数理解析研究所講究録
第 852 巻 1993 年 112-125

ヘリカル対称性を持つ流れ場の数値シミュレーション

大阪大学基礎工学部　高岡正憲 (Masanori Takaoka)

1　はじめに

ヘリシティと渦伸長は、３次元の流れ場に特有のものであり、乱流のカスケード理論や流れ場の特異性を考える際に中心的役割をする大切なものである。全ヘリシティは全エネルギーと共に非粘性流体における保存量として知られている、それ故非粘性極限に於ける両量の保存性が、いわゆる乱流のカスケード理論を検証する上で重要となる。ここで注意しなければならないことは、全ヘリシティのみならず**全ての渦面**内のヘリシティが保存量であり、これらが流体のダイナミックスに拘束を与えるということである。もちろん、この量は、ヘリシティ密度$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}$とは異なり、Galilean 不変である。また、解の特異性を考える上での渦伸長のもっとも大切な特性は、外場から受ける引き伸ばしではなく非線形性として現れる自己によるそれである。三次元流としての性質を保ち、これらの両方を調べることの出来るもっとも簡単な（対称性の高い）流れ場として、ヘリカル対称な場が考えられる。

一般の３次元の流れ場では、渦面を構成する事は難しく、数値シミュレーションではよく等渦度面が代用され、それに基づいて渦のダイナミックスが調べられている。しかしながら、例えばこの等渦度面のトポロジーは、非粘性流に於いても保存されず、特に引き伸ばしの大きいところを経験した部分では、渦面との差異が顕著となる。他方、今考えようとしているヘリカル対称流では、後でも述べるように渦面を簡単に構成する事が出来、先の各渦面でのヘリシティといったものを調べる事が可能となる。しかも、数値計算を行うときに、メモリ及び計算時間の節約がはかられる。

今回はこの流れ場におけるヘリシティのダイナミックス（生成）を中心に報告する。最近、Aref と Zawadzki は絡まりのない（ヘリシティ＝０の）２つの楕円渦が適当な配置をとるとき絡まりを持つようになる事を数値シミュレーションにより示した。一般に、反転対称性がないような初期条件を用いるとヘリシティの生成が期待されるが、ここでは比較のためとシンプルな形状であることから、彼らのそれに相当するものを用いた。

2　ヘリカル対称流

場がヘリカル対称性を持つとは、

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(r,\theta+\epsilon z,t)=\boldsymbol{v}(r,\phi,t)$$

という型で書ける時をいう。ここに、ϵはヘリカル構造の z方向へのピッチ（$2\pi/\epsilon$）を表すパラメータである。ただし、その定義からも分かるように、このことは流線や渦線が同様にピッチを持つへリカル状になることを意味しない。このような対称性を持つ場を表現するには、次のような Beltrami ベクトルを用いると便利なことが知られている。

$$\boldsymbol{h} = h^2(\boldsymbol{e}_z - \epsilon r \boldsymbol{e}_\theta)$$

ここに$h^2 = \frac{1}{(1+\epsilon^2 r^2)}$ であり、このベクトルが単位ベクトルではないことに注意する。また、このベクトルは次のような性質を持ち、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{h} = -2\epsilon h^2 \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{h} \cdot \nabla f(r, \phi, t) = 0$$

非圧縮性流体の速度場（$\boldsymbol{u}$）と渦度場（ω）は、２つのスカラー関数$\psi(r,\phi)$、$\chi(r,\phi)$ を用いてそれぞれ次のように書ける。

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{h} \times \nabla\psi - \boldsymbol{h}\chi, \qquad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{h} \times \nabla\chi + \boldsymbol{h}(2\epsilon h^2 \chi - \Delta^*\psi)$$

ここで$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{rh}\frac{\partial}{\partial \phi}$, $\Delta^* = \frac{1}{rh^2}\frac{\partial}{\partial r}(rh^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2h^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ である。

　このとき、$\nabla\chi \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ に注意すると、χの任意関数の等値面が渦面を与えることが分かる。ただし、$\chi \equiv 0$ の時は、軸対称（r =const.）な面が渦面となる。

　このとき基礎方程式（ψ, χの支配方程式）は、

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(r,\phi)} + \nu\Delta^*\chi - 4\nu\epsilon^2 h^4 \chi + 2\nu\epsilon h^2 \Delta^*\psi$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta^*\psi}{\partial t} = &\frac{2\epsilon h^2}{r}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(r,\phi)} - \frac{1}{r}\frac{\partial(\Delta^*\psi,\psi)}{\partial(r,\phi)} + 2\epsilon^2 h^2 \chi \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \\ &- 8\epsilon^3 h^4 \chi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + 2\epsilon^2 h^2 \Delta^*\psi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - 2\nu\epsilon\Delta^*(h^2\chi) + \nu\Delta^{*2}\psi\end{aligned}$$

と書ける。特に、$\epsilon = 0$ の時は、$\psi(r,\theta)$ を流れ関数とする二次元流の Navier-Stokes 方程式となり、$\epsilon \to \infty$ の時は、$\tilde{\chi} = \chi/\epsilon$, $\tilde{\psi} = \psi/\epsilon$ と変換すると $\tilde{\psi}(r,z)$ を Stokes の流れ関数とする軸対称流のそれとなる。

　また、このとき (r,ϕ) 面内での積分量は各々次のように定義できる。

エネルギー：　$E = \frac{1}{2}\int \left\{\psi\varpi + \chi^2\right\} h^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$

エンストロフィ：　$Q = \frac{1}{2}\int \left\{(\nabla\chi)^2 + (\epsilon r \partial_r \chi)^2\right\} h^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$

ヘリシティ： $H=-2\int\left\{\varpi+\epsilon h^2\chi\right\}\chi h^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$
ヘリシティ変化率：
$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=4\nu\int\left\{\epsilon h^2(\varpi+2\epsilon h^2\chi)^2-(\varpi+2\epsilon h^2\chi)\Delta^*\chi\right\}h^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$
ここに$\varpi=-\Delta^*\psi$ である。

3　数値計算の方法と結果

数値計算の方法としては、まず $f(r,\phi,t)=\sum f_n(r,t)\mathrm{e}^{-in\phi}$ とψ,χをϕ方向に Fourier 展開し、$r=R_0\tan(\pi\xi)$ と座標変換することにより $0\le r<\infty$ を $0\le\xi<1/2$ とする。$r-$方向については２次の中心差分、$\phi-$方向については 2/3-則で aliasing 項を取り除いた擬スペクトル法、時間方向の積分には線形項の一部を解析的に繰り込み安定化をはかった修正 Runge-Kutta-Gill 法を用いた。レゾリューションは、Reynolds 数により $(N_r,N_\phi)=(128,64),\cdots,(1024,512)$ の範囲で変えた。

初期条件としては次の２つの場合を考えた。

·CaseI：
$$\chi=\exp\left\{-r^{2p}\left(\frac{\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\sin^2\phi}{b^2}\right)^p\right\}$$

$$\varpi=-2\epsilon h^2\chi-\epsilon r\partial_r\chi=2\epsilon\left\{pr^{2p}\left(\frac{\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\sin^2\phi}{b^2}\right)^p-h^2\right\}\chi$$

·CaseII：
$$\chi=0$$

$$\varpi=\frac{2pr^{2p-1}}{h}\left(\frac{\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\sin^2\phi}{b^2}\right)^{p-1}$$
$$\left\{\left(\frac{\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\sin^2\phi}{b^2}\right)^2+\sin^2\phi\cos^2\phi\left(\frac{-1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\right\}^{1/2}$$
$$\exp\left\{-r^2\left(\frac{\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\sin^2\phi}{b^2}\right)\right\}^p$$

