差の大きさより小さな ε を採用すると、近似的 GCD 計算が厳密な共通因子を求めることと変わらなくなる。

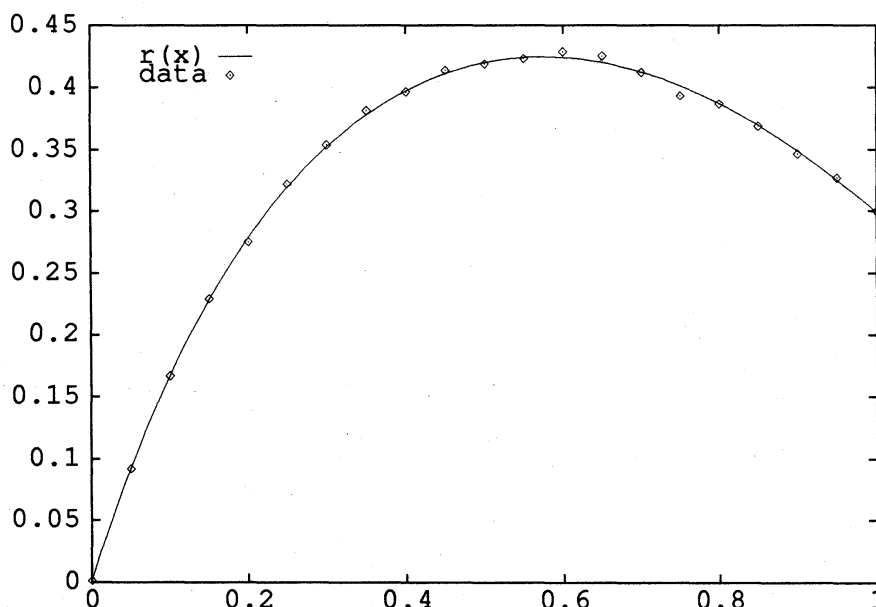


Fig. 1. $r_{2,2}$ の関数形

この点をより詳しく見るために例 1 の関数のデータに $O(10^{-3}) \sim O(10^{-8})$ の大きさの誤差を与え、結果を表 1 に示す。各データに対し、cutoff ε の値として $\varepsilon = 10^{-1} \sim 10^{-9}$ を与えた。

この表から誤差を含んだデータの有理関数近似を得るには、cutoff ε の値を $10^{-1} \sim 10^{-3}$ 程度の値を与えて計算するとよいことが分かる。なお、 $\deg(g)$ は、近似的 GCD の次数を表す。

次に同様の解析を別のモデルについて行なう。

例 2

モデルとなる関数として $\sqrt{1+x}$ を考える。次にデータ列に $O(10^{-3})$ の大きさの誤差を加えた場合、どのように平滑化が行なわれるかを示す。

Table 1. 誤差の大きさと cutoff ε の関係

$O(\text{誤差})$	誤差 (平均分散)	cutoff ε	$\deg(g(x))$	有理関数
10^{-3}	$\frac{2.414 \times 10^{-3}}{8.096 \times 10^{-6}}$	$10^{-1} \sim 10^{-3}$	8	(2, 2)
10^{-4}	$\frac{1.976 \times 10^{-4}}{4.927 \times 10^{-8}}$	$10^{-1} \sim 10^{-4}$	7	(3, 3)
10^{-5}	$\frac{3.049 \times 10^{-5}}{1.338 \times 10^{-9}}$	$10^{-1} \sim 10^{-4}$	7	(3, 3)
10^{-6}	$\frac{2.541 \times 10^{-6}}{8.657 \times 10^{-12}}$	$10^{-1} \sim 10^{-4}$	7	(3, 3)
10^{-7}	$\frac{2.235 \times 10^{-7}}{6.550 \times 10^{-14}}$	$10^{-1} \sim 10^{-6}$	6	(4, 4)
10^{-8}	$\frac{2.759 \times 10^{-8}}{1.136 \times 10^{-15}}$	$10^{-1} \sim 10^{-6}$	6	(4, 4)

- 区間 $[0, 1]$
- サンプル点を等間隔にとり、21 個からなるデータ列を生成する。
- データ列各点に $O = 10^{-3}$ の誤差 (平均 2.889×10^{-3} , 分散 1.110×10^{-5}) を加える。

