数理解析研究所講究録
第853巻 1993年 203-217

複製部数に制限のあるArborescence-Net上のfile transferが最適であるための必要十分条件

A Necessary and Sufficient Condition for a File Transfer to be Optimal on an Arborescence-Net with Node Supply Limit

† 金子美博　‡ 篠田庄司　† 堀内和夫
Yoshihiro Kaneko　Shoji Shinoda　Kazuo Horiuchi

† 〒169 東京都新宿区大久保3-4-1 早大・理工
‡ 〒112 東京都文京区春日1-13-27 中央大・理工
E-mail kaneko@horiuchi.comm.waseda.ac.jp

1. はじめに

ﾌｧｲﾙ転送ﾈｯﾄﾜｰｸN上の最適なfile transferを求める問題とは，必要不可欠なｺｽﾄが最小となるように，ある情報を持った複製可能なﾌｧｲﾙJを，Nの適当な点で複製しながら，ある点から各点に提供する問題である．これまで，各点で複製できるJの部数に対する制限のないNが考察対象であった．[1],[2]

本報告では，各点において複製できるJの部数が限られていて，arborescenceの構造をしたﾌｧｲﾙ転送ﾈｯﾄﾜｰｸ(Arborescence-Net)を考察対象とし，file transferと1対1対応する準file transferを用いて，file transferが最適であるための必要十分条件を示す．

2. 準備

ここでは，最適なfile transferの問題を定式化する上で必要な用語を定義する．ｸﾞﾗﾌ理論に関する基本的な用語は文献[3]を参照されたい．以下，非負整数の集合を $\mathbf{Z}$ で表す．

考察の対象となるArborescence-Net $N=(V, A, c_v, d, Ub, c_a)$ とは，点集合をV，枝集合をAとし，点 v_1 を根とするarborescenceの構造で，点u及び枝eのｺｽﾄをそれぞれ $c_v(u)$ 及び $c_a(e)$，点uの需要値及び供給上限をそれぞれ $d(u)$ 及び $Ub(u)$ とする．Jは，Nにおいて必要とされる情報が書かれているﾌｧｲﾙである．点uのｺｽﾄ(copying cost) $c_v(u)$ は，uにおいてJを1部ｺﾋﾟｰするのに要するｺｽﾄであ

り，$c_v(u) \in \mathbb{Z}$とする．枝eのｺｽﾄ(transmission cost) $c_a(e)$は，枝eを通して，Jのｺﾋﾟｰを1部送るのに要するｺｽﾄであり，$c_a(e) \in \mathbb{Z}$とする．以降では，簡単のため枝(x, y)のｺｽﾄを$c_a((x, y))$の代わりに$c_a(x, y)$で表す．uの需要値(copy demand) d(u)は，uが必要とするJのｺﾋﾟｰの部数を意味し，$d(u) \in \mathbb{Z}$とする．

Vの各点vに対して，枝集合A(v)を$A(v) \equiv \{e \in A \mid e = (v, w), w \in V\}$とし，$A(w) = \phi$である点wを端点と呼ぶ．Vの根以外の点vに対して，fa(v)は，$(fa(v), v) \in A$を満たす点である．N上のuからvへのﾊﾟｽを単にu-vﾊﾟｽと呼ぶ．u-vﾊﾟｽPに対して，$c_{u,v}$はP上の全ての枝のｺｽﾄの総和を表す．枝eがﾊﾟｽP上にあるならば，$e \in P$で表す．Vの端点以外の点xに対して，xの子孫De(x)を，$De(x) \equiv \{y \in V \mid x\text{-}y$ﾊﾟｽがN上に存在する$\}$とする．ただし，$x \in De(x)$とする．

N上で必要とされる情報を持ったﾌｧｲﾙJのｵﾘｼﾞﾅﾙが1部，Nの外から根v_1に与えられるものとする．以下で定義するfile transferを通して，v_1からV上の各点uへd(u)部のJのｵﾘｼﾞﾅﾙまたはｺﾋﾟｰが提供される．ただし，ｵﾘｼﾞﾅﾙとｺﾋﾟｰの相違による不都合はないものとし，以降では，ｵﾘｼﾞﾅﾙ自体もJの1部の“ｺﾋﾟｰ”として扱われるものとする．

[定義1]　Nに対して，$\psi: V \to \mathbb{Z}$及び$f: A \to \mathbb{Z} - \{0\}$である2個の関数$\psi$及びfが

$$\text{(C1)}\quad f((fa(v), v)) + \psi(v) = \sum_{e \in A(v)} f(e) + d(v) \qquad (v \in V - \{v_1\}),$$

$$1 + \psi(v_1) = \sum_{e \in A(v_1)} f(e) + d(v_1),$$

$$\text{(C2)}\quad \psi(v) \leqq Ub(v) \qquad (v \in V),$$

を満たすならば，$D = (\psi, f)$をN上のfile transferと呼ぶ．N上のfile transfer $D = (\psi, f)$のｺｽﾄC(D)を，

$$C(D) = \sum_{u \in V} c_v(u) \cdot \psi(u) + \sum_{e \in A} c_a(e) \cdot f(e)$$

とする．Nのあるfile transfer Dが，Nの他の任意のfile transfer D'に対して，$C(D) \leqq C(D')$ならば，DをNの最適なfile transferと呼ぶ．　□

ここで，$\psi(v)$は，点vでｺﾋﾟｰされるJの部数を表し，f(e)は枝eを通して送られるJのｺﾋﾟｰの部数を表している．条件(C1)は，各点でJの部数が保存されていることを示し，条件(C2)は，各点でｺﾋﾟｰできる部数に限りがあることを示している．

端点wの需要値d(w)は全て，$d(w) \in \mathbb{Z} - \{0\}$とする．な

ぜならば，もしそうでなければ，Nから需要値が0である端点を全て除去（端点に入る枝も除去）したものをN'とすれば，Nの上での最適なfile transferは，Nの代わりに，N'の上での最適なfile transferを考えれば十分であるからである．