両者は等渦度面でみたとき同じ構造を持っており、$z=$const. の面内では楕円状の渦輪となっている。この全体的な様子を図１に３次元の鳥瞰図として示す。また、両者の大きな違いとしては、前者においては $H=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\omega_z=0$ であるのに対し、後者では $H=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}=0,\ \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\neq0$ である。今回の計算では特に$\epsilon=1,\ p=2,\ a=1,\ b=3,R_0=3$ とした。このとき前者は、Aref

と Zawadzki により調べられた二つの楕円渦輪の初期条件を連続化したものに相当する。

3.1 Case I の結果

図2に初期の渦線の様子を示す。計算領域は無限空間であるが、表現の都合上中心付近の適当なボックス内のみ取り出し、x，y，z，(1，2，3) の各方向からみたものを書いてある。各渦線は、$z=$const. の面（ここでは3面）で、(x,y) の正方格子上から始まるもので、各線の長さと向きから、それぞれの場所での渦度場の強さ及び向きが分かる。

全体の場の時間発展の様子は、図3に示すように、まず誘導速度により (x,y)−平面でS字型になると同時に z−成分も現れ3次元的になってくる（図3.a）。さらにそれが引き伸ばされ薄い渦層状となり、スパイラル構造を持つようになる（図3.b）。そして粘性の効果で融合して中心付近から軸対称構造が発達しその領域の半径が徐々に大きくなってくる（図3.c,d）。

このときの様子を、ヘリシティの分布のダイナミックスという面からみてみると、次のような事が分かる。先にも述べたように、今の場合 $\chi(r,\phi)$ の任意関数の等値面が渦面を与え、各渦面でのヘリシティは非粘性流体に於ける保存量である。渦面は初期に図4 a に示すように楕円であるが、まずS字型となり、薄い層状の領域からなるスパイラル構造を持つようになる。図4 b にこのときの様子を示す。（イ）は渦面、（ロ）は各渦面に付随するヘリシティの密度 f† の分布、（ハ）は各渦面に付随するヘリシティ変化率の密度である。図（イ）中の太線で示した渦面は、（ハ）に矢印で示した部分に対応し、もっともヘリシティが変化している場所を示している。やがて中心付近から軸対称構造が現れ、そこにかなり秩序だった状態で、ヘリシティの分布がみられる（図4.c）。図（イ）中の太線で示した渦面は、（ロ）に矢印で示した部分に対応し、その内部に正のヘリシティが秩序だって分布していることが分かる。また、（ハ）の分布と比べると、そこではもうほとんどヘリシティが変化していないことも分かる。

次にこれを Fourier スペクトルの時間変化から調べてみる。ヘリシティはエネルギーやエンストロフィと違い正定値ではないので、図中では Fourier アンプリチュードの絶対値をとり、符号は白まるで正を黒三角で負を示している。図5の時間発展から分かるように、まず層状のスパイラル構造の形成に対応して高波数帯がエキサイトされ、やがて粘性散逸で高波数側からディケイしていく。このとき正負の値を持つスペクトルは、ランダムに散らばっているのではなく、ある程度まとまった形でバンドを形成している。そして時間とともに、正の値のものは、より大きいスケールにトランスファされるの

$\dagger$ これは通常のヘリシティ密度 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}$ と異なり Galilean 不変な量である。

にたいし、負の値のものは、より小さいスケールにトランスファされ粘性効果により散逸していく。結果として、正の値のものが低波数側に大きい領域を持つようになり最終的に正のヘリシティが現れる（生き残る）ことになる。

最後にReynolds数（粘性）依存性を調べるために、図6に粘性の異なる6種類の計算における、エネルギー、エンストロフィ、ヘリシティ、ヘリシティ変化率の時間発展の様子を示す。ここで、今の渦の初期における循環は

$$\Gamma = \int_0^\infty \omega_{\phi(\phi=\phi_0)} \mathrm{d}r = 1$$

であり、この循環を持つ渦管が1回絡まると$2\Gamma^2$のヘリシティが出来るので、今生成されたヘリシティは有意の量であることを注意しておく。また、系の持つ高い対称性により約1桁に渡るReynolds数領域を調べることもできた。まず、エンストロフィのグラフから分かるように、3次元のそれと同様にある時刻でピークを持つ。これは、渦の引き伸ばし効果により小さいスケールの場が造られることに対応する。ただし、そのピーク値の大きくなり方の粘性依存性は3次元のそれより弱い。また、粘性が小さくなったときのエネルギーとヘリシティの保存性を見てみると、前者はより保存されているが、後者はむしろその変化が大きくなっている。しかしながらこのことは、非粘性極限でヘリシティの保存性の破れを意味するものではない。というのは、この変化のピークを迎える時間は、ベキ関数的に粘性に依存し大きくなっているからである。

3.2 Case II の結果

Case I と同様に図7に渦線の時間発展の様子を示す。図より、渦度の大きい（渦線の長い）所は先のものと同様に楕円形をしているが、内部の様子（渦線の向き）はかなり違って円弧状となっている。このことは先に述べた、$\chi \equiv 0$の時は渦面が軸対称となるという事とあっている。また、この初期条件は渦度のz成分が零でなく最初から3次元的な構造を持っている。Case I に比べ変化は緩やかで、余り細かい構造が造られることなく、軸対称の構造に遷移し落ちつくように見える。

図は省略したが、このときのエンストロフィの時間変化は単調減少で、渦の引き伸ばしがほとんど起こっていないことが分かる。また、ヘリシティは最初から正の方向に単調に増加している。しかしながら、終状態での渦度場の様子は、Case I 、II 共に軸対称的で同じ方向のヘリカル構造を持っている。

このときのヘリシティの生成の様子をFourier空間でみると、Case I とはまったく異なっている。図8に図5に対応するものを示す。今の場合、初期にヘリシティ及びヘリシティ密度はともに零なので、スペクトルも零である。

時間発展してくるとその分布は変わらず、アンプリチュードが大きくなってくる。つまり、どちらかの符号を持つヘリシティが高波数帯にトランスファされディケイするのではなく、全体として大きくなることでその差として現れるヘリシティも大きくなっているのである。

4　まとめと今後

ヘリカル対称流を数値シミュレーションし、ヘリシティの生成を中心に調べた。初期条件としては楕円状渦管をひねったもの（図１）を考え、初期にヘリシティが零であるものを２種類調べた。

高渦度領域の構造は、(x,y) 面でみたとき最初楕円形をしているが、まずS字型になり、引き伸ばされスパイラル構造を持つようになる。そして、粘性が顕著に効くような小さいスケールまで引き伸ばされると、中心付近から融合し軸対称の構造が発達してくる。このときの渦面もほぼ同様の構造を示しながら時間変化し、最初全体的に（比較的弱い）負のヘリシティが分布するが、やがて、軸対称化した中心付近からまとまった形で正のヘリシティが分布するようになる。スパイラル構造から軸対称構造へ変化している所でもっとも激しくヘリシティが生成され、後者の構造中ではほとんど変化のない定常状態に落ちつく。

積分量の時間発展についていうと、Case I では渦の引き伸ばしを反映してエンストロフィがピークを持ち、Case II ではエンストロフィは単調減少で、ヘリシティは単調増加であった。また、粘性依存性についていうと、Case I において、エンストロフィのピークの増加は $Q_{\mathrm{peak}} \propto \nu^{-1/2}$ で、３次元のそれより弱い。また、ヘリシティは粘性が小さくなるとむしろその変化は大きくなるが、ピークまでの時間も大きくなり、結果として同じ時間での変化でいえばより保存されている。

ヘリシティの Fourier スペクトルの時間発展を見ていると、ヘリシティの生成過程には、一方の符号のヘリシティが低波数側へ他方が高波数側へ移動しそれぞれの散逸の違いでヘリシティが生成される場合と、全体としてのスペクトルの構造がほとんど変わらずそのアンプリチュードが大きくなって生成される場合とがあることが分かった。

今後の課題としては、例えば終状態で共通に現れた、対称だがヘリカル構造を持つ場の解析を通して、時間の大きいときの漸近形とその普遍性を調べること。また、ヘリカル対称流のもう一つの特徴である渦の引き伸ばしについて、それがもっとも顕著に現れる非粘性流での解の特異性について。これについては、既に２、３の初期条件で調べているので、別の機会に報告したい。

図1. →
初期条件の
等渦度面($|\omega|=$const.)

