数理解析研究所講究録
第 850 巻 1993 年 185-197

確率微分方程式に対する各種の近似法

立命館大学理工　山田　俊雄 (Toshio Yamada)

こゝでは各種の近似法のなかからPicard近似と講演者によって定式化された確率微分方程式に対するNewton法について議論しよう。

1. Picard近似について

$(\Omega, \mathcal{F}, P\,;\,\mathcal{F}_t)$ を通常のフィルター付の確率空間とする。確率微分方程式

$$(1\cdot 1)\quad \begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)\,dB_t + b(t, X_t)\,dt \\ X_0 = \xi . \end{cases}$$

こゝで B_t は $\mathcal{F}_t$-Brown運動，

について の解の存在と一意性については，σ 及び b にLipschitz条件を仮定して，K. Ito ([1]) が1942年に証明を与えた。K. Ito の方法はPicard近似によるもので，その証明の中で解とPicard近似の誤差評価が具体

的に与えられている. 最近 L. Schwartz ([5]) は (1.1) の一般化である semi-martingale 方程式についても係数に Lipschitz 条件を置くとき, 極めて速いスピードで Picard 近似が解に収束することを注意している. この L. Schwartz のコメントにも触れながら まず Lipschitz 条件の下での Picard 近似をとりあげる. 記号を簡単にするため1次元の場合にのべるが, 結果を多次元に 適当な修正を経て拡張できる.

1. A. Lipschitz 条件の下での Picard 近似

次の条件を σ, b に仮定.

(条件 L) ある $K>0$ が存在して

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)| \le K|x-y|, \quad \forall(t,x,y)\in[0,\infty)\times R^2.$$

(条件 A) ある $L>0$ が存在して

$$|\sigma(t,x)|^2+|b(t,x)|^2 \le L(1+x^2)$$
$$\forall(t,x)\in[0,\infty)\times R^1.$$

さて 初期条件に $E[|\xi|^2]<\infty$ を仮定して (1.1) の Picard 近似列を次のように作る.

$$X_t^{(0)} \equiv \xi,$$
$$X_t^{(n+1)} = \xi+\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\,dB_s+\int_0^t b(s, X_s)\,ds,$$

$n=0,1,2,\cdots$

$1<T<\infty$ を任意に選んで固定する.
$E[\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^{(1)}-X_s^{(0)}|^2] = M < \infty$ はおくれ

分るがこの M を用いて $\max(8, 2T) = C_T$ とおくと
Lemma

$$E[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(n+1)}-X_s^{(n)}|^2] \leq M\frac{(C_T K^2)^n t^n}{n!}$$

$$0\leq t\leq T \quad \square$$

を帰納法を用いて係数 Lipschitz 条件と(A)の下で示せる.
以上により $\sum_{n=1}^{\infty} E[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|] < \infty$.

また $P(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}| > \frac{1}{2^n})$

$$\leq M\frac{(C_T K^2)^n T^n 4^n}{n!}$$ で右辺は収束列

Borel-Cantelli のレンマで $X_t^{(n)}$ は $[0, T]$ で一様収束し極限の過程 X_t が (1.1) の解で一意性も保障されている。

さて $E(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2)^{1/2} = \|Y\|_{S^2}$ とおいて L. Schwartz

の記号とコメントに従って誤差評価をまとめておこう.
$Y_\cdot^t = Y_{t\wedge\cdot}$ とおく。

$$\|(X_\cdot - X_\cdot^{(n)})^t\|_{S^2} = \left\{E\left(\sup_{0\le s\le t}|X_s - X_s^{(n)}|^2\right)\right\}^{1/2}$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty}\left\{E\left[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}|^2\right]\right\}^{1/2}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\|(X_\cdot^{(k+1)} - X_\cdot^{(k)})^t\|_{S^2}$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{M(C_T K^2)^k}{k!}t^k\right)^{1/2}.$$

こゝで $e(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)^{1/2}$ と定義

$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)^{1/2} \le \left(\frac{x^n}{n!}\right)^{1/2} e(x)$ に注意.