3． 需要値変更と準file transfer

この章では，Arborescence-Net N上の各点の需要値を，ある規則の下で変更させて，別のArborescence-Net N'を作る．N上のfile transferと1対1対応するような，N'上の準file transferというものを定義する．この変更は，次節以降において，最適なfile transferを求める問題を線形計画問題に帰着させる際その他に有効となる．

［定義2］ Arborescence-Net $N=(V, A, c_v, d, Ub, c_a)$に対して，V上の各点vの需要値$d'(v)$を

$$d'(v) \equiv d(v)+\delta(v)-1, \qquad (1)$$

とする．ただし，$\delta(v)$はNにおいてvから出る枝の本数を表す．Nと同じ構造で，各点のコスト及び供給上限並びに各枝のコストがN上のそれらと同じであり，各点vの需要値が$d'(v)$であるArborescence-Net $N'=(V, A, c_v, d', Ub, c_a)$を，Nに対して需要値変更を行なったArborescence-Netと呼ぶ．N'において，$\psi: V\to \mathbb{Z}$及び$f: A\to \mathbb{Z}-\{0\}$，である2個の関数ψ及びfが，以下の（C1'）並びに（C2'）を満たすならば，ψ及びfの組$D=(\psi, f)$をN'上の準file transferと呼ぶ．

$$\text{(C1')}\quad f((fa(v), v))+\psi(v)=\sum_{e\in A(v)} f(e)+d'(v) \qquad (v\in V-\{v_1\}),$$

$$\psi(v_1)=\sum_{e\in A(v_1)} f(e)+d'(v_1)$$

$$\text{(C2')}\quad \psi(v)\leqq U_b(v) \qquad (v\in V).$$

また，N'上の準file transfer $D=(\psi, f)$に対して，

$$C(D)=\sum_{u\in V} c_v(u)\cdot\psi(u)+\sum_{e\in A} c_a(e)\cdot f(e)$$

をDのコストと呼ぶ．N'において，コストが最小である準file transferを，N'の最適な準file transferと呼ぶ． □

N上のfile transferとNに対して需要値変更を行なったN'上の準file transferとの間には，次のような1対1対応関係が存在する．

［命題1］ Arborescence-Net $N=(V, A, c_v, d, Ub, c_a)$に

対して，需要値変更を行なったArborescence-Netを $N' = (V, A, c_v, d', Ub, c_a)$ とする．N上のfile transfer $D=(\psi, f)$ に対して，

$$f'(e) = f(e) - 1 \quad (e \in A), \tag{2}$$

とすると，$D' = (\psi, f')$ は，N'上の準file transferである．逆に，N'上の準file transfer $D=(\psi, f)$ に対し，

$$f'(e) = f(e) + 1 \quad (e \in A),$$

とすると，$D' = (\psi, f')$ はN上のfile transferである．

(証明)前半部分．N上のfile transfer $D=(\psi, f)$ において，定義1より，$f: A \to \mathbb{Z} - \{0\}$ であるため，式(2)より $f': A \to \mathbb{Z}$ である．(C2)より明らかに，ψ は(C2')を満たす．残りは，f'及び ψ が(C1')を満たすことを示せばよい．v_1 以外のVの任意の点vに対して，(C1)の左辺に式(2)を代入すると，

$$f((fa(v), v)) + \psi(v) = f'((fa(v), v)) + 1 + \psi(v),$$

である．(C1)の右辺に式(1)及び式(2)を代入すると

$$\sum_{e \in A(v)} f(e) + d(v) = \sum_{e \in A(v)} \{f'(e) + 1\} + d'(v) - \delta(v) + 1 = \sum_{e \in A(v)} f'(e) + d'(v) + 1,$$

である．従って，

$$f'((fa(v), v)) + \psi(v) = \sum_{e \in A(v)} f'(e) + d'(v),$$

となり，ψ 及びf'が(C1')を満たすことがわかる．v_1 に対しても同様に示せる．

後半部分も前半部分と同様に証明できる．□

[命題2] Arborescence-Net $N = (V, A, c_v, d, Ub, c_a)$ に対して，需要値変更を行なったArborescence-Netを $N' = (V, A, c_v, d', Ub, c_a)$ とする．N上のfile transfer Dに対して，式(2)により，Dから得られるN'上の準file transfer をD'とすると，

$$C(D') = C(D) - \sum_{e \in A} c_a(e),$$

である．

(証明) 定義1，2及び式(2)より，容易に示せる．□

命題1，2より，Nで最適なfile transferを求める問題は，Nに対して需要値の変更を行なったN'上で最適な準file transferを求める問題に帰着される．以降では，他に断りのない限り，単にArborescence-Net Nとい

えば，式(1)による需要値変更を既に行ったものとし，Nにおいて最適なfile transferを求める代わりに，N'において最適な準file transferを求めることを考察対象とする．

4．線形計画問題と相補定理

Nの点集合V及び枝集合Aが，$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$A=\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\}$とする．任意の行列$\mathbb{P}$に対して，行列$\mathbb{P}^t$は$\mathbb{P}$の転置行列を表すものとする．定数行列$\mathbb{C}$及び変数行列$\mathbb{x}$をそれぞれ，

$$\mathbb{C}=[c_v(v_1), c_v(v_2), \cdots, c_v(v_n), c_a(e_1), c_a(e_2), \cdots, c_a(e_{n-1})].$$

$$\mathbb{x}=[\psi(v_1), \psi(v_2), \cdots, \psi(v_n), f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_{n-1})]^t,$$