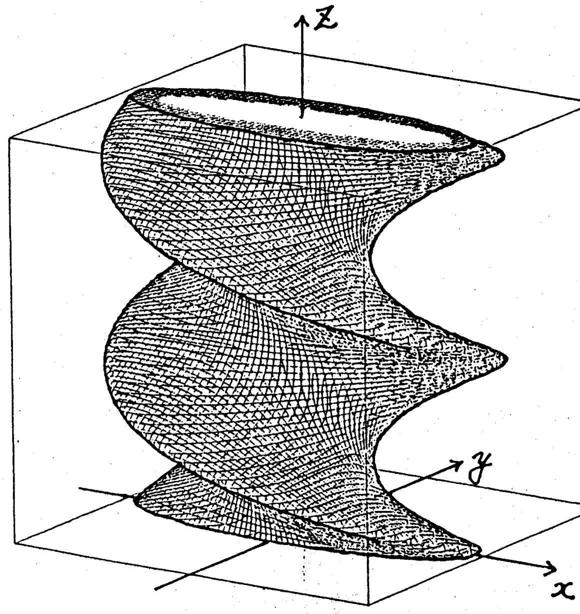
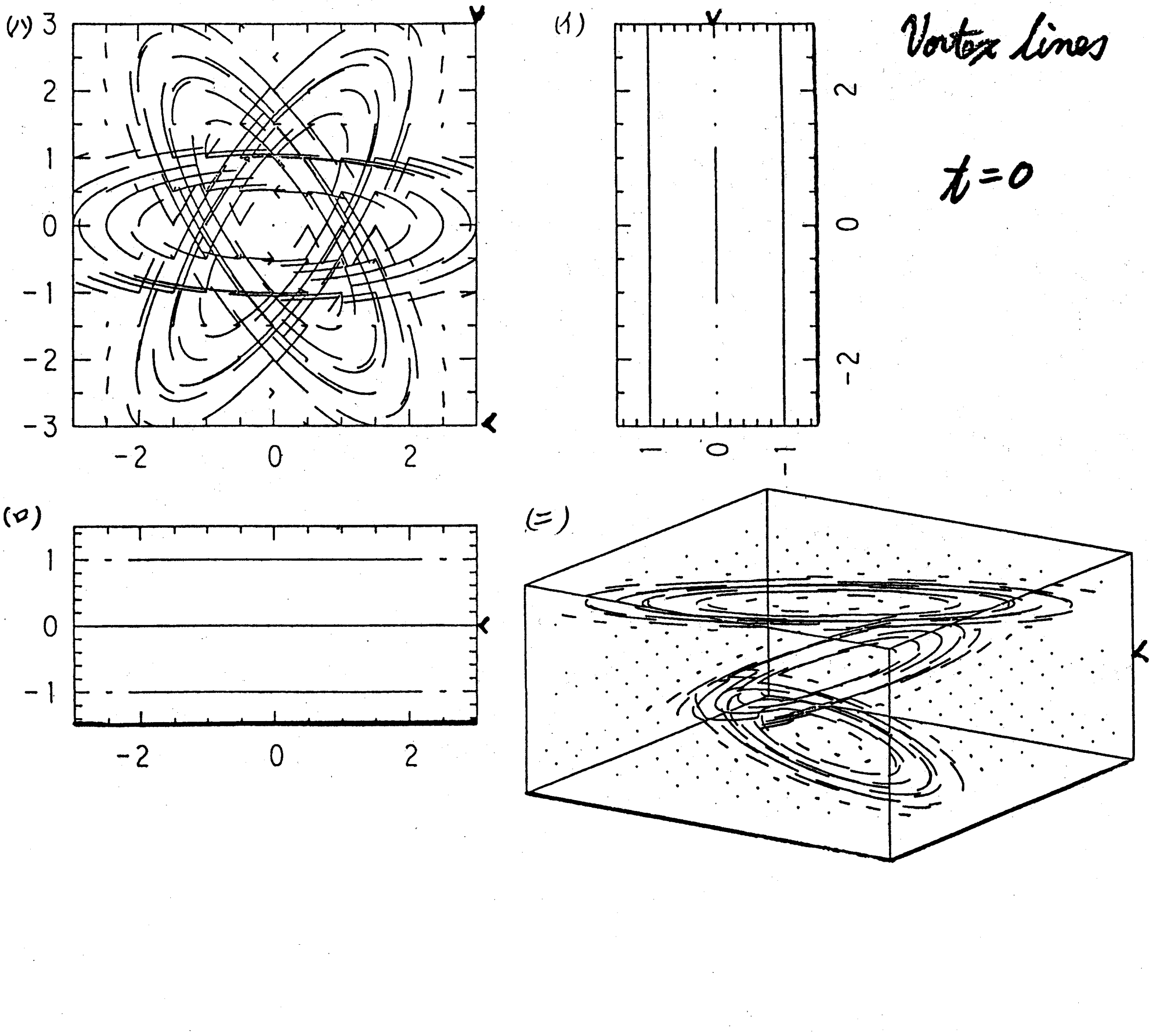