以上のデータを有理関数近似する。

- 有理関数補間 $r_{10,10}^0(x) = \frac{p_{10}^0(x)}{q_{10}^0(x)}$
ただし、

$$p_{10}^0(x) = 1.003 - 25.91x + \dots + 5.071 \times 10^3 x^9 - 1.617 \times 10^3 x^{10}$$

$$q_{10}^0(x) = 1.000 - 26.29x + \dots - 82.79x^9 - 4.886 \times 10^2 x^{10}$$

- $\text{ApxGCD}(p^0, q^0; 10^{-1})$

$$g_9(x) = 1.426 \times 10^{-3} - 3.779 \times 10^{-2}x + 0.4179x^2 - 2.539x^3 + 9.376x^4 - 21.89x^5 \\ + 32.46x^6 - 29.60x^7 + 15.11x^8 - 3.303x^9$$

- 有理関数近似

$$r_{1,1}(x) = \frac{1.005 + 0.6978x}{1.000 + 0.2107x}$$

次の Fig. 2に、与えたデータと結果の有理関数近似 $r_{1,1}$ を示す。例 1 の場合と同様、本論の有理関数近似はよい結果を与えることが分かる。また、Table 1 と同じような解析をした結果が Table 2 にある。すなわち、cutoff ε が 10^{-5} 以下では既約でない有理関数を得、 $10^{-1} \sim 10^{-4}$ 程度にとって近似を行えば、誤差を含むデータに対して滑らかな有理関数近似が得られている。

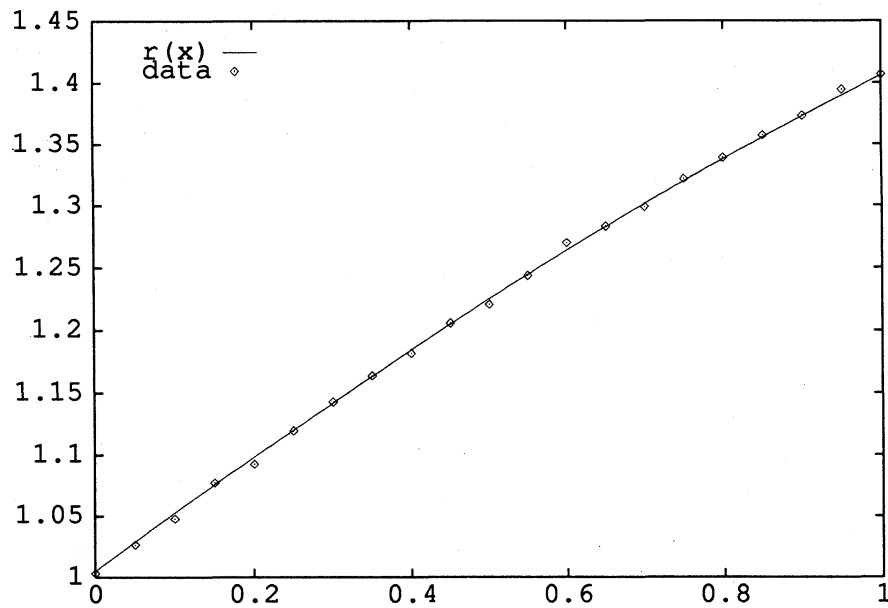


Fig. 2. $r_{1,1}$ の関数形

Table 2. 誤差の大きさと cutoff ϵ の関係

$O(\text{誤差})$	誤差 (平均分散)	cutoff ϵ	$\text{deg}(g(x))$	有理関数
10^{-3}	$\frac{2.889 \times 10^{-3}}{1.110 \times 10^{-5}}$	$10^{-1} \sim 10^{-2}$	9	(1,1)
10^{-4}	$\frac{2.970 \times 10^{-4}}{1.424 \times 10^{-7}}$	$10^{-1} \sim 10^{-3}$	9	(1,1)
10^{-5}	$\frac{1.654 \times 10^{-5}}{3.152 \times 10^{-10}}$	$10^{-1} \sim 10^{-4}$	8	(2,2)
10^{-6}	$\frac{2.679 \times 10^{-6}}{1.277 \times 10^{-11}}$	$10^{-1} \sim 10^{-5}$	8	(2,2)
10^{-7}	$\frac{2.936 \times 10^{-7}}{1.180 \times 10^{-13}}$	$10^{-1} \sim 10^{-5}$	7	(3,3)
10^{-8}	$\frac{2.015 \times 10^{-8}}{6.923 \times 10^{-16}}$	$10^{-1} \sim 10^{-7}$	7	(3,3)

3.2. 大きな誤差を含む場合

以上のモデルでは全体に誤差が小さな場合であったが、実際問題におけるデータの平滑化では測定値の入力ミスなどのようにデータから飛び跳ねた大きな誤差 (外れ値; outlier) が問題になる。我々は、このようなデータに有理関数近似のアルゴリズムを適用することにより、その影響を受けない平滑化が可能であることを実例によって示した [3]。ここでは、この点をより詳しく考察する。