とすると，N上で最適な準file transferを求める問題は，以下のような線形計画問題Pとして定式化できる．

(問題P)

$$\psi(v_1)-\sum_{e\in A(v_1)} f(e) = d(v_1),$$

$$\psi(v_i)+f(e_{i-1})-\sum_{e\in A(v_i)} f(e) = d(v_i) \qquad (i=2, 3, \cdots, n-1),$$

$$-\psi(v_i) \geqq -Ub(v_i) \qquad (i=1, 2, \cdots, n),$$

$$\psi(v_i) \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n),$$

$$f(e_i) \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n-1),$$

のもとで，$\mathbb{C}\cdot\mathbb{x}$を最小にせよ．□

ここで，定数行列$\mathbb{b}$及び変数行列$\mathbb{y}$をそれぞれ，

$$\mathbb{b}=[d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_n), -Ub(v_1), -Ub(v_2), \cdots, -Ub(v_n)]^t,$$

$$\mathbb{y}=[\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n],$$

とすると，Pに対する双対問題は次のようになる．

(双対問題P')

$$c_v(v_i)-\pi_i+\gamma_i \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n), \qquad (3)$$

$$c_a(e)+\pi_i-\pi_j \geqq 0 \qquad (e=(v_i, v_j)\in A), \qquad (4)$$

$$\gamma_i \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (5)$$

のもとで，$\mathbb{b}\cdot\mathbb{y}$を最大にせよ．□

ここで，N上の準file transferにおいて，ψ並びにfの値域が整数であることを考えると，問題Pでは，$\mathbb{x}$の各要素が整数であるという条件が付帯されるべきである．しかし，この条件は必要ではない．なぜならば，問題Pのある整数解に対応して，双対問題P'の最適解が存

在することが，後出の命題3によって示され，Pの最適解の中に整数解が存在することが保証されているためである．相補定理[4]より，次の補題が容易に導ける．

[補題1]　$\mathbb{x}$及び$\mathbb{y}$がそれぞれ問題P及びその双対問題P'の最適解であるための必要十分条件は，Pの解$\mathbb{x}$及びP'の解$\mathbb{y}$の要素が

$$\psi(v_i)\cdot(c_v(v_i)-\pi_i+\gamma_i)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

$$f(e)\cdot(c_a(e)+\pi_i-\pi_j)=0 \quad (e=(v_i,v_j)\in A), \tag{7}$$

$$\gamma_i\cdot(Ub(v_i)-\psi(v_i))=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{8}$$

を満たすことである．□

次の定義は，準file transferが最適であるための条件を導く上で非常に役に立つ．

[定義3]　N上の各点xに対して，$\Delta(x)$を

$$\Delta(x)\equiv c_{V_1,x}-c_v(x),$$

とする．N上の準file transfer $D=(\psi,f)$に対して，

$$V_r\equiv\{v\in V\mid f(fa(v),v)=0\}\cup\{v_1\},$$

とする．V_r上の各点xに対して，De(x)の部分集合を

$$De_+(x)\equiv\{y\in De(x)\mid P_{x,y}\text{上の全ての枝}e\text{が}f(e)>0\},$$

とする．ただし，$x\in De_+(x)$とする．この$De_+(x)$を用いて，

$$De(D,x)\equiv\{y\in De_+(x)\mid \psi(y)<Ub(y)\},$$

とする．これらの点集合を用いて，

$$\Delta_m(x)\equiv\min\{\Delta(y)\mid y\in De(x),\ \psi(y)>0\}, \tag{9}$$

$$\Delta(D,x)\equiv\begin{cases}\max\{\Delta(y)\mid y\in De(D,x)\} & (De(D,x)\neq\phi),\\ \min\{\Delta(y)\mid y\in V\} & (De(D,x)=\phi),\end{cases}$$

とする．□

定義3に関連して，以下の4個の補題が成り立つ．

[補題2]　N上の準file transfer $D=(\psi,f)$において，

(2-1)　$\psi(u)<Ub(u)$ならば，$\Delta(D,u)\geqq\Delta(u)$である．

(2-2)　$v\in De_+(u)$ならば，$\Delta(D,u)\geqq\Delta(D,v)$である．

(証明)　前半部分．$\psi(u)<Ub(u)$ならば，$De(D,u)\neq\phi$であるため，明らかに$\Delta(D,u)\geqq\Delta(u)$である．

後半部分．$De_+(u)$上の全ての点vが，$\psi(v)=Ub(v)$ならば，定義3より，$\Delta(D,u)=\Delta(D,v)=\min\{\Delta(y)\mid y\in V\}$である．$\psi(v)<Ub(v)$である点vが$De_+(u)$上に存在するならば，$De(D,u)\supseteq De(D,v)\neq\phi$であるため，定義3より明らかに，$\Delta(D,u)\geqq\Delta(D,v)$である．□

[補題3]　N上の準file transfer $D=(\psi,f)$において，

(3-1)　$v\in De_+(u)$,

(3-2)　$\psi(u) = Ub(u)$,　$0 \leqq \psi(v) < Ub(v)$,

(3-3)　$\psi(w) > 0$である点wは，v_1-wパス上の点w'に対して，$\Delta(w) \geqq \Delta(D, w')$を満たす．

ならば，$\Delta_m(u) \geqq \Delta(v)$が成り立つ．更に，

(3-4)　$\psi(v) > 0$,

ならば，$\Delta_m(u) = \Delta(v)$が成り立つ．

(証明)　De(v)上の点wが，$\psi(w) > 0$ならば，(3-3)及び補題2より，$\Delta(w) \geqq \Delta(D, v) \geqq \Delta(v)$．u-vパス上の点w'が，$\psi(w') > 0$ならば，(3-3)，補題2より，$\Delta(w') \geqq \Delta(D, w') \geqq \Delta(D, v) \geqq \Delta(v)$．式(9)より，$\Delta_m(u) = \min\{\Delta(w), \Delta(w')\} \geqq \Delta(v)$．よって，前半が成り立つ．また，$\psi(v) > 0$ならば，式(9)より，$\Delta_m(u) \leqq \Delta(v)$である．従って，前半部分より$\Delta_m(u) \geqq \Delta(v)$であるため，後半部分が成り立つ．　□