Theorem 1.1. (条件 L, A の下で)

(1.1)の解 X と Picard近似 $X^{(n)}$ について

$$\|(X_\cdot - X_\cdot^{(n)})^t\|_{S^2} \le M^{1/2}\left\{\frac{(C_T K^2 t)^n}{n!}\right\}^{1/2} e(C_T K^2 t)$$

$0 \le t \le T$ である。

I.B 非Lipschitz の下での Picard 近似.

確率微分方程式においても常微分方程式の場合と同じように非Lipschitz 条件でも 解の存在と一意性が保障される場合がいくつか知られている. このときに Picard近似は解に収束するだろうか?. これについては, まだ決定的な結果は得られていないが, いくつかの結果がある. そのなかで典型的

なものを一つとりあげる．本質的には係数の Osgood 条件を仮定する場合である．（［7］参照）

（条件 B）　$L > 0$ が存在して

$$|\sigma(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq L(1+x^2)$$
$$\forall (t,x) \in [0,\infty) \times R^1$$

且つ

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 + |b(t,x) - b(t,y)|^2 \leq K(|x-y|^2)$$

こゝで

K は $[0,\infty)$ で定義され $K(0)=0$，連続，単調増加 Concave 且つ $\displaystyle\int_{0+} \frac{du}{K(u)} = \infty$．

Theorem 1.2　（条件 B）の下で $1 < T < \infty$ を固定すると Picard 近似列 $X^{(n)}$ は (1.1) の解 X に収束する．即ち

$$\| X^{(n)}_{\cdot} - X_{\cdot} \|_{S^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

なお条件 B の下で (1.1) の解の存在と一意性は保障されている．∎

Remark 1.　S. Kawabata（［2］）は上の定理を改良して

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 + |b(t,x) - b(t,y)|^2 \leq \frac{K(|x-y|^2)}{t^\alpha}$$

$0 \leq \alpha < 1$，$\displaystyle\int_{0+} \frac{du}{K(u)} = \infty$ の下で

Picard近似を論じている。

Remark 2

方程式 $dX_t = \sqrt{X_t(1-X_t)}\, dB_t$ に対し解の存在と一意性は保障されているが Picard 近似列が解に収束するか否かは不明である。■

2. 確率微分方程式に関する Newton 法

こゝでは Newton 法を確率微分方程式に適用する試みをのべる。詳しくは [11] を参照して下さい。

$$(2\cdot1)\quad \begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt \\ X_0 \equiv \xi \end{cases}$$

に対応して常微分方程式

$$(2\cdot2)\quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

を考える。(2・2) に対しては Chaplygin-Vidossich 法とは

$$(2\cdot3)\quad \begin{cases} u'_{n+1} = f(t, u_n(t)) + f_x(t, u_n(t))(u_{n+1}(t) - u_n(t)) \\ u_{n+1}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

という準線形近似である。この近似は Chaplygin によって

提案されたものである。 Vidossich [12] は適当な関数空間を設定し，operator F を

$F(x(t)) = x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ とおくと，

(2.3) の近似は F についての Kantorovitch [10] の意味での Newton 法近似であることを示した。

さて (2.1) に対して Chaplygin - Vidossich 近似のアナロジーを試みよう。 ごく自然に次の近似を考えることができる。

$$(2.4) \quad X_t^{(0)} = \xi$$

$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})ds$$
$$+ \int_0^t \sigma_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)})dB_s$$
$$+ \int_0^t b_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)})ds \quad ■$$

以下で係数に適当な仮定を置き，関数空間をうまく設定すると (2.4) の方法は operator F,

$F(Z_\cdot)(t) = Z_t - Z_0 - \int_0^t \sigma(s, Z_s)dB_s - \int_0^t b(s, Z_s)ds$

についての Newton 法であることを示そう.

$(\Omega, \mathcal{F}, P : \mathcal{F}_t)$ を通常のフィルター付確率空間で B_t は $\mathcal{F}_t$ - Brown 運動とする.