図2. ↓
Case I の初期条件の
渦線の様子

(イ) x− (ロ) y− (ハ) z− (ニ) (1,2,3)-方向から見た図



Vortex lines

$t=0$

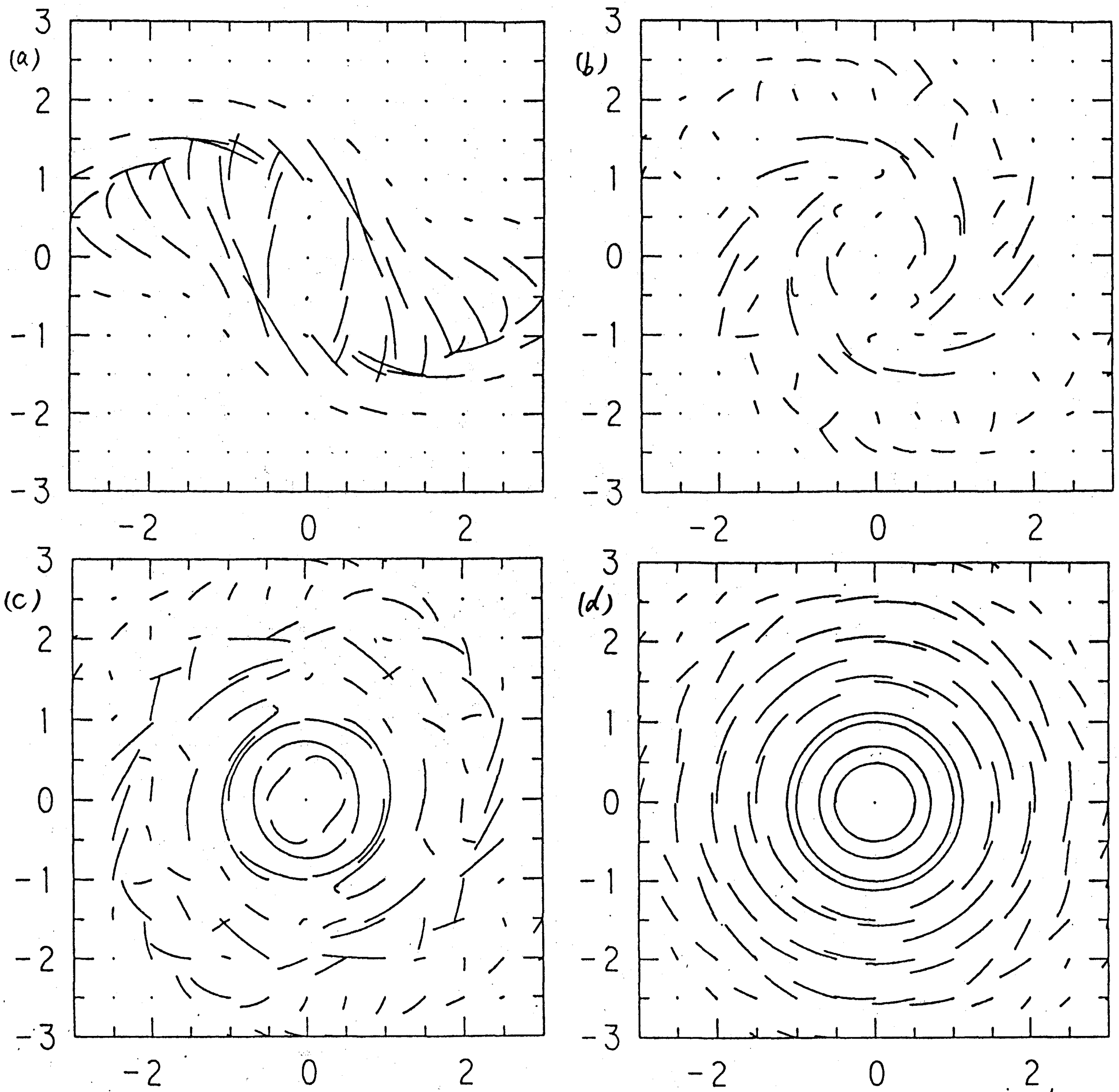


図3 ↑

渦線の時間発展の様子をz-方向から見たもの。

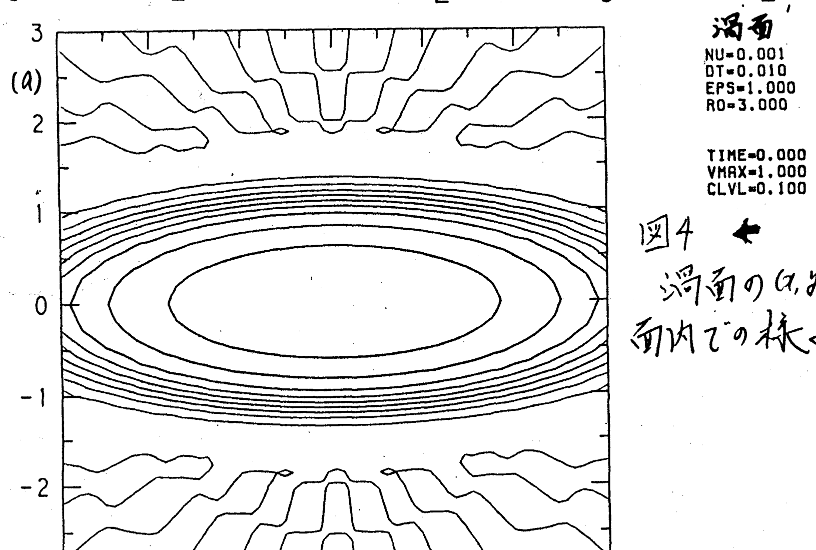


