

## 数学理解支援システム INGRASY の構築

慶應義塾大学 理工学部 齊藤 洋美 (Hiromi SAITO)  
" 永田 守男 (Morio NAGATA)

### 1. はじめに

近年の認知科学の発展によって、記号の世界とイメージの世界を行き来して、人間が物事を理解していることがはっきりしてきた [1][2]。このことを数学の理解という点にあてはめると、数式などの記号と図やモデルなどのイメージとの往来が重要な働きをするということになる。

そこで本研究では、このような人間の理解の構図を既存の数式処理システム Mathematica [3][4] 上に導入することによって、数学の理解を支援するシステムを構築することができるのではないかと考えた [5]。このシステムを INGRASY (INteractive system between GRaphical representations and SYmbolic expressions) と呼ぶ。ここではこの INGRASY の概要とその実現法について述べ、実行例を示したあと、現行の中学校と高等学校における教育カリキュラムとの関連からの検討および高等学校の数学教育に携わる方から頂いた評価をもとにした考察を行う。

### 2. INGRASY システム

#### 2.1. INGRASY の概要

数式とイメージの世界を行き来するシステムを作成するにあたって、既存の数式処理システム Mathematica を利用したのは、単に数式処理や数値計算の機能を持つだけでな

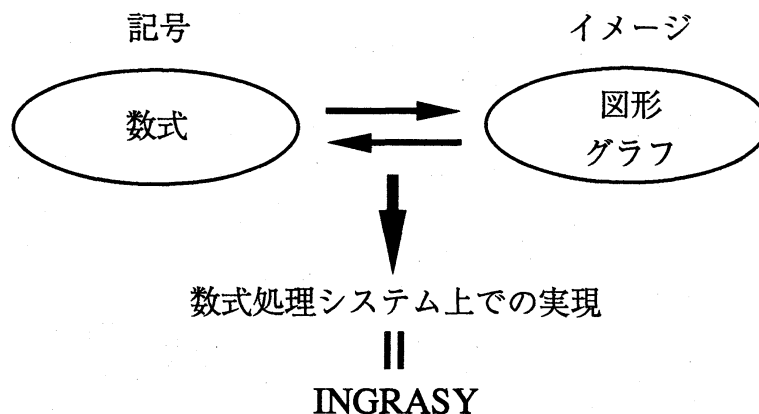


Fig. 1. 数学理解支援システムの構想図

く、かなり高度なグラフィックス機能をも既に備えているからである。Mathematica 内のグラフ作成関数によって、記号である数式がグラフというイメージに視覚化される。数学を理解する上でこのグラフィックスは確かに有効であるが、それはあくまでも記号の世界からイメージの世界への一方向の処理であって、それ以上のことは実現されていない。記号の世界とイメージの世界を行き来するという人間の物事の理解の仕方から考えると、数学の理解を支援するためには、これに加えてイメージの世界から記号の世界への処理を実現させる必要がある。そこで本研究では、この数式処理システム Mathematica にグラフから数式への処理を新たに加えることによって、記号の世界とイメージの世界の相互作用が可能なシステム INGRASY を実現することを考えた。本システムの概要図を Fig. 2 に示す。

Fig. 2 に基づいて、操作および処理のおおまかな流れを説明する。初めに Mathematica に数式を与え、それに対応するグラフを描かせる。これが数式からイメージへの方向の操作である。一方、そのグラフに対して何らかの操作を行うと、システムがそのグラフに対する操作に基づいて数式を操作し、操作後の数式およびグラフを表示することによって、イメージから数式への操作を可能にしている。これらの操作を実現するために、INGRASY では数式からグラフへの処理に Mathematica を用い、グラフから数式への処理を新たに作成した。新たに加えた処理は、Fig. 2 の四角で囲まれた部分である。