問題になるのは、どのようなデータの場合ある種の平滑化が可能になるのか、という点である。これに関係すると思われる有理関数補間の性質として、次のものが知られている。

性質 1 有理関数による補間問題は点列 (x_i, f_i) , $i = 1, \dots, m+n+1$ に対し、

$$r(x_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, m+n+1 \quad (3.1)$$

で表される。しかし、次のようにある k に対してこれを満足しない点が存在することがある。すなわち、

$$r(x_k) \neq f_k. \quad (3.2)$$

このような点の集合 (x_k, f_k) は到達不能点 (*unattainable points*) と呼ばれる。有理関数補間を求めるには、

$$q(x_i)f_i - p(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m+n+1 \quad (3.3)$$

を満足するように求めるが、この時 (3.2) で示す点が存在する場合 分子と分母の多項式は x_k で零点、すなわち共通因子を持つ [5]。

性質 1 は誤差を含んだ点が平滑化により到達不能点になるならば、有理関数近似のアルゴリズムで誤差を取り除けることが可能となることを示している。データ列がこのような点を含む条件は次のようになる。

性質 2 次の点列 (x_i, f_i) , $i = 1, \dots, m+n+1$ を考える。

$$\begin{aligned} f_j &= r_{s,t}(x_j), \quad s < m, \quad t < n, \quad j = 1, \dots, \max(m+t, n+s) + 1 \\ f_k &\neq r_{s,t}(x_k), \quad k = 1, \dots, \min(m-s, n-t) \end{aligned}$$

この時、点の集合 (x_k, f_k) は到達不能点になる。

これは次のような簡単な例で示すことができる。

例 3

- 関数 $f(x) = x$
- サンプル点 $(\frac{i-1}{6}, \frac{i-1}{6})$, $i = 1 \dots 7$
- $x = 2/6, 4/6$ の点に誤差を加える。 $(2/6, 1.0)$, $(4/6, 0.4)$

- 有理関数補間

$$r_{3,2}(x) = \frac{x - 4.5x^2 + 4.5x^3}{1.0 - 4.5x + 4.5x^2} = x$$

点列と関数をグラフに書くと図のようになる。このように性質2を満たす点列の場合、誤差を与えた点が到達不能点になっていることが分かる。実際、有理関数補間の分子分母のGCDは $1.0 - 4.5x + 4.5x^2$ であり、その根は $x = 2/6, 4/6$ である。つまり有理関数上の点列をそれより次数の高い有理関数で補間する場合、 $\min(m-s, n-t)$ 個の点に誤差が入っても完全に除去可能であると言える。しかもそれらの点は厳密に到達不能点であるので、いくら大きな誤差が加わっても関係ない。

以上は性質2を厳密に満たす点列に対する理論であるが、近似的GCDを用いた有理関数近似にも同じ議論を適用できる。性質2において $f_j \neq r_{s,t}(x_j)$ である場合を考える。その時他の点に与えた大きな誤差は到達不能であるから、鋭い特異点に変化し分子分母の近似的なGCDが得られることが予想される。いま例3のデータ列に誤差が加わった場合を考える。