図4 ←

渦面の(x,y)面内での様子。

図4b

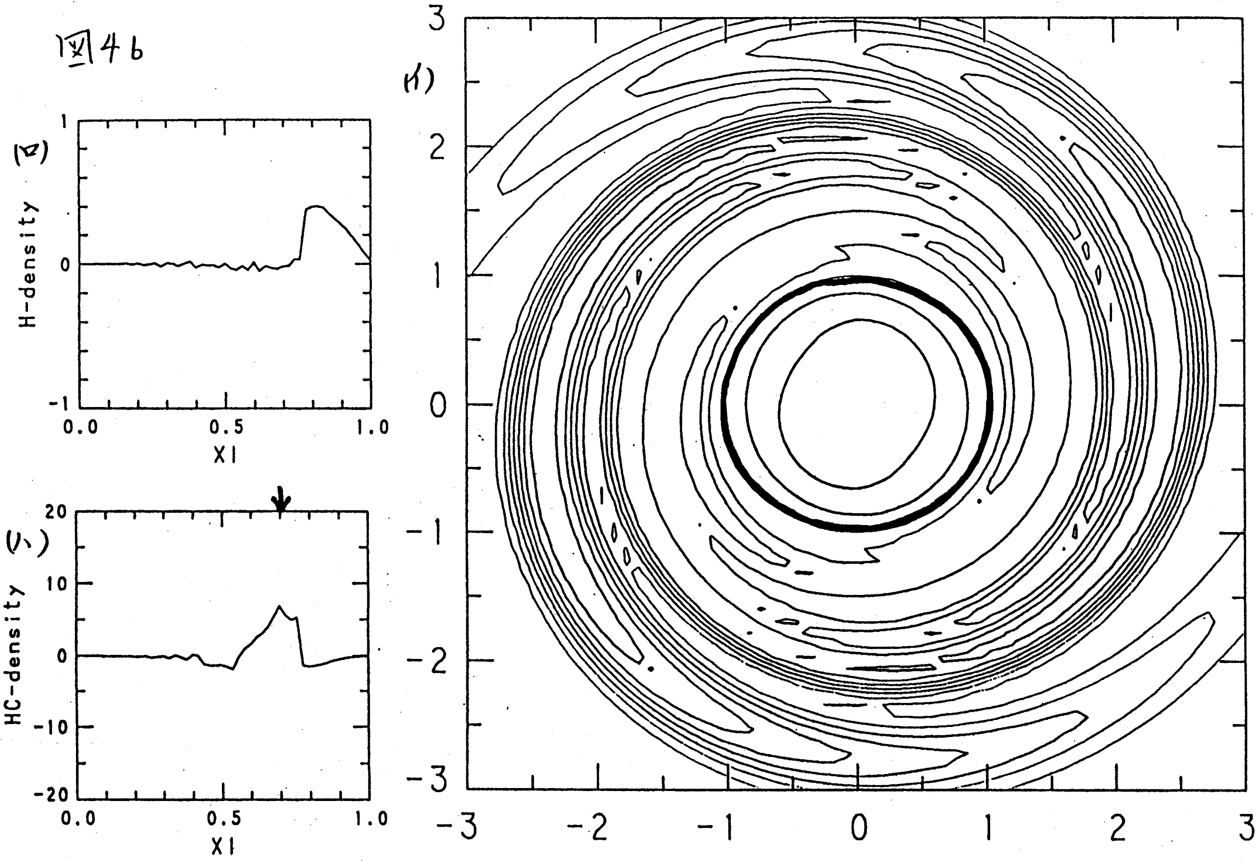
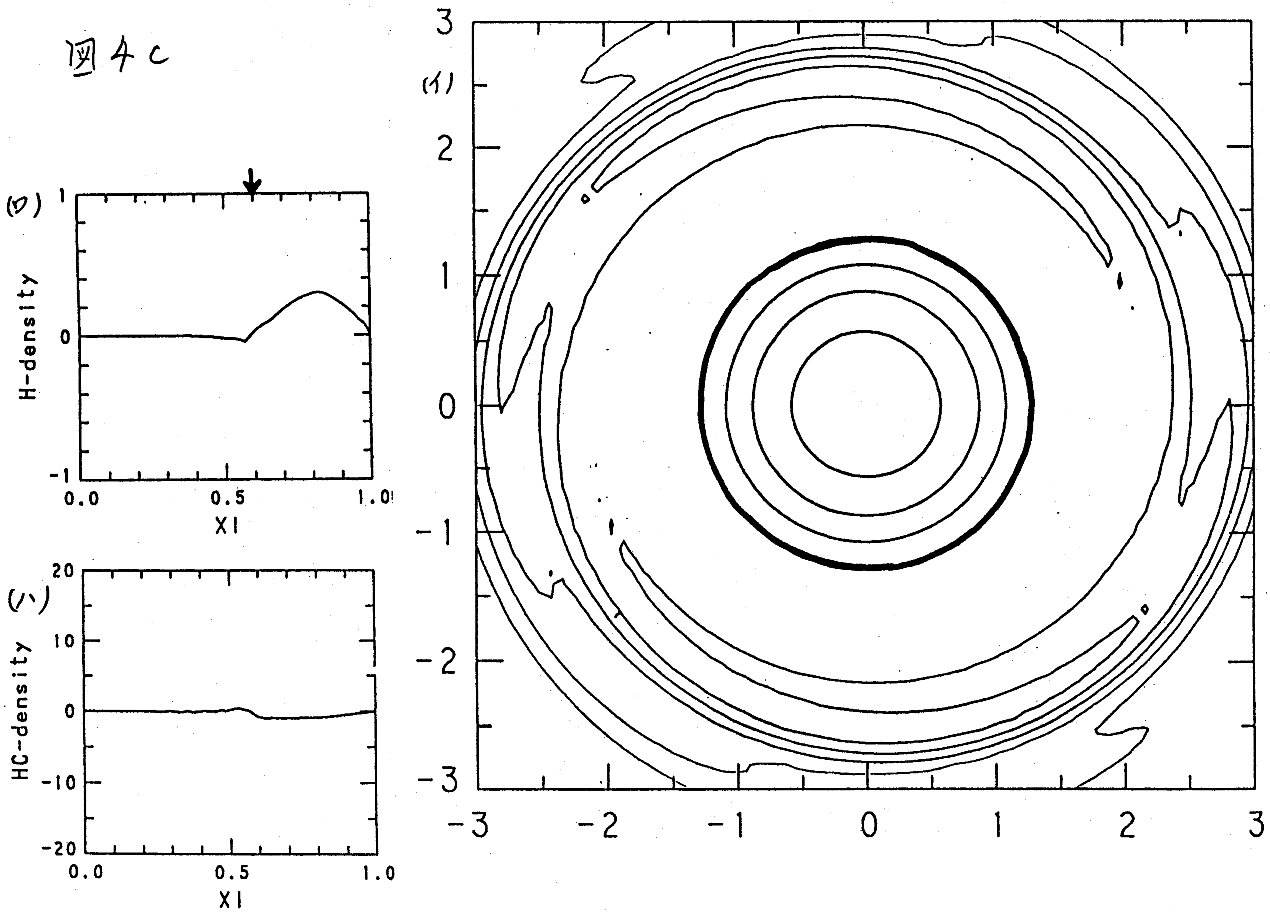


図4c



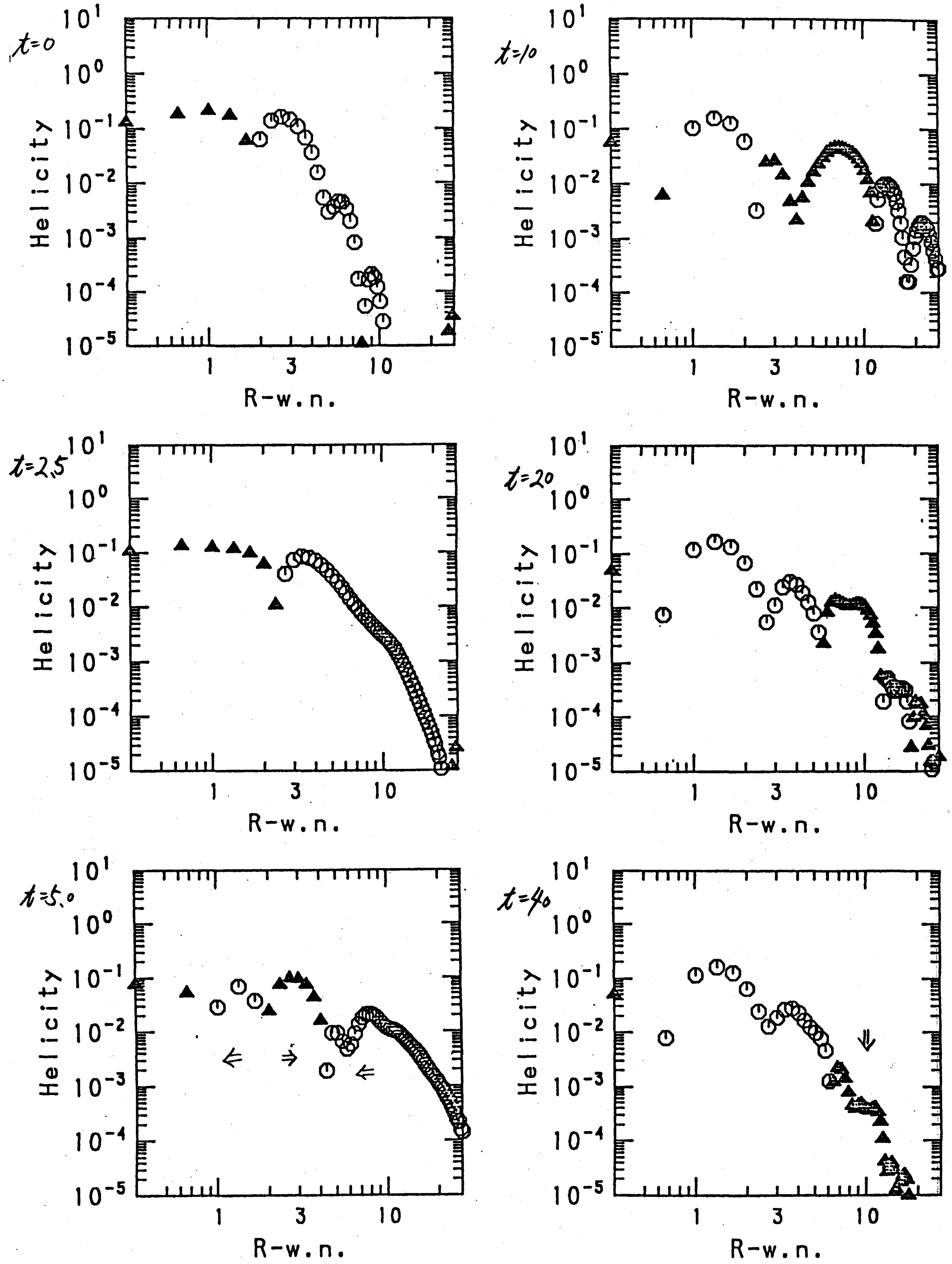


図5. ヘリシティの Fourierスペクトルの時間発展.(Case I)