[補題4]　N上の準file transfer $D = (\psi, f)$において，

(4-1)　$v \in De(u)$,　$u \neq v$,

(4-2)　$0 \leqq \psi(u) < Ub(u)$,　$0 < \psi(v) \leqq Ub(v)$

(4-3)　$\psi(w) > 0$である点wは，v_1-wパス上の点w'に対して，$\Delta(w) \geqq \Delta(D, w')$を満たす．

ならば，$\Delta(v) \geqq \Delta_m(v) \geqq \Delta(u)$が成り立ち，更に，

(4-4)　$v \in De_+(u)$,　$\psi(u) > 0$,　$\psi(v) < Ub(v)$

ならば，$\Delta(v) = \Delta(u)$である．

(証明)　$\psi(v) > 0$及び式(9)より，$\Delta(v) \geqq \Delta_m(v)$である．De(v)上の点wが，$\psi(w) > 0$，$\Delta(w) = \Delta_m(v)$とすると，(4-1)～(4-3)及び補題2より，$\Delta_m(v) = \Delta(w) \geqq \Delta(D, u) \geqq \Delta(u)$である．以上より，前半部分が成り立つ．補題2，(4-3)，(4-4)より，$\Delta(u) \geqq \Delta(D, u) \geqq \Delta(D, v) \geqq \Delta(v)$である．従って，前半部分より，$\Delta(v) \geqq \Delta(u)$であるため，後半部分が成り立つ．　□

[補題5]　N上の準file transfer $D = (\psi, f)$において，

(5-1)　$v \in De_+(u)$,

(5-2)　$0 < \psi(u) < Ub(u)$,　$\psi(v) = 0$,

(5-3)　$\Delta(u) \geqq \Delta(D, u)$,

ならば，$\Delta(u) \geqq \Delta(v)$が成り立つ．

(証明)　補題2及び(5-3)より，

$$\Delta(u) \geqq \Delta(D, u) \geqq \Delta(D, v) \geqq \Delta(v).\quad \square$$

補題2～5より，N上の準file transferが最適であるための十分条件を示す．

[命題3]　N上の準file transfer $D = (\psi, f)$において，

全ての点vに対して，$\psi(v)=0$であるか，または$\psi(v)>0$である全ての点vが，v_1-vパス上の全ての点uに対して，

$$\Delta(v) \geqq \Delta(D, u) \qquad (10)$$

が成り立つならば，Dは最適である．

（証明）　式(10)を満たすN上の準file transfer $D=(\psi, f)$に対して，式(3)～式(8)を満たす変数π_i，γ_i（$i=1, 2, \cdots, n$）が存在することを証明すれば十分である．また，式(10)が成り立てば，補題3～5の条件(3-3)，(4-3)，(5-3)が成り立つことに注意．

D上で全ての点v_iが，$\psi(v_i)=0$ならば，全ての枝eは，$f(e)=0$であるため，式(7)が成り立つ．各点v_iに対して，$\gamma_i=0$とする．明らかに，ψ及びγは，式(5)，式(6)，式(8)を満たす．また，各点v_iに対して，$\pi_i=c_{V_1, v_i}-\max\{\Delta(v) \mid v \in V\}$とすると，$\pi$が式(4)を満たすのは，明らか．更に，$c_v(v_i)-\pi_i+\gamma_i=\max\{\Delta(v) \mid v \in V\}-\Delta(v_i) \geqq 0$であり，式(3)が成り立つ．以上より，$D=(\psi, f)$上の全ての点vが，$\psi(v)=0$ならば，Dは最適である．

次に，準file transfer $D=(\psi, f)$において，$\psi(v)>0$である点vが存在する場合を考える．定義3で定義されるV_r上の点v_iが$\psi(v_i)=Ub(v_i)$の場合，$De_+(v_i)$上の各点v_jに対して，

$$\pi_j=c_{V_1, v_j}-\Delta_m(v_i), \qquad (11)$$

とする．V_r上の点v_iが$0<\psi(v_i)<Ub(v_i)$の場合，$De_+(v_i)$上の各点v_jに対して，

$$\pi_j=c_v(v_i)+c_{V_i, v_j}, \qquad (12)$$

とする．V_r上の点v_iが$\psi(v_i)=0$ならば，$v_k=fa(v_i)$に対して，

$$\pi_i=\begin{cases} \min\{\pi_k+c_a(v_k, v_i),\ c_v(v_i)\} & (v_i \in V_r-\{v_1\}), \\ -\Delta_m(v_1) & (v_i=v_1), \end{cases} \qquad (13)$$

とする．ここで，V上の各点v_jは，V_r上のある点v_iに対して，$v_j=v_i$の場合も含めて，$v_j \in De_+(v_i)$である．従って，

$$V=\bigcup_{v_i \in V_r} De(v_i), \quad De_+(u) \cap De_+(v) \neq \phi \ (u \neq v,\ u, v \in V_r),$$

であるため，上記のようなπの割り当ては，V上の全ての点に対して重複することなく割り当てられていることに注意．次に，$\psi(v_i)=Ub(v_i)$を満たす各点v_iに対して，

$$\gamma_i=\pi_i-c_v(v_i), \qquad (14)$$

とすると，式(3)及び式(6)が成り立つ．また，$\psi(v_i)<Ub(v_i)$を満たす各点v_iに対して，

$$\gamma_i=0, \qquad (15)$$

とすると，式(5)が成り立つ．また，式(15)により，全てのγに対して，式(8)が成り立つことに注意．従って，以下では，$\psi(v_i)=Ub(v_i)$ならば，式(5)が成り立ち，$0<\psi(v_j)<Ub(v_j)$ならば，

$$c_V(v_j)-\pi_j+\gamma_j=0, \qquad (16)$$

が成り立ち，$\psi(v_j)=0$ならば，式(3)が成り立つことを証明すればよい．また，以下では，V上の点v_jに対して，$v_i=fa(v_j)$とし，V_r上の点uが，$u=v_i$の場合も含め，$v_i\in De_+(u)$を満たすものとする．v_jとV_rの関係によって場合分けして考える．