係数 σ 及び b について，次の仮定をおく。

（条件 2.A）

$\sigma(t,x)$ 及び $b(t,x)$ は2変数について連続。

$D_x\sigma(t,x) = \sigma_x(t,x)$，$D_x b(t,x) = b_x(t,x)$

がともに存在して，いずれも x について連続．

定数 $K>0$，$M>0$ が存在して，

$$|\sigma(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq K(1+x^2),$$

$$|\sigma_x(t,x)| \leq M, \quad |b_x(t,x)| \leq M$$

$$\forall (t,x) \in [0,\infty)\times R^1 \quad \blacksquare$$

条件（2.A）の下で（2.1）に対して解の存在と道ごとの一意性が保障される．（条件 2.A）より Lipschitz 条件が導びかれるのでこれは明らか。（2.1）の解を (X_t, B_t) と記す。さて $0<T<\infty$ を任意に選んで固定する。

$$\mathcal{L}_T = \{\varphi : [0,T]\times\Omega \to R,\ \varphi \text{ は } \mathcal{F}_t\text{-適合},\ t \text{ について連続で } E[\sup_{0\leq t\leq T} |\varphi(t,\omega)|^2] < \infty\}$$

$\varphi \in \mathcal{L}_T$ に対してノルム

$$\|\varphi\|_{S^2} = \|\varphi\| = \{E[\sup_{0\leq t\leq T} |\varphi(t,\omega)|^2]\}^{1/2}$$ ときめる．

t を固定して $\|\varphi(t\wedge\cdot,\omega)\| = \|\varphi\|_t$ とおく。

$Z \in \mathcal{L}_T$ に対して

$$F(Z)(t) = Z_t(\omega) - Z_0(\omega) - \int_0^t \sigma(s, Z_s(\omega))\,dB_s - \int_0^t b(s, Z_s(\omega))\,ds \quad , \quad 0 \le t \le T$$

とおく。直ちに,

Lemma 2·1　F は $\mathcal{L}_T \to \mathcal{L}_T$ である。■ を得る。

次に F について Gâteaux 微分を考えよう。

Lemma 2·2　$Z \in \mathcal{L}_T$ を固定する。

$\forall h \in \mathcal{L}_T$ に対して

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u}\left\{ F(Z+uh) - F(Z) \right\}$$ が $\mathcal{L}_T$ でのノルム収束の意味で存在する。

この極限を $dF(Z;h) = dF(Z;h)(t)$ で表すと

$dF(Z) : \mathcal{L}_T \to \mathcal{L}_T$ であって

$$dF(Z;h)(t) = h(t,\omega) - h(0,\omega) - \int_0^t \sigma_x(s, Z_s)\,h(s,\omega)\,dB_s - \int_0^t b_x(s, Z_s)\,h(s,\omega)\,ds$$

である。■

Z に於る Gâteaux 微分 $dF(Z)$ について,その逆写像の存在を確めよう。

Lemma 2・3.　$Z \in \mathcal{L}_T$ を固定する。
${}^\forall \varphi \in \mathcal{L}_T$, $\varphi(0, \omega) = 0$ に対して
$\varphi(t, \omega) = dF(Z ; h)(t)$ をみたす $h \in \mathcal{L}_T$,
$h(0, \omega) = 0$ が一意的に存在する
この h を $dF^{-1}(Z)(\varphi) = h$ で表す。 ■

（証明）

$$\varphi(t, \omega) = h(t, \omega) - \int_0^t \sigma_x(s, Z_s) h(s, \omega) dB_s - \int_0^t b_x(s, Z_s) h(s, \omega) ds$$

は線形確率微分方程式で拡散項，drift 項はともに Lipschitz 条件をみたすので $h(t, \omega)$ が存在して，一意である。■

さて F に対する L. A. Kantrovitch [10] の意味での Newton 近似列は

$$\begin{cases} X_t^{(0)} = \xi \\ X_t^{(n+1)} = X_t^{(n)} - dF^{-1}(X_\cdot^{(n)})\left(F(X_\cdot^{(n)})\right)(t) \end{cases}$$

で与えられるが，これを書き換えると

$$dF(X_\cdot^{(n)} ; X_\cdot^{(n+1)} - X_\cdot^{(n)}) = -F(X_\cdot^{(n)})$$

$$\text{左辺} = X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} - \int_0^t \sigma_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}) dB_s$$

$$-\int_0^t b_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)})\,ds$$

$$= 右辺 = -X_t^{(n)} + \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\,dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})\,ds$$