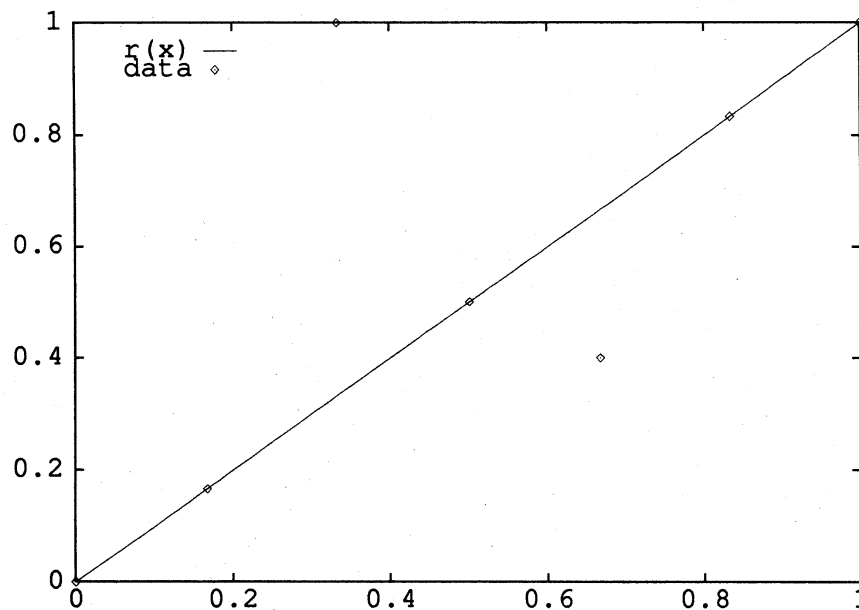


Fig. 3. $r(x)$ の関数形

例4

- 例3のデータに $O(10^{-3})$ の誤差(平均 2.641×10^{-3} , 分散 1.139×10^{-5})を加える。
- 有理関数補間

$$r_{3,3}^O(x) = \frac{5.076 \times 10^{-3} + 0.9599x - 4.407x^2 + 4.434x^3}{1.000 - 4.511x + 4.511x + 4.544x^2 - 3.983 \times 10^{-2}x^3}$$

- $\text{ApxGCD}(p^0, q^0; 10^{-1})$

$$g_2(x) = 1.000 - 4.503x + 4.504x^2$$

- 有理関数近似

$$r_{1,1}(x) = \frac{0.00557 + 0.984x}{1.00 - 0.00884x}$$

このように $g(x)$ を見ると、到達不能点による分子分母の共通因子は、誤差のため、近似的に変化していることがわかる。しかしこの場合も、近似的 GCD 算法により除去した結果は、大きな誤差に関係なく、データをうまく平滑化していることが分かる。結果は Fig. 4 に示した。

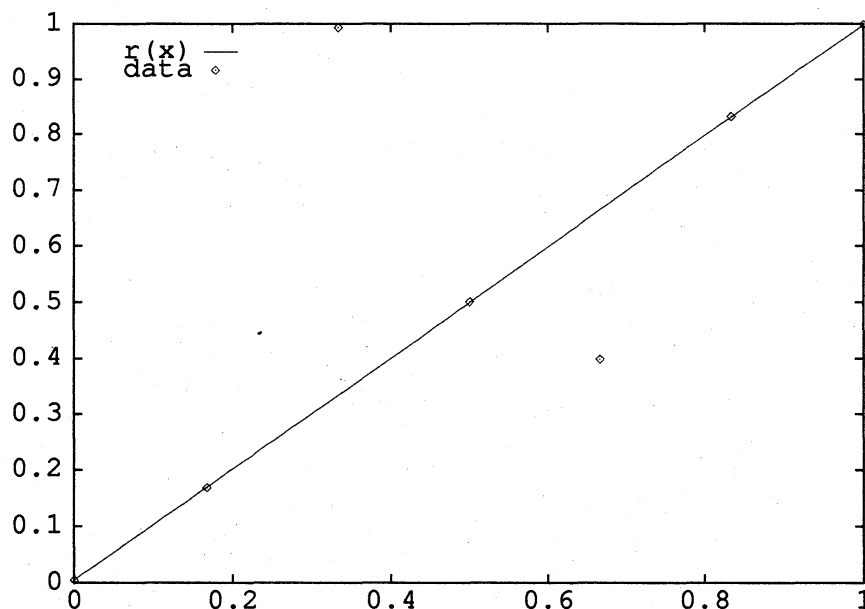


Fig. 4. $r(x)$ の関数形

4. 有理関数近似による平滑化と他の近似方法との関係

有理関数近似による平滑化の問題をより実際的な問題に適用してみる。データとして、文献 [7] にあるものの一つを採用することを行なった (Fig. 5)。このデータは 51 個の点が与えられていてそのまま有理関数補間すると (25, 25) 有理関数になる。しかし、問題を見やすくするため 2 つ飛びに点をとって 19 個の点で近似を行なう。近似的 GCD の cutoff ε は 3 の議論より 10^{-1} とする。