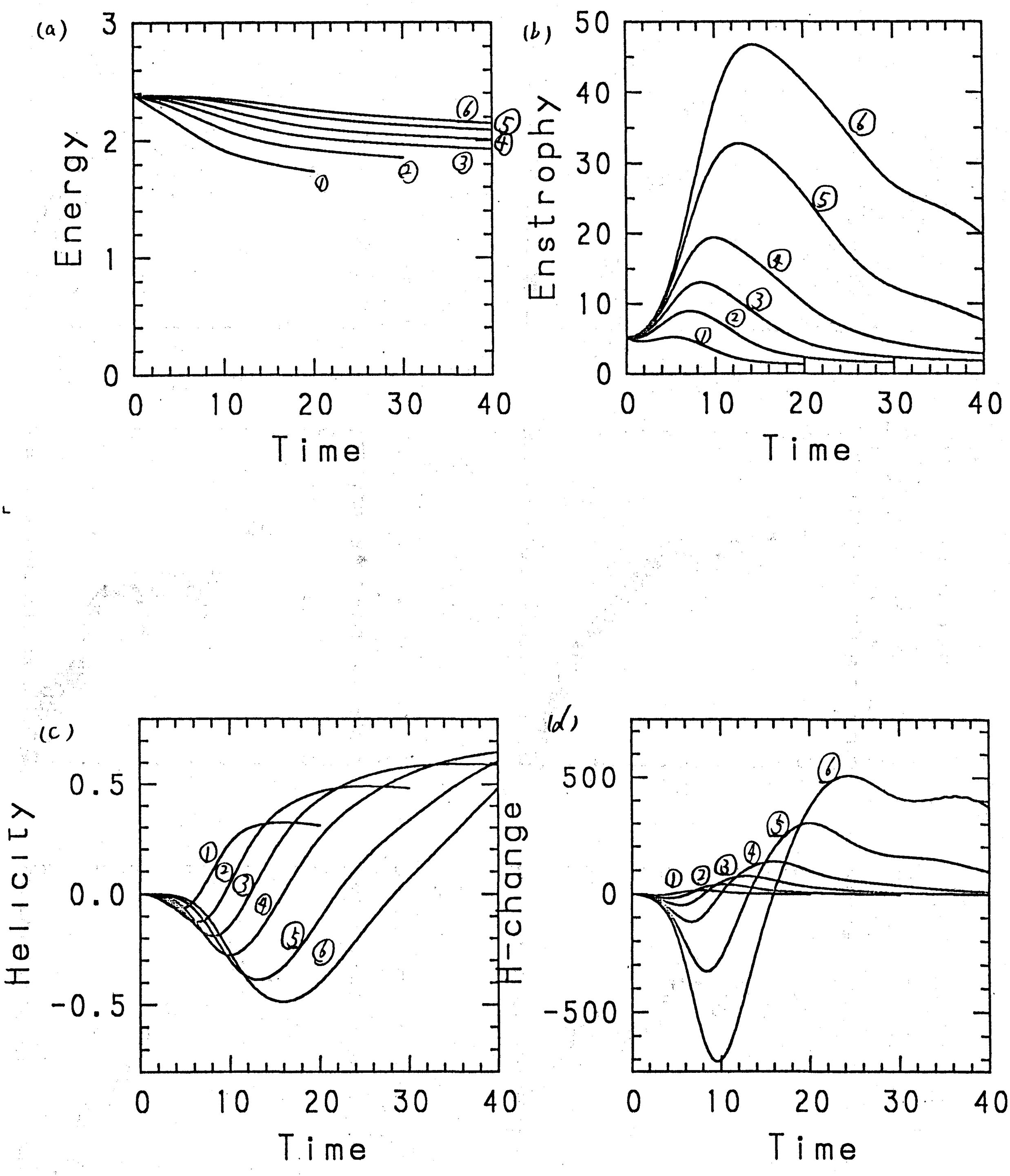
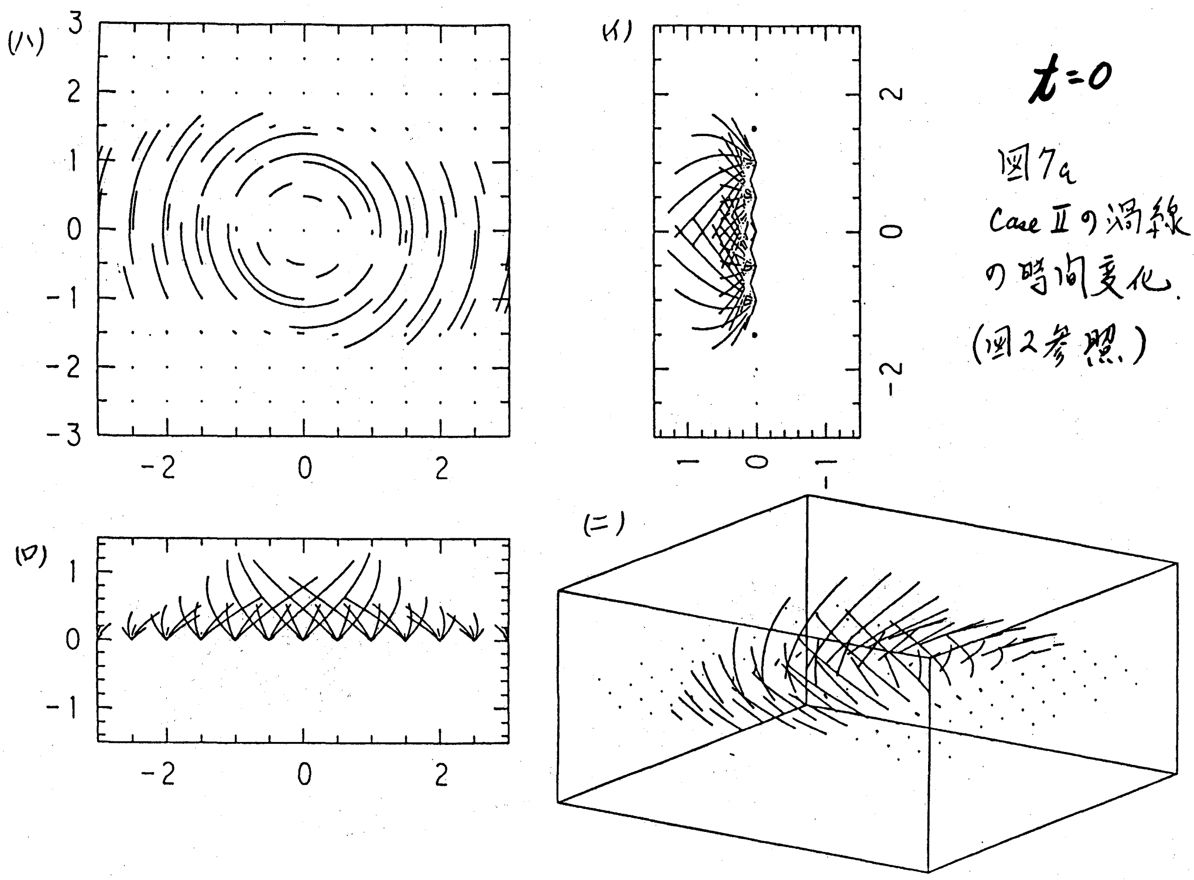
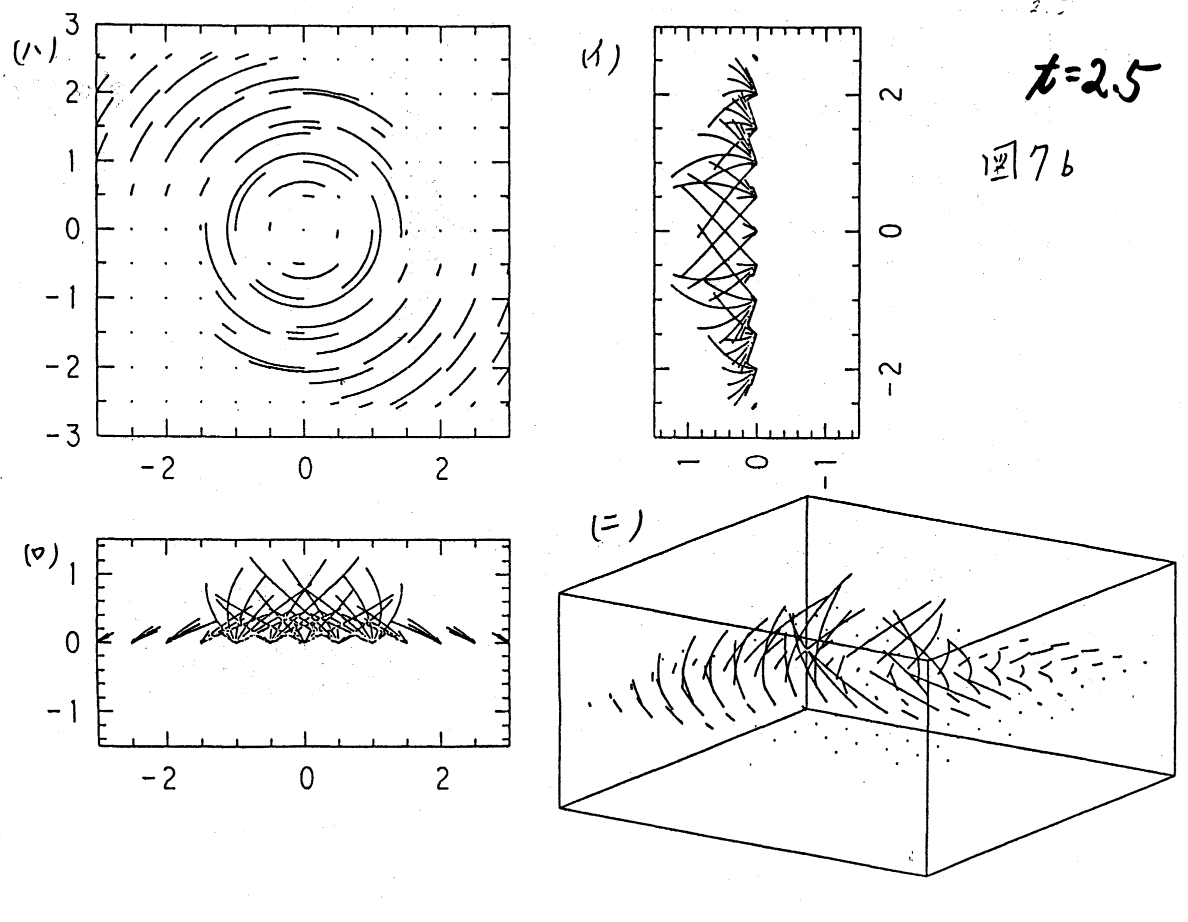