Case 1．　$v_j\notin V_r$，即ち，$f(v_i,v_j)>0$の場合，式(11)，式(12)より，明らかに式(4)及び式(7)が成り立つ．

Case 1-1．　$\psi(u)=Ub(u)$の場合．$\psi(v_j)=Ub(v_j)$ならば，$v_j\in De_+(u)$であるため，式(9)より，$\Delta(v_j)\geqq\Delta_m(u)$である．式(11)，式(14)より，$\gamma_j=\Delta(v_j)-\Delta_m(u)\geqq0$．次に，$\psi(v_j)<Ub(v_j)$ならば，式(11)及び式(15)より，

$$c_V(v_j)-\pi_j+\gamma_j=\Delta_m(u)-\Delta(v_j). \qquad (17)$$

$0<\psi(v_j)<Ub(v_j)$ならば，式(10)より，補題3が成り立ち，$\Delta_m(u)=\Delta(v_j)$であり，式(16)を満たす．$\psi(v_j)=0$ならば，式(10)より，補題3が成り立ち，$\Delta_m(u)\geqq\Delta(v_j)$であるため，式(17)より，式(3)が成り立つ．

Case 1-2．　$0<\psi(u)<Ub(u)$の場合，まず，$\psi(v_j)=Ub(v_j)$ならば，式(10)より，補題4が成り立ち，$\Delta(v_j)\geqq\Delta(u)$である．従って，式(12)，式(14)より，$\gamma_j=\Delta(v_j)-\Delta(u)\geqq0$．次に，$\psi(v_j)<Ub(v_j)$ならば，式(12)，式(15)より，

$$c_V(v_j)-\pi_j+\gamma_j=\Delta(u)-\Delta(v_j), \qquad (18)$$

である．$0<\psi(v_j)<Ub(v_j)$ならば，式(10)より，補題4が成り立ち，$\Delta(u)=\Delta(v_j)$であるため，式(18)より，式(16)が成り立つ．$\psi(v_j)=0$ならば，式(10)より，補題5が成り立ち，$\Delta(u)\geqq\Delta(v_j)$であるため，式(18)より，式(3)が成り立つ．

Case 2．　$v_j\in V_r$，即ち，$f(v_i,v_j)=0$の場合．まず，$\psi(v_j)=Ub(v_j)$ならば，式(9)，式(11)，式(14)より，$\gamma_j=\Delta(v_j)-\Delta_m(v_j)\geqq0$となり，式(5)が成り立つ．$0<\psi(v_j)<Ub(v_j)$ならば，式(12)より，$c_V(v_j)-\pi_j+\gamma_j=0$となり，式(16)が成り立つ．$\psi(v_j)=0$ならば，式(13)より，$\pi_j\leqq c_V(v_j)$であるため，式(3)が成り立つ．以上より，式(4)及び式(7)以外は全て成り立つことが証明された．Case 2では，$f(v_i,v_j)=0$であるため，式(7)が成り立つ．また，$\psi(v_j)=0$ならば，式(13)より，$\pi_j\leqq$

$\pi_i + c_a(v_i, v_j)$であるため，式(4)が成り立つ．従って，以下では，$\psi(v_j) > 0$である(v_i, v_j)に対して，式(4)が成り立つことを示せばよい．

式(11)〜式(13)より，v_1-v_iパス上の点v_xに対して，

$$\pi_i = \pi_x + c_{v_x, v_i}, \tag{19}$$

となり，$\pi_x = c_v(v_x)$または，$\pi_x = c_{v_1, v_x} - \Delta_m(v_x)$である．

Case2-1　$\pi_x = c_{v_1, v_x} - \Delta_m(v_x)$の場合．式(11)〜式(13)より，$\psi(v_x) = Ub(v_x)$である．$\psi(v_j) = Ub(v_j)$ならば，$v_j \in De(v_x)$であるため，式(9)より，$\Delta_m(v_j) \geqq \Delta_m(v_x)$である．式(11)より，$c_a(v_i, v_j) + \pi_i - \pi_j = \Delta_m(v_j) - \Delta_m(v_x) \geqq 0$である．$0 < \psi(v_j) < Ub(v_j)$ならば，式(9)より，明らかに$\Delta(v_j) \geqq \Delta_m(v_x)$である．従って，式(11)，式(12)より，$c_a(v_i, v_j) + \pi_i - \pi_j = \Delta(v_j) - \Delta_m(v_x) \geqq 0$．よって$\psi(v_j) > 0$である$(v_i, v_j)$に対して，式(4)が成り立つ．

Case2-2　$\pi_x = c_v(v_x)$の場合．式(11)〜式(13)より，$\psi(v_x) < Ub(v_x)$である．式(15)より，補題4が成り立つため，$\Delta(v_j) \geqq \Delta_m(v_j) \geqq \Delta(v_x)$である．$\psi(v_j) = Ub(v_j)$ならば，式(11)，式(19)より，$c_a(v_i, v_j) + \pi_i - \pi_j = \Delta_m(v_j) - \Delta(v_x) \geqq 0$である．$0 < \psi(v_j) < Ub(v_j)$ならば，$c_a(v_i, v_j) + \pi_i - \pi_j = \Delta(v_j) - \Delta(v_x) \geqq 0$である．よって$\psi(v_j) > 0$である$(v_i, v_j)$に対して，式(4)が成り立つ．　□

5．最適な準file transferであるための必要十分条件

この章では，N上の準file transferが最適であるための必要十分条件を示す．まず，与えられた準file transferに対する，点xから点yへのtransfer changeを定義する．