## 2.2. INGRASY の実現法

Fig. 2 の四角で囲まれたグラフから数式への処理部分の具体的な動きを Fig. 3 に示す。

この部分では、まずグラフに対してどのような操作を行うのかを選択する。その後、グラフに対する操作に必要な情報をデータファイルとして保存する。具体的には、マウスを用いて点の指定を行い、その点のリストをデータファイルとして保存する。そして、選択された操作に応じた関数がこのデータファイルを用いて処理を行い、実行結果を表示する。この処理を行う関数は Mathematica 上、あるいは Mathematica の外部プログラム上に定義されている。

ここでのポイントは大きく分けて二つあり、一つはマウスによる操作であり、もう一つは外部プログラムとのコミュニケーションとその外部プログラムの構築である。

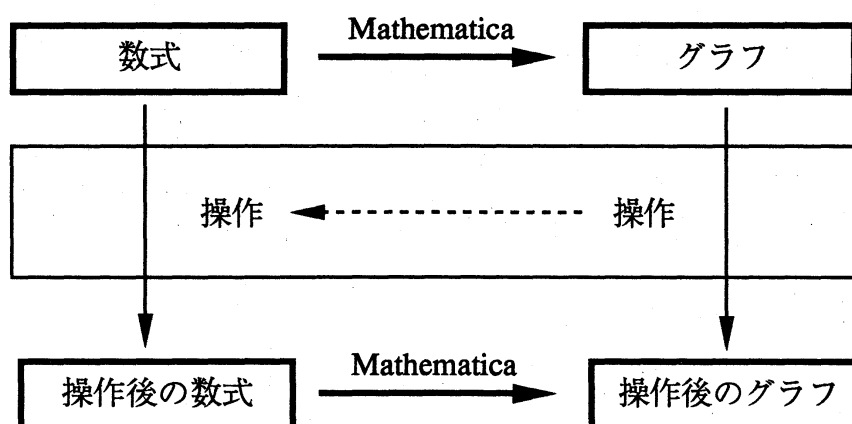


Fig. 2. INGRASY の概要図

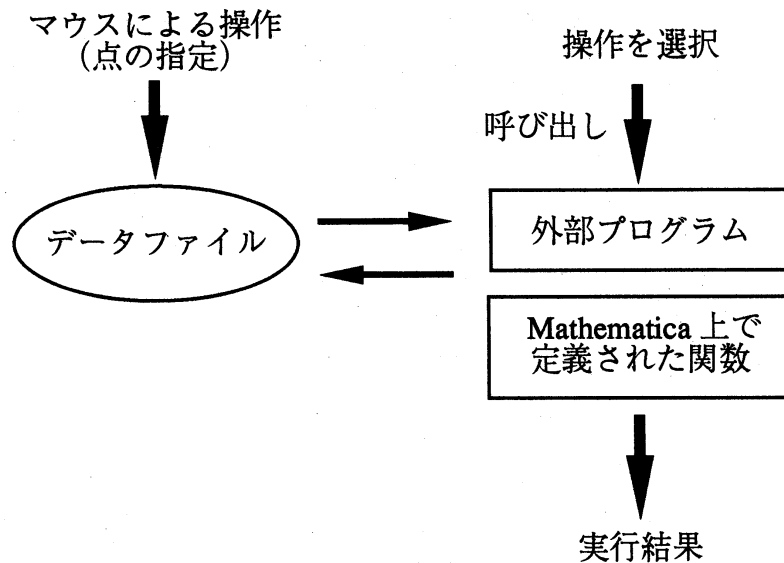


Fig. 3. グラフから数式への処理部分

Mathematica のインタフェースには、テキスト主体型とノートブック型の二種類がある。テキスト主体型は Unix 上で、ノートブック型は Macintosh 上でそれぞれ動く Mathematica のインタフェースである。このノートブック型のインタフェースでは、マウスなどのポインティングデバイスを使って、グラフ上の座標の読み取りや指定が行えるようになっている。したがって、ノートブック型のインタフェースを利用することによって、INGRASY ユーザはマウスでの操作が可能になる。