図6、(a) エネルギー (b) エンストロフィ (c) ヘリシティ (d) ヘリシティ変化率の時間発展. ① $\nu = 0.005$, ② $\nu = 0.002$, ③ $\nu = 0.001$ ④ $\nu = 0.0005$ ⑤ $\nu = 0.0002$, ⑥ $\nu = 0.0001$



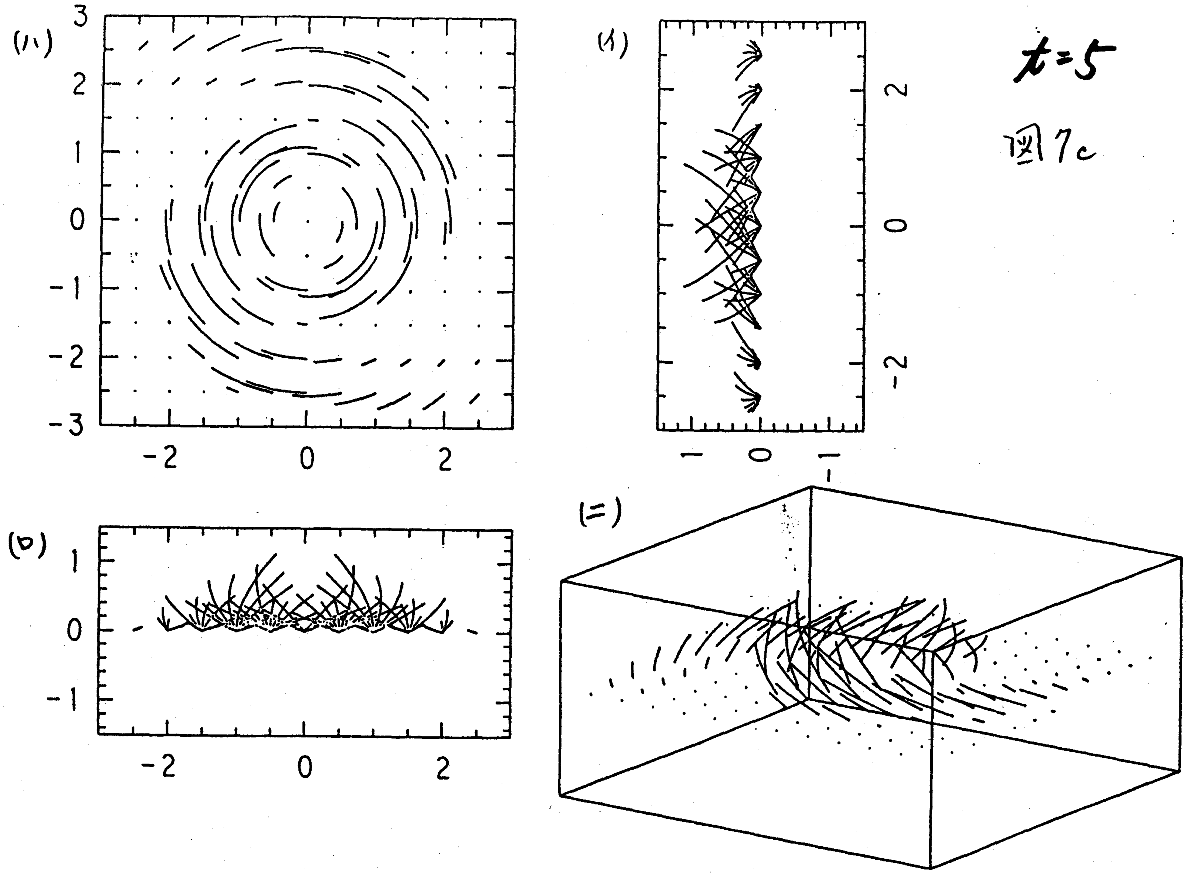
t=0

図7a
Case II の渦線
の時間変化
(図2参照)