[定義4]　N上の準file transfer $D = (\psi, f)$に対して，点x，点y，及びx，yの関係が以下の条件を満たすとする．

(TC1)　$\psi(x) < Ub(x)$，　$\psi(y) > 0$，

(TC2)　$y \in De(x)$か，または，v_1-yパス上のある点zに対して，$x \in De_+(z)$．

このとき，以下の操作により，Dから$D' = (\psi', f')$を得ることを，Dに対する，xからyへのtransfer changeと呼ぶ．

(I)　$y \in De(x)$の場合

$$\delta_1 \equiv \min\{Ub(x) - \psi(x), \psi(y)\},$$

とし，V上の関数ψ'並びにA'上の関数f'を

$$\psi'(x)=\psi(x)+\delta_1,$$
$$\psi'(y)=\psi(y)-\delta_1,$$
$$\psi'(v)=\psi(v)\qquad(v\in V-\{x,y\}).$$
$$f'(e)=f(e)+\delta_1\qquad(e\in P_{x,y}),$$
$$f'(e)=f(e)\qquad(\text{otherwise}).$$

とする．

(Ⅱ) $y\notin De(x)$の場合，

$\delta_2\equiv\min\{Ub(x)-\psi(x),\psi(y),\min\{f(e)\mid e\in P_{z,x}\}\}$，

とし，V上の関数ψ'並びにA'上の関数f'を

$$\psi'(x)=\psi(x)+\delta_2,$$
$$\psi'(y)=\psi(y)-\delta_2,$$
$$\psi'(v)=\psi(v)\qquad(v\in V-\{x,y\}).$$
$$f'(e)=f(e)-\delta_2\qquad(e\in P_{z,x}),$$
$$f'(e)=f(e)+\delta_2\qquad(e\in P_{z,y}),$$
$$f'(e)=f(e)\qquad(\text{otherwise}).\ \square$$

[命題４]　N上の準file transfer $D=(\psi,f)$において，2点x及びyが定義４の(TC1)及び(TC2)の条件を満たすとする．このときDに対して，xからyへのtransfer changeを行った結果得られる$D'=(\psi',f')$はN上の準file transferであり，定義４の$\delta_i(i\in\{1,2\})$は，$\delta_i>0$を満たし，かつ，

$$C(D')-C(D)=\delta_i\{\Delta(y)-\Delta(x)\},$$

が成り立つ．

(証明)　定義４においてψ'がV上の任意の点vに対して，$\psi'(v)\leqq Ub(v)$，$\psi'(v)\in\mathbb{Z}$であり，(TC2)より，A上の任意の枝eに対して，$f'(e)\in\mathbb{Z}$である．また，ψ'並びにf'が(C1')を満たすことは明らか．従って，$D'=(\psi',f')$はN上の準file transferである．明らかに，(TC1)及び(TC2)より，$\delta_i>0\ (i\in\{1,2\})$が成り立つ．更に，$y\in De(x)$の場合，定義３，４より，

$$\begin{aligned}C(D')-C(D)&=c_v(x)\cdot\{\psi'(x)-\psi(x)\}\\&\quad+c_v(y)\cdot\{\psi'(y)-\psi(y)\}\\&\quad+\sum_{e\in P_{x,y}}c_a(e)\cdot\{f'(e)-f(e)\}\\&=\delta_1\cdot\{c_v(x)-c_v(y)+c_{x,y}\}\\&=\delta_1\cdot\{\Delta(y)-\Delta(x)\},\end{aligned}$$

である．$y\notin De(x)$の場合も同様に証明できる．　□

以上を基に，N上の準file transferが最適であるための必要十分条件が求められる．

[定理]　Arborescence-Net Nにおいて，準file

transfer $D=(\psi, f)$が最適であるための必要十分条件は，$\psi(v)>0$である全ての点vがv_1-vﾊﾟｽ上の全ての点uに対して，

$$\Delta(v) \geqq \Delta(D, u), \tag{20}$$

が成り立つことである．

(証明)十分性は命題3より，明らかであるため，ここでは必要性のみ証明する．式(20)が成り立たない，即ち，$\psi(v)>0$である点vに対して，

$$\Delta(D, u) > \Delta(v), \tag{21}$$

である点uがv_1-vﾊﾟｽ上に存在すると仮定し，

$$\Delta(w) = \Delta(D, u), \tag{22}$$

とする．式(21)を満たすvが存在するため，定義3より，$\psi(v) < Ub(v)$である．wとvの関係により，wがv_1-vﾊﾟｽ上に存在する場合と存在しない場合とに分けられるが，いずれの場合も，w及びvは(TC1)及び(TC2)を満たす．命題4より，Dに対して，wからvへのtransfer changeを行なえば，N上の準file transfer D'が得られ，

$$C(D') - C(D) = \delta_i \{\Delta(v) - \Delta(w)\} \quad (i \in \{1, 2\}),$$

が成り立つ．式(21)，式(22)より，$\Delta(v) < \Delta(w)$である．また，命題4より，$\delta_i > 0$であるため，結局，$C(D') < C(D)$である．従って，必要性は証明された．　□