例 5

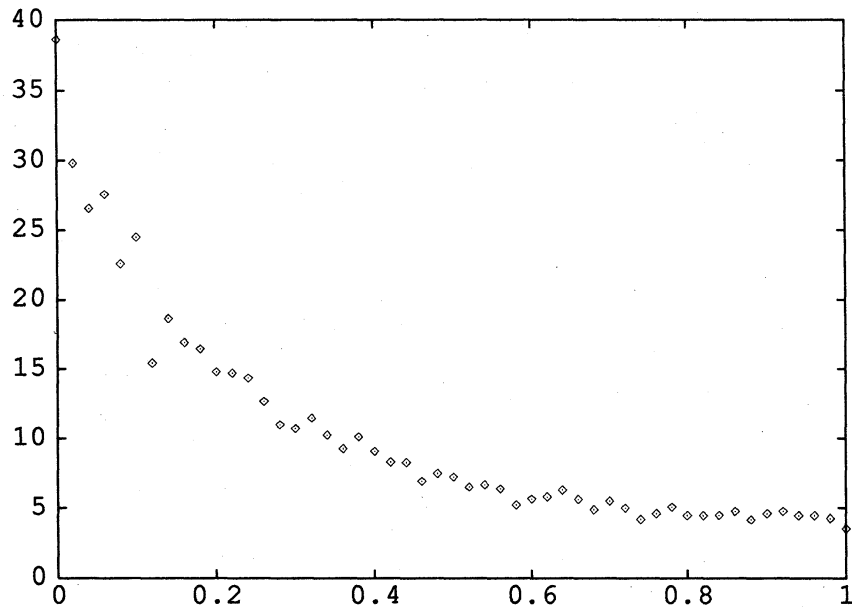


Fig. 5. 51点のデータ

- 有理関数補間 $r_{9,9}^0(x) = \frac{p_9^0(x)}{q_9^0(x)}$

ここで、

$$p_9^0(x) = 38.63 - 1.264 \times 10^4 x + 3.023 \times 10^5 x^2 - 2.772 \times 10^6 x^3 + 1.289 \times 10^7 x^4 \\ - 3.355 \times 10^7 x^5 + 4.997 \times 10^7 x^6 - 4.096 \times 10^7 x^7 + 1.614 \times 10^7 x^8 \\ - 1.994 \times 10^6 x^9$$

$$q_9^0(x) = 1.000 - 3.528 \times 10^2 x + 6.057 \times 10^3 x^2 - 1.875 \times 10^4 x^3 - 1.747 \times 10^5 x^4 \\ + 1.502 \times 10^6 x^5 - 4.742 \times 10^6 x^6 + 7.473 \times 10^6 x^7 - 5.856 \times 10^6 x^8 \\ + 1.813 \times 10^6 x^9$$

- $\text{ApxGCD}(p^0, q^0; 10^{-1})$

$$g_8(x) = -1.991 \times 10^{-5} + 6.532 \times 10^{-3} x - 0.1549 x^2 + 1.400 x^3 - 6.367 x^4 + 15.99 x^5 \\ - 22.43 x^6 + 16.41 x^7 - 4.862 x^8$$

- 有理関数近似

$$r_{1,1}(x) = \frac{35.66 - 7.560x}{1.000 + 6.871x}$$

アルゴリズムに適用した結果、Fig. 6のように平滑化が可能である。このデータに対し線形最小二乗法と有理関数による最良近似を求めると Fig. 7 になる。最小二乗法は関数の揺れを押えるため3次の多項式をモデルを用いた。一方、最良近似は退化 (*degenerate*) や有理関数の特異点等の問題から有理関数の次数を低次にとり (1,1) 有理関数で求める。Fig. 7から最小二乗法はデータをよく通ることがわかるが最良近似はデータから少し外れる。最良近似はもともと関数近似の手法であるため誤差を含むデータには不適切である。次に3で取り上げたような大きな誤差が加わった場合を考える。例5のデータの $x = 0.1$ の点に大きな誤差を加えた場合の最小二乗法と最良近似は Fig. 8になる。

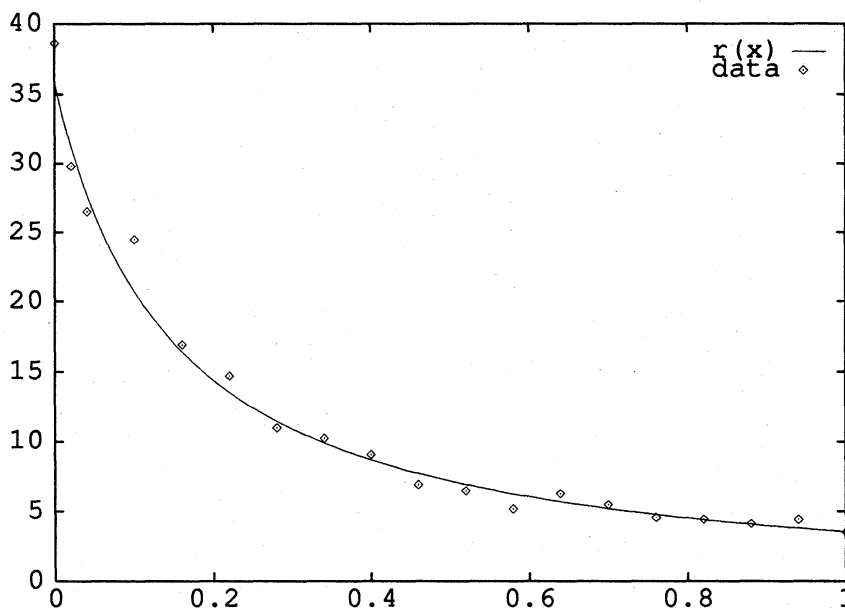


Fig. 6. $r_{1,1}(x)$ の関数形

Fig. 8より、どの方法も加えた誤差の影響を大きく受け、点列からはずれることがわかる。この場合、最小二乗法や最良有理関数近似は大きな誤差に対し何らかの操作が必要になる。同じデータに対し本論の有理関数近似を求める。