また、Mathematica Ver.2.0 には、Mathematica と C 言語で構築された外部プログラムとの間のコミュニケーションを実現する MathLink というものがある。この MathLink によって Mathematica の内部から C 言語で構築された外部プログラム中の関数の呼び出し、C 言語で構築された外部プログラムから Mathematica の呼び出し、Mathematica と外部プログラムとの間のデータの交換などが可能になる。このことから Mathematica Ver.2.0 を用い、外部プログラムを C 言語で構築することによって、外部プログラムとのコミュニケーションが可能になる。

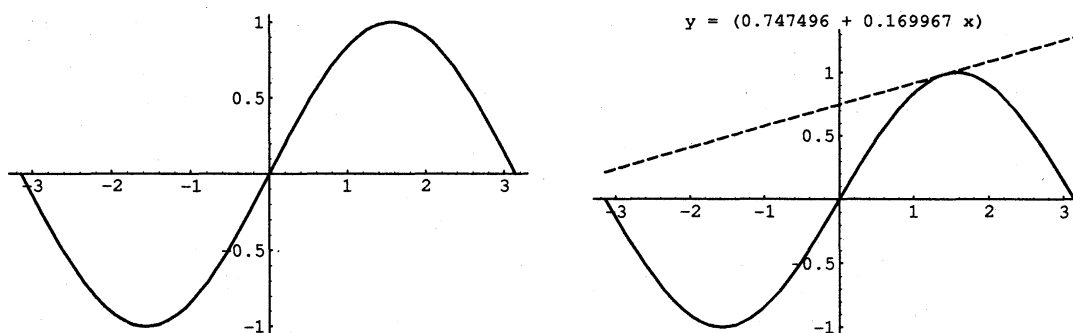
以上より、ノートブック型のインタフェースを持つ Mathematica Ver.2.0 が構築環境としては望ましいと考えた。

Mathematica では、二次元、三次元、等高線、濃淡の四種類のグラフを作成することが可能になっているが、本研究ではマウスによるグラフ上での座標の読み取りや指定を行うことを考慮して、二次元グラフのみに限定している。

### 3. 現在の INGRASY

現在は、ノートブック型のインタフェースを持つ Mathematica Ver.1.1 でマウスによる操作の部分を確認し、テキスト主体型のインタフェースを持つ Mathematica Ver.2.0 で C 言語で構築された外部プログラムとのコミュニケーションの部分を確認している。よって、この二つの部分はまだ融合されていない。しかし、実際にこの INGRASY のような

```
In[ 1 ] := Plot [Sin[x], {x, -Pi, Pi}]
```



```
f[x] = Sin[x]
Df[x] = Cos[x]
Tangent Point {x1, f[x1]} = {1.4, 0.98545}
Tangent Line
Y - f[x1] = Df[x](X - x1)
Y - 0.98545 = Df[1.4](X - 1.4)
Y = 0.747496 + 0.169967 X
```

Fig. 4. 接線の実行例

システムが数学の理解支援システムとして有効であるかどうかを確認したかったので、テキスト主体型のインタフェースを持つ Mathematica Ver.2.0 を用い、グラフから数式への処理は Mathematica 上で定義された関数のみで行うこととし、グラフの操作に必要な点の指定は、関数の引数としてキーボードから入力することによって、INGRASY の持つ機能の一部を実現している。

現段階で実現されているグラフ側からの操作項目は次のようなものである：

平行移動・回転移動・拡大縮小・点対称移動・線対称移動・接線・面積・複数点指定による曲線の決定（二点指定による直線の決定）・一点と傾きによる直線の決定・極大点および極小点による曲線の決定・二点指定のベクトル表示・二点間の距離・領域の表示この中から接線、平行移動、領域の表示についての実行例を 4. に示す。