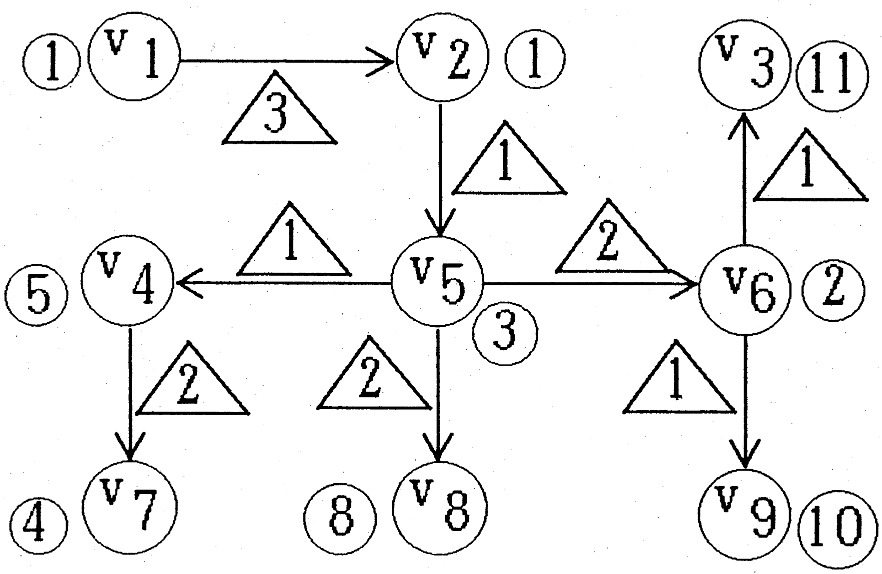

図1-1.　Arborescence-Net N(点のｺｽﾄ，枝のｺｽﾄ)

6．図例

図例を示す．図1のArborescence-Net Nにおいて，○，△，□，▽で囲まれた値はそれぞれ付近の点のｺｽﾄ，枝のｺｽﾄ，点の需要値，及び点の供給上限を示す．このNに対

して，需要値変更を行なった結果，各点の需要値は，

$d'(v_1)=1$, $d'(v_2)=1$, $d'(v_3)=2$, $d'(v_4)=2$,
$d'(v_5)=3$, $d'(v_6)=2$, $d'(v_7)=2$, $d'(v_8)=2$,
$d'(v_9)=1$,

になる．また，各点のΔは以下の通りである．

$\Delta(v_1)=-1$, $\Delta(v_2)=2$, $\Delta(v_3)=-4$, $\Delta(v_4)=0$,
$\Delta(v_5)=1$, $\Delta(v_6)=4$, $\Delta(v_7)=3$, $\Delta(v_8)=-2$,
$\Delta(v_9)=-3$,