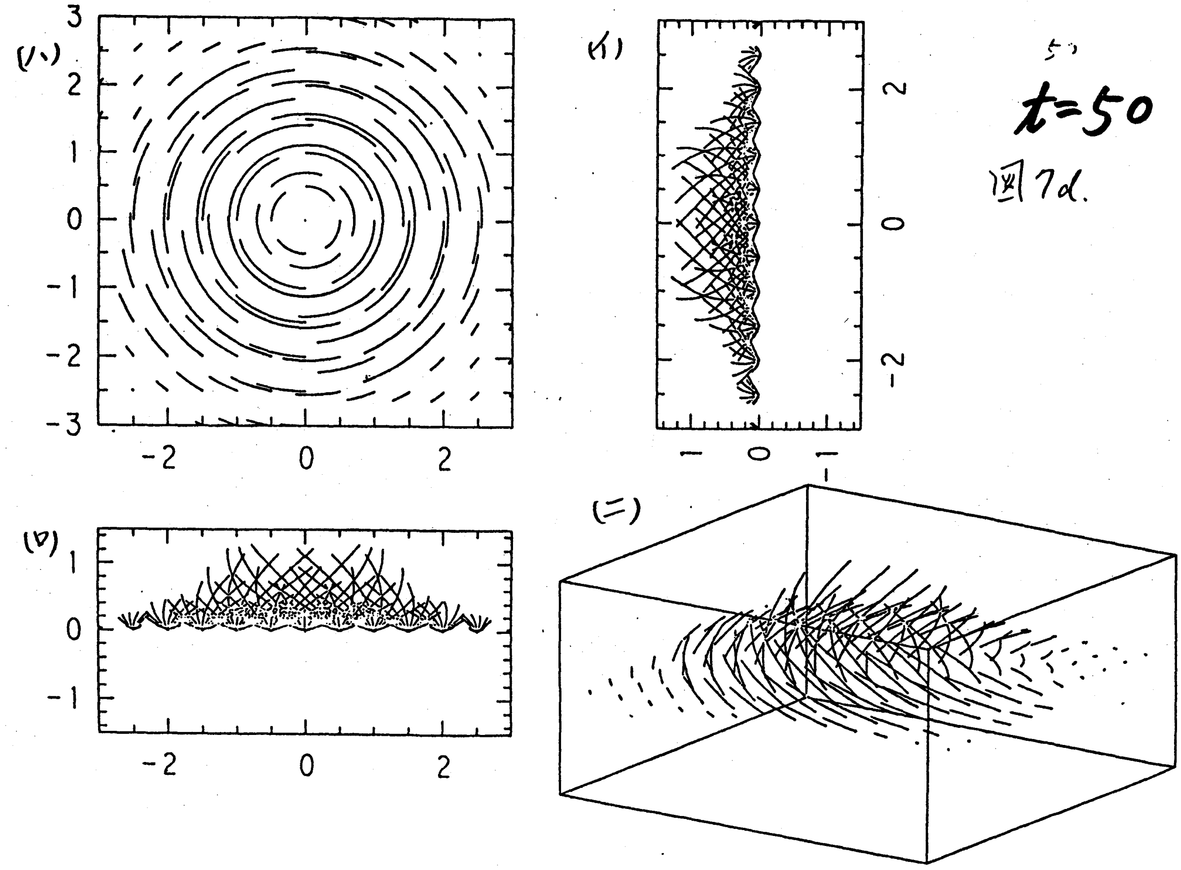
t=2.5

図7b



$t=5$

図7c



$t=50$

図7d.

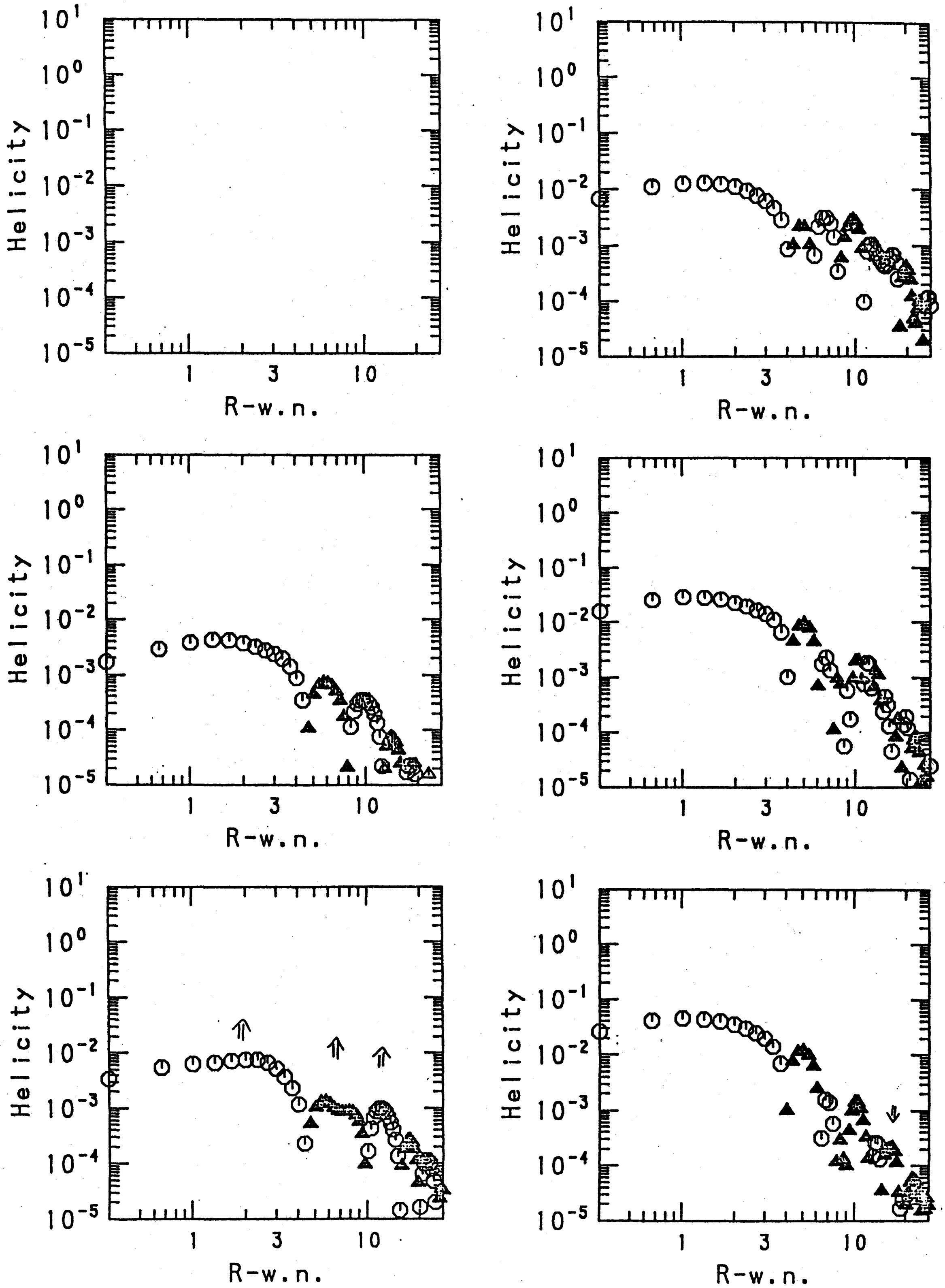


図8. ヘリシティのFourierスペクトルの時間発展(Case II)