## 4. 実行例

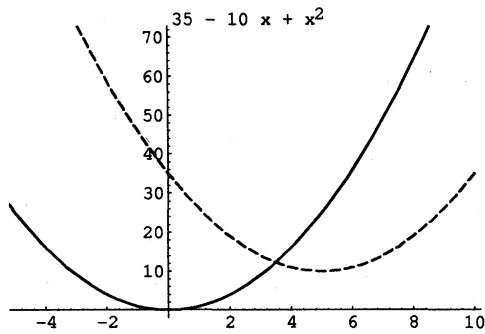
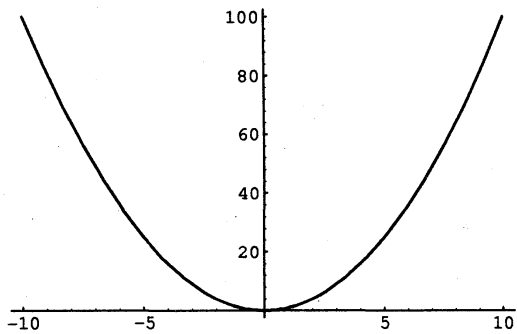
### 4.1. 接線

Mathematica によって描かれたグラフに対して、関数 Tanline に接点の  $x$  座標 ( $x=1.4$ ) とグラフの関数 ( $\text{Sin}[x]$ ) を引数として与えると、Fig. 4 のように  $x=1.4$  における接線を描き、同時にその接線の関数とそれが導かれた過程とを示す。

### 4.2. 平行移動

Mathematica で描かれた関数に対して、関数 Ptrans に  $x$  軸正方向と  $y$  軸正方向に対する平行移動量 ( $p=5$ ,  $q=10$ ) とグラフの関数 ( $x^2$ ) を引数として与えると、Fig. 5 のように平行移動したグラフを描き、同時にその関数とそれが導かれた過程を一次変換行列表示とともに示す。

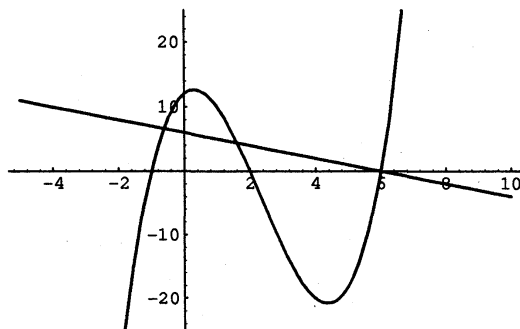
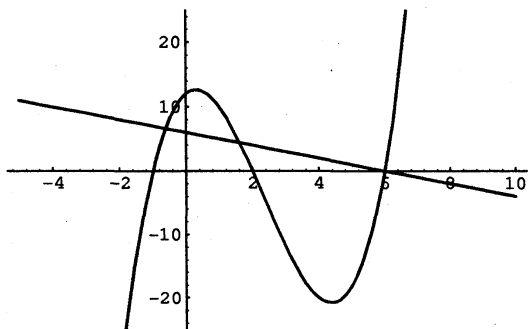
In[ 2 ] := Plot [x^2, {x, -10, 10}]



$$\begin{aligned}
 X &= x + 5 \\
 Y &= y + 10 \\
 y = x^2 &\rightarrow Y - 10 = (X - 5)^2 \rightarrow Y = X^2 - 10X + 35 \\
 [X \ Y \ 1] &= [x \ y \ 1] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Fig. 5. 平行移動の実行例

In[ 3 ] := Plot [{x^3-7x^2+4x+12, -x+6}, {x, -5, 10}]



$$\begin{aligned}
 &\{1, 8\} \\
 &y < 12 + 4x - 7x^2 + x^3 \\
 &y > 6 - x \\
 &\{4, -5\} \\
 &y > 12 + 4x - 7x^2 + x^3 \\
 &y < 6 - x
 \end{aligned}$$

Fig. 6. 領域の実行例

### 4.3. 領域

Mathematica で描かれた関数に対して、関数 Domain に知りたい領域の点の座標のリスト ( $\{1, 8\}\{4, -5\}$ ) とグラフの関数 ( $x^3 - 7x^2 + 4x + 12, -x + 6$ ) を引数として与えると、次頁 Fig. 6 のように点の座標とその領域とを示す。