例6

- 有理関数補間 $r_{9,9}^0(x) = \frac{p_9^0(x)}{q_9^0(x)}$

ここで、

$$\begin{aligned}
 p_9^0(x) = & 38.63 - 1.607 \times 10^4 x + 3.771 \times 10^5 x^2 - 3.417 \times 10^6 x^3 + 1.578 \times 10^7 x^4 \\
 & - 4.091 \times 10^7 x^5 + 6.077 \times 10^7 x^6 - 4.974 \times 10^7 x^7 + 1.958 \times 10^7 x^8 \\
 & - 2.421 \times 10^6 x^9
 \end{aligned}$$

$$q_9^0(x) = 1.000 - 4.541 \times 10^2 x + 7.570 \times 10^3 x^2 - 2.296 \times 10^4 x^3 - 2.149 \times 10^5 x^4$$

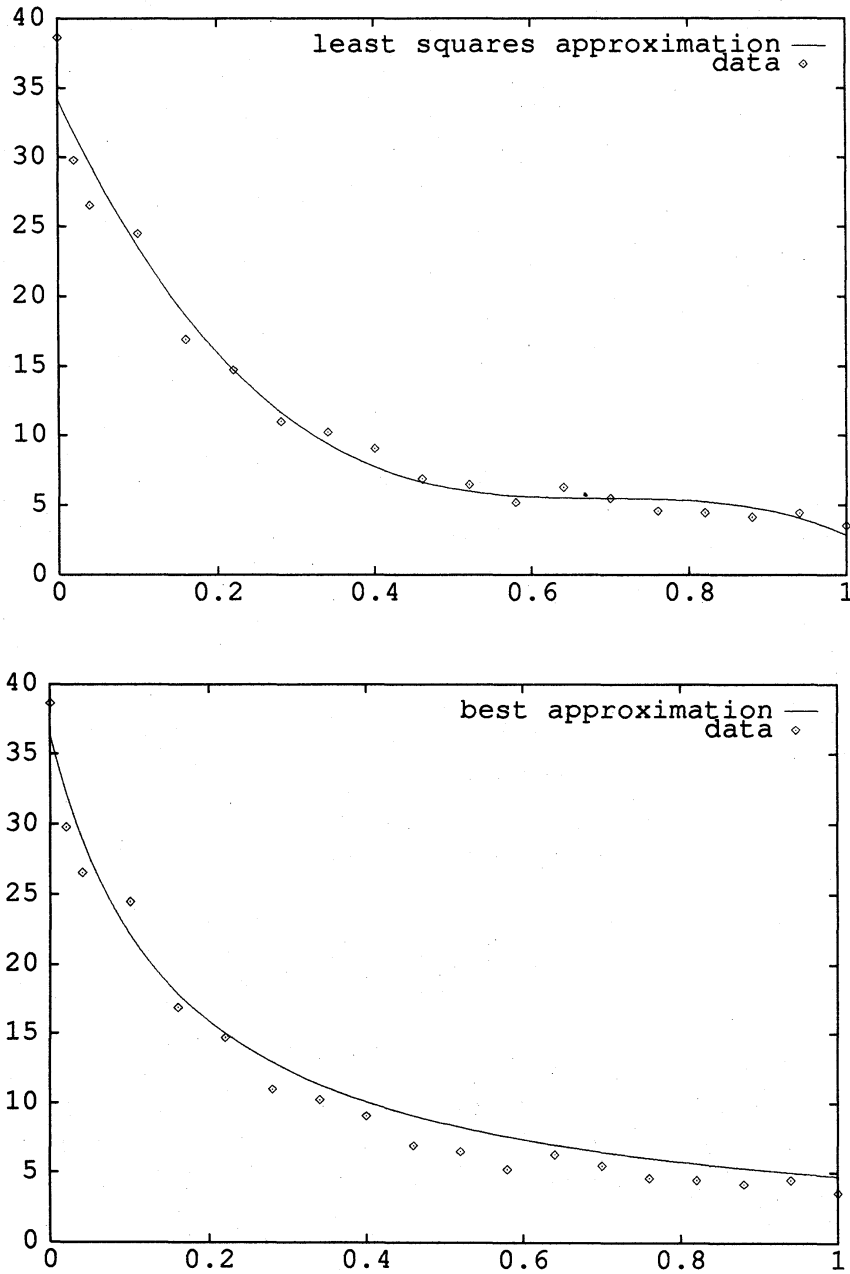


Fig. 7. 例5に対する最小二乗法と最良近似

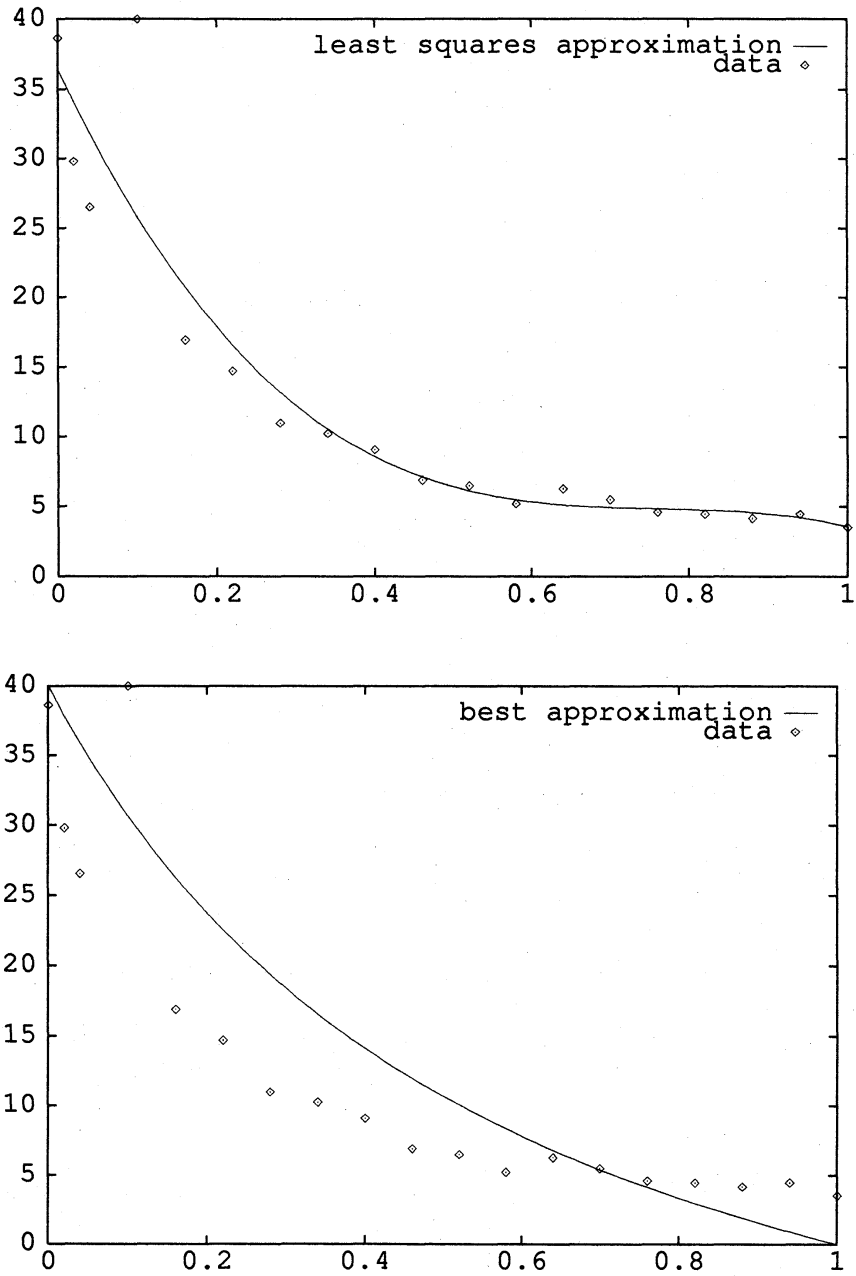


Fig. 8. 例5に大きな誤差を加えた時の最小二乗法と最良近似

$$+ 1.833 \times 10^6 x^5 - 5.765 \times 10^6 x^6 + 9.066 \times 10^6 x^7 - 7.093 \times 10^6 x^8 \\ + 2.194 \times 10^6 x^9$$

- $\text{ApxGCD}(p^0, q^0; 10^{-1})$

$$g_8(x) = -1.640 \times 10^{-5} + 6.846 \times 10^{-3}x - 0.1591x^2 + 1.421x^3 - 6.420x^4 + 16.05x^5 \\ - 22.46x^6 + 16.40x^7 - 4.854x^8$$