である．

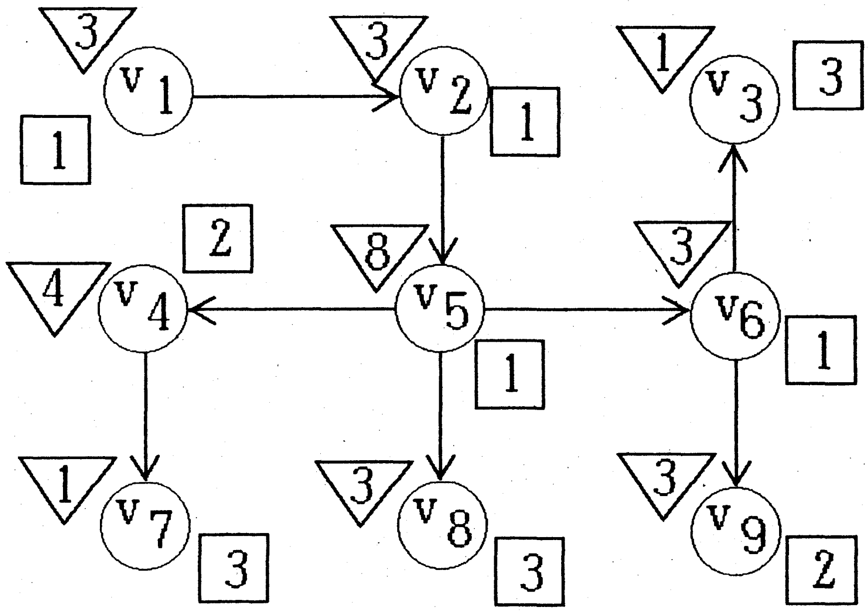

図1-2. Arborescence-Net N（点の需要値及び供給上限）

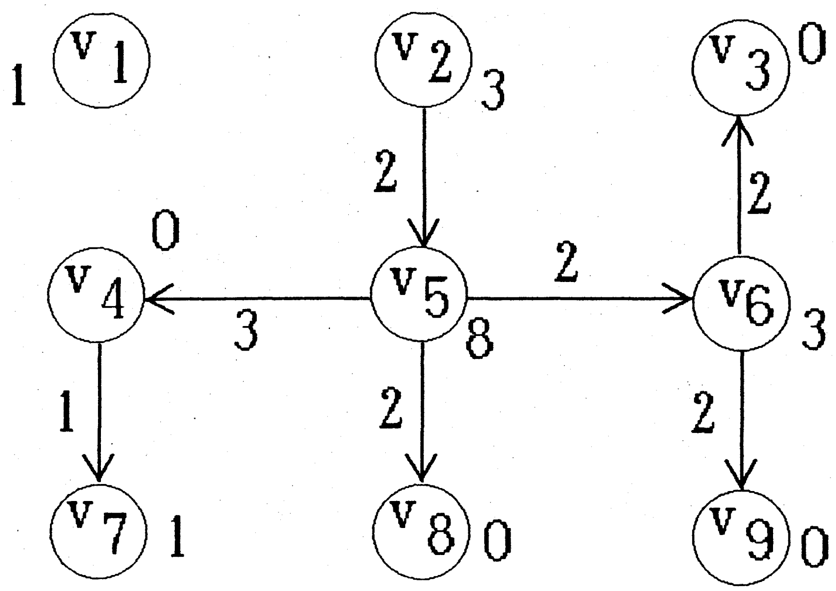

図2. N上の準 file transfer $D=(\psi, f)$

図２のようなＮ上の準 file transfer D＝（ψ，f)を考える．図２において点v付近の値は ψ（v)を示し，枝e付近の値はf(e)を示す．ただし，A上の枝eがf(e)＝０ならば，eは図２においては存在しない．このDに対して，
$\Delta(D,v_1)=-1$，$\Delta(D,v_2)=0$，　$\Delta(D,v_3)=-4$，
$\Delta(D,v_4)=0$，　$\Delta(D,v_5)=0$，　$\Delta(D,v_6)=-3$，
$\Delta(D,v_7)=-4$，$\Delta(D,v_8)=-2$，$\Delta(D,v_9)=-3$，
である．ここで，$\psi(v)>0$ である点vは，v_1, v_2, v_5, v_6, v_7である．v_1に対して，
$\Delta(v_1)=\Delta(D,v_1)$.
v_1-v_2ﾊﾟｽ上では，$\psi(v_1)>0$，$\psi(v_2)>0$ であり，
$\Delta(v_2)>\Delta(D,v_1)$, $\Delta(v_2)>\Delta(D,v_2)$.
v_1-v_5ﾊﾟｽ上では，$\psi(v_1)>0$，$\psi(v_2)>0$，$\psi(v_5)>0$ であり，
$\Delta(v_5)>\Delta(D,v_1)$,　$\Delta(v_5)>\Delta(D,v_2)$,
$\Delta(v_5)>\Delta(D,v_5)$.
v_1-v_6ﾊﾟｽ上では，$\psi(v_1)>0$，$\psi(v_2)>0$，$\psi(v_5)>0$，$\psi(v_6)>0$ であり，
$\Delta(v_6)>\Delta(D,v_1)$,　$\Delta(v_6)>\Delta(D,v_2)$,
$\Delta(v_6)>\Delta(D,v_5)$,　$\Delta(v_6)>\Delta(D,v_6)$.
v_1-v_7ﾊﾟｽ上では，$\psi(v_1)>0$，$\psi(v_2)>0$，$\psi(v_4)>0$，$\psi(v_5)>0$，$\psi(v_7)>0$ であり，
$\Delta(v_7)>\Delta(D,v_1)$,　$\Delta(v_7)>\Delta(D,v_2)$,
$\Delta(v_7)>\Delta(D,v_4)$,　$\Delta(v_7)>\Delta(D,v_5)$,
$\Delta(v_7)>\Delta(D,v_7)$.

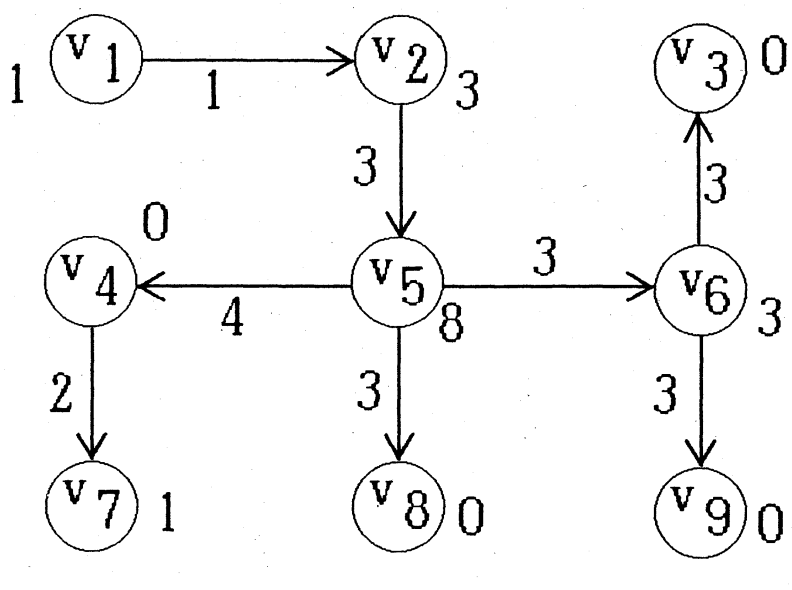

図３．Ｎ上の最適な file transfer D'＝（ψ，f'）

以上より，このDは，式(20)を満足するため，定理より，DはN上で最適である．式(2)を用いると，図2より，最適なfile transfer D'＝(ψ，f')は図3のようになる．ただし，図4において点v付近の値はψ(v)を示し，枝e付近の値はf'(e)を示す．

7．むすび

本報告では，点に，ｺｽﾄ，需要値，供給上限を持ち，枝にｺｽﾄを持つarborescenceの構造のﾌｧｲﾙ転送ﾈｯﾄﾜｰｸ(Arborescence-Net)Nにおいて，Nの根から，複製可能なﾌｧｲﾙJのｺﾋﾟｰを，定義するfile transferを通して，各点に提供する問題を考察対象とした．file transfer Dを通して，各点においてJをｺﾋﾟｰするのに要するｺｽﾄと，Jのｺﾋﾟｰを各枝を通って送るのに要するｺｽﾄとの和をDのｺｽﾄと定義し，Nにおいて，ｺｽﾄが最小となるfile transferをN上の最適なfile transferと定義し，最適なfile transferを求めることを目的とした．考察の結果，file transferと1対1対応する準file transferを用いて，Nにおいて，file transferが最適であるための必要十分条件を明らかにした．

今後の課題として，この必要十分条件を基に，実際に最適なfile transferを求めるｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを構築することが挙げられる．

参考文献

[1] Kaneko Y., Tashiro R., Shinoda S., & Horiuchi K. "A linear-time algorithm for designing an optimal file transfer through an arborescence-net," IEICE Trans. E75-A, 7, pp. 901-904, Jul. 1992.

[2] Kaneko Y., Shinoda S., & Horiuchi K. "A synthesis of an optimal file transfer on a file transmission net," IEICE Trans. E76-A, 3, pp. 377-386, Mar. 1993.

[3] 伊理正夫，白川功，梶谷洋司，篠田庄司：演習グラフ理論，コロナ社(1983).

[4] 古林隆：線形計画法入門，産業図書(1980).

[5] 金子美博，篠田庄司，堀内和夫，"複製部数に制限のあるArborescence-Net上の最適なfile transferの構成について，"電子情報通信学会1993年秋季大会(1993.9).