### 5. 評価

本来はこの INGRASY を高等学校などの生徒に実際に使用してもらい、そこから評価を行うことが望ましい [6]。しかし、前に述べた現状のシステムの下ではこうした評価は難しいので、現段階における INGRASY を高等学校の数学の先生に見て頂き、御意見を伺った。このときの御意見をまとめると次のようになる。

現在の数学教育のカリキュラム [7][8] では、中学校の『数と式』という分野で式の計算を学ぶ。また、『図形』『数量関係』という分野でも、主に記号でその理論を学ぶことになっている。このように中学校では記号の世界の理論を数学の基礎力として教えることに重点を置いている。イメージの世界というのは高等学校になって初めて導入されてくる。中学校三年で学ぶピタゴラスの定理 (三平方の定理) によって二点間の距離の概念が明らかになり、イメージの世界の導入が意味を成すことになる。このイメージの世界の導入によって記号の世界に意味づけがなされ、さらに記号の世界だけでは考えることが困難であるような空間にまで、数学の世界を広げていくことが可能になる。このように中学校から高等学校の数学のカリキュラムそのものがまず記号、それからイメージという意識をもって構成されていることから、本研究で数学の理解の全体構造を記号の世界とイメージの世界という二つの形で取り上げ、さらに両世界の相互作用を可能にするシステムを実現したことは、数学の理解を支援するという目的にかなっている。

また、現段階でのシステムの機能はおおむね有効であるといえる。今後は、まずマウスによる操作部分と C 言語で構築された外部プログラムとのコミュニケーション部分とを結合し、さらに最もイメージの世界が必要であると考えられる空間、すなわち三次元を扱えるシステムの実現が望ましい。

### 6. 結論

以上の評価をもとに結論づけると、数式とグラフの相互作用を実現するシステム INGRASY は、数学の理解を支援するシステムとして有効であると考えられるであろう。さらに発展させれば、記号の世界とイメージの世界の相互作用を実現するシステムは、人間の理解を助ける道具として役立つことができるといえる。このようなシステムが完全な形で実現すれば、教科書や参考書などを目の前に学習するよりも、もっと興味を持って生徒が自主学習することができるであろうと考えている。数学嫌いの生徒を少なくすることにも貢献できるかもしれない。

今後は、まずマウスによる操作部分と C 言語で構築された外部プログラムとのコミュニケーション部分とを結合する。そして、システムの機能を数学教育の観点から細かく検討し、追加していこうと考えている。また、三次元を扱えるシステムを、現在のシステムの延長として実現することは不可能であると思われるので、INGRASY とは別に考えてみたいと思っている。

## 謝 辞

本研究の評価および検討にあたり、数々の有益な意見を下された慶應義塾女子高等学校・数学科教諭の国府方久史先生に深く感謝致します。

## 参 考 文 献

- [1] 佐伯 胖: コンピュータと教育 (岩波新書・1986)
- [2] 東 洋・大山 正 監修 佐伯 胖 編: 推論と理解認知心理学講座 3. (東京大学出版会・1982)
- [3] 小池 慎一: Mathematica 数式処理入門 (技術評論社・1990)
- [4] Stephen Wolfram: Mathematica A System for Doing Mathematics by Computer (日本語版) Second Edition (アジソン・ウエスレイ・パブリッシャーズ・ジャパン株式会社・1992)
- [5] 齊藤洋美・永田守男: 情報処理学会第44回全国大会論文集(6) (1992・pp223-224)
- [6] 竹谷 勝・吉村 啓 編: 数学教育とコンピュータ — 教育用ソフト検討の視点 —, 数学教育, 臨時増刊 No. 396 (明治図書・1991.3)
- [7] 文部省 中学校学習指導要領
- [8] 文部省 高等学校学習指導要領