である。これは(2.4)で考えた近似列そのものである。

Newton法の解への収束をのべる前に1つの評価式を挙げておく。

Lemma 2.4 ある定数 $L > 0$ が存在して

$$\|dF^{-1}(z)(\varphi)\|_t^2 \leq 3\|\varphi\|_t^2 e^{Lt}$$

$$0 \leq t \leq T, \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}_T \ .$$

Theorem 2.1 (局所的収束) 条件2.A の下で、

δ を $120\delta M^2 e^{L\delta} = \alpha < 1$ となるように選ぶ。

このとき $\lim_{n\to\infty} E(\sup_{0\leq t\leq\delta} |X_t^{(n)} - X_t|^2) = 0$ である。

誤差評価として

$$\|X_\cdot^{(n)} - X_\cdot\|_\delta \leq \frac{\alpha^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{\alpha}} \|X_\cdot^{(1)} - X_\cdot^{(0)}\|_\delta$$

がなりたつ。 ∎

Theorem（大域的収束）

条件2.A に加えて さらに定数 $N>0$ が存在して，

$|\sigma(t,x)| \leq N$ ，$|b(t,x)| \leq N$，$^{\forall}(t,x) \in [0,\infty)\times R^1$ とする．

このとき 任意の $0<T<\infty$ を固定すると

$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(n)} - X_t|^2] = 0$$ が

$$\sup_n E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(n)}|^2] < \infty$$ が成り立つとき，

且つそのときに限り成り立つ。 ∎

Remark. Y. Ouknine は最近 Newton 法近似の大域的収束についての上の結果を改良し 誤差評価を次のように与えることに成功したようである。（Preprint）

$$\| X_{\cdot}^{(n)} - X_{\cdot} \|_{S^2} \leq \mathrm{Const}\left\{ \frac{(\mathrm{Const}\cdot t)^{n+1}}{(n+1)!} \right\}^{1/2}$$

∎

REFERENCES

(Picard Approximation)

1. K. Ito, *Differential Equations Determining Markoff Processes (Translated from the original Japanese. First Publication in Pan-Japan Math. Coll.No.1077 (1942))*, Kiyoshi Ito Selected Papers (D.W.Strook and S.R.S.Varadhan, eds.), Springer-Verlag, 1987, pp. 42-75.
2. S.Kawabata, *On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations*, Stochastics and Stoch. Rep. 30 (1990), 69-84.
3. G.S.Ladde and S.Seikala, *Existence, Uniqueness, and upper estimates for solutions of Macshane type stochastic differential systems*, Stochastic Analysis Appl. 4 (1986), 409-429.
4. P.A.Meyer, *Sur la méthode de L.Schwartz pour les e.d.s.*, Séminaire de Probabilités 25 (1991), 108-112.
5. L.Schwartz, *La convergence de la série de Picard pour les e.d.s.*, Séminaire de Probabilités 23 (1989), 343-354.
6. C. Tudor, *Approximaera succesiva a soltilor equatilor Ito cu doi parametri*, St. Cerc. Mat. 36 (1984), 50-61.
7. T. Yamada, *On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. 21 (1981), 501-515.

(Newton's method)

8. A.T.Bharucha-Reid and M.J.Christensen, *Approximate solution of random integral equations ; General methods*, Math. Comput. in Simul. 26 (1984), 321-328.
9. A.T. Bharucha-Reid and Kannan, *Newton's method for random operator equations*, Nonlinear Anal. 4 (1980), 231-240.
10. L.A.Kantorovitch and G.P. Akilov, *Functional Analysis 2nd Ed.*, Pergamon Press, Oxford and New York, 1982.
11. S. Kawabata and T. Yamada, *On Newton's method for stochastic differential equations*, Séminaire de Probabilités 25 (1990), 121-137.
12. G. Vidossich, *Chaplygin's method is Newton's method*, J.Math.Anal.Appl. 66 (1978), 188-206.
13. Y.Ouknine, *Approximation de Newton pour les équation différentielles stochastiques*, preprint.