- 有理関数近似

$$r_{1,1}(x) = \frac{35.47 - 7.534x}{1.000 + 6.826x}$$

得られた有理関数の関数形は Fig. 9に示す。与えられたデータ列に大きな誤差が加えられたため、有理関数補間の係数値は例5と比較し大きく異なる。しかし近似的GCDで近似的共通因子を取り除いた結果、有理関数近似の係数は例5のものと近い値となる。つまり他に特別な操作を加えることなく同じアルゴリズムで平滑化が可能である。

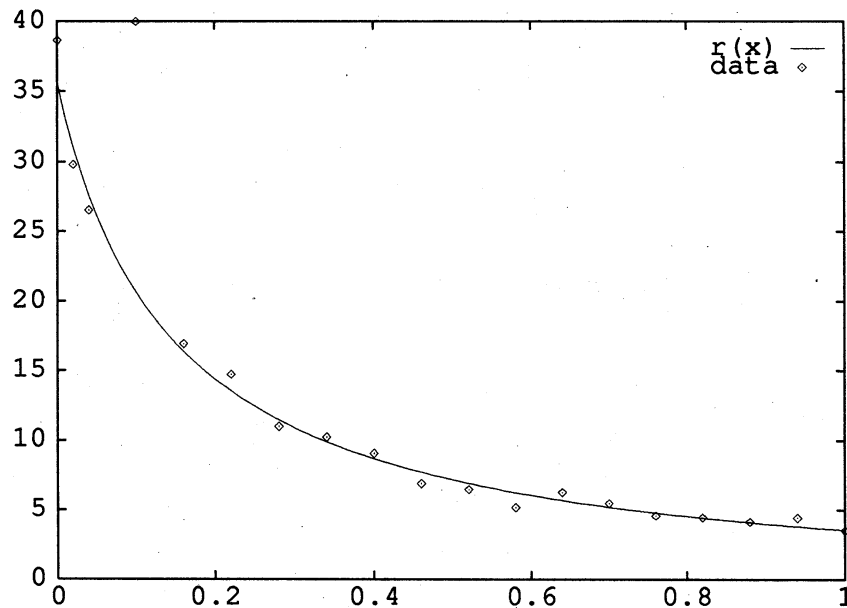


Fig. 9. $r(x)$ の関数形

5. むすび

本論ではハイブリッド計算の視点から関数近似の技法を見直し、新しい有理関数近似について述べた。そのアルゴリズムの適用範囲の拡大として、実験データなどのようにす

に与えられたデータの近似を行なった。一般に、そのようなデータには誤差が含まれるため、データを滑らかに近似することが重要になる。しかし誤差を含むデータを有理関数近似のアルゴリズムに適用した場合、近似的 GCD 算法により特異成分を除去し、その結果データに対し滑らかな近似が得られる。最小二乗法と最良近似と比較すると、これらの方法では問題がある実験時の入力ミスなどのようなデータから飛び跳ねたような大きな誤差が加わった場合でも平滑化された有理関数が求まる。これまで有理関数近似の平滑化の理論的な考察は行なっていなかったが、ここで示したように到達不能点と関連がある。この点を今後より詳しく考察する必要がある。さらに、本論では複雑な関数を近似するための有理関数近似そのものについての議論は行なっていない。本論の技法の拡張のためにはその面からの接近も必要であろう。

参 考 文 献

- [1] 宮広栄一, 野田松太郎, 新しい有理関数近似によるハイブリッド積分の拡張について, 日本応用数理解学会論文誌, vol.2, N0.4, pp.193-206, 1992.
- [2] M.T. Noda, and E. Miyahiro, A Hybrid Approach for the Integration of a Rational Function, Jour. CAM, March, 1992
- [3] 野田松太郎, 宮広栄一, 甲斐博, 近似的 GCD を用いた有理関数近似, 数理解析研講究録 787, 非線形問題の数値解析, pp.150-162, 1992.
- [4] J.R. Rice, *The Approximation of Functions II*, pp.76-122, Addison-Wesley Pub., 1969.
- [5] T.J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, pp.120-141, Blaisdell Pub., 1969.
- [6] T. Sasaki and M.T. Noda, Approximate Square-free Decomposition and Root-finding Ill-conditioned Algebraic Equations, J. Inf. Proc, 12, pp.159-168, 1989.
- [7] 小柳義夫, 中川徹, SALS 入門 実験データの解析, 東京大学出版, p.30, 1990.