

代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解

京大・総合人間学部 松木敏彦 (Toshihiko MATSUKI)

G を代数群、 σ, τ を G 上の 2 つの involution とし、 $H = G^\sigma, L = G^\tau$ をそれぞれ σ, τ に関する G の固定部分群とする。本稿では、両側剰余類分解 $H \backslash G / L$ の標準的代表元のとりかたについて、(1) すでに知られていること、(2) 一例として $GL(p, \mathbb{F}) \times GL(n-p, \mathbb{F}) \backslash GL(n, \mathbb{F}) / GL(r, \mathbb{F}) \times GL(n-r, \mathbb{F})$ (\mathbb{F} は任意の体)、(3) 若干の一般論 について述べる。

1 知られている事柄

G は連結で real reductive とする。次の 3 つの条件のどれかが成り立つ場合には、両側剰余類分解 $H \backslash G / L$ の構造が知られている。

- (a) G は compact で σ と τ は可換 ([3]).
- (b) σ, τ のどちらかが Cartan involution ([2]).
- (c) $\sigma = \tau$ ([13]).

注意 1 (a) かつ (b) のときは、compact 対称空間の理論において、(b) かつ (c) のときは noncompact type の対称空間に関する Cartan 分解として、よく知られている。

(b) において σ と τ は可換としてよく ([1],[7])、(a) または (b) の場合、 $B = \{g \in G \mid \sigma(g) = \tau(g) = g^{-1}\}$ に含まれる極大連結可換部分群 A の中に代表元を取ることができる。(a) において σ と τ の可換性が無くても成り立つことが最近わかった。) また、(b) の場合

$$A/W \longrightarrow H \backslash G / L$$

である。ただし、 $W = N_{H \cap L}(A) / Z_{H \cap L}(A)$, $N_*(A)$, $Z_*(A)$ は A の $*$ における正規化群、中心化群。

次に、(c) の場合について知られていることを述べる。 $\varphi: g \mapsto g\sigma(g)^{-1}$ により、明らかに

$$G/H \cong \varphi(G)$$

であり、

$$H \backslash G / H \cong \{\varphi(G) \text{ 上の } H\text{-共役類}\}$$

である。

命題 1 $g \in \varphi(G)$, $g = su$ を g の Jordan 分解とすると、 $s, u \in \varphi(G)$ 。

G, H のリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とし、

$$\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}$$

($\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$) とおく。 \mathfrak{q} の半単純元からなる極大可換部分空間を \mathfrak{q} の Cartan subspace と呼ぶ。 $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ を \mathfrak{q} の Cartan subspace の H -共役類の 1 つの完全代表系とし、

$$A_i = Z_{\varphi(G)}(\alpha_i)$$

とする。 $\mathfrak{q}, \varphi(G)$ の半単純元の集合 $\mathfrak{q}_{ss}, \varphi(G)_{ss}$ について、

定理 1 ([13]) α_i の標準的な取り方があり (特に、 I は有限集合であり、 α_i の次元は全て同じ)、

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{ss} &= \bigcup_{i \in I} \text{Ad}(H)(\alpha_i), \\ \varphi(G)_{ss} &= \bigcup_{i \in I} \text{Ad}(H)(A_i). \end{aligned}$$

\mathfrak{q} の巾零元の集合 \mathfrak{q}_{nilp} 、 $\varphi(G)$ の巾単元の集合 $\varphi(G)_{unip}$ については、

$$\exp : \mathfrak{q}_{nilp} \longrightarrow \varphi(G)_{unip}$$

であり、 \mathfrak{q}_{nilp} の H -共役類 (及びその閉包関係、singularity 等) については [5],[10],[11],[12],[15],[16] 等の研究がある。

特に $G = G_1 \times G_1$, $\sigma(x, y) = (y, x)$ for $x, y \in G_1$ の場合、 $H = \{(x, x) \mid x \in G_1\}$ であり、 $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ によって $G/H \cong G_1$ だから、 $H \backslash G/H$ は G_1 の共役類分解と同一視できることに注意する。

しかし、以上の (a), (b), (c) の条件のどれも満たさない場合の $H \backslash G/L$ の組織的研究はまだなされていなかったようである。[9] の研究において以下の G, H, L について $H \backslash G/L$ のある標準的的代表系を与えることができた。

	G	H	L	\mathbb{F}
(1)	$GL(n, \mathbb{F})$	$GL(p, \mathbb{F}) \times GL(q, \mathbb{F})$	$GL(r, \mathbb{F}) \times GL(s, \mathbb{F})$	any field
(2)	$GL(n, \mathbb{C})$	$O(n, \mathbb{C})$	$O(n, \mathbb{C})$	
	$GL(n, \mathbb{H})$	$O^*(2n)$	$O^*(2n)$	
	$GL(2m, \mathbb{F})$	$Sp(m, \mathbb{F})$	$Sp(m, \mathbb{F})$	\mathbb{R}, \mathbb{C}
	$GL(n, \mathbb{F})$	$U(p, q; \mathbb{F})$	$U(r, s; \mathbb{F})$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
(3)	$GL(n, \mathbb{C})$	$GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C})$	$O(n, \mathbb{C})$	
	$GL(n, \mathbb{H})$	$GL(p, \mathbb{H}) \times GL(q, \mathbb{H})$	$O^*(2n)$	
	$GL(2m, \mathbb{F})$	$GL(p, \mathbb{F}) \times GL(q, \mathbb{F})$	$Sp(m, \mathbb{F})$	\mathbb{R}, \mathbb{C}
	$GL(n, \mathbb{F})$	$GL(p, \mathbb{F}) \times GL(q, \mathbb{F})$	$U(r, s; \mathbb{F})$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
(4)	$O(n, \mathbb{C})$	$O(p, \mathbb{C}) \times O(q, \mathbb{C})$	$O(r, \mathbb{C}) \times O(s, \mathbb{C})$	
	$O^*(2n)$	$O^*(2p) \times O^*(2q)$	$O^*(2r) \times O^*(2s)$	
	$Sp(m, \mathbb{F})$	$Sp(p', \mathbb{F}) \times Sp(q', \mathbb{F})$	$Sp(r', \mathbb{F}) \times Sp(s', \mathbb{F})$	\mathbb{R}, \mathbb{C}
	$U(n_1, n_2; \mathbb{F})$	$U(p_1, p_2; \mathbb{F}) \times U(q_1, q_2; \mathbb{F})$	$U(r_1, r_2; \mathbb{F}) \times U(s_1, s_2; \mathbb{F})$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

ただし $n = p + q = r + s$, $m = n/2$, $m = p' + q' = r' + s'$, $n_1 = p_1 + q_1 = r_1 + s_1$ and $n_2 = p_2 + q_2 = r_2 + s_2$. ((2) のうち初めの3つは $H = L$ であるから [13] の研究に含まれるが、[9] ではより具体的な記述がなされている。)

注意 2 (c.f. [9] Section 2.2) 次の両側剰余類分解 $H \backslash G / L$ は $\text{Lie}(H) \cap G$ の H -共役類分解と 1 対 1 に対応する。

$$O(p, q) \backslash GL(2m, \mathbb{R}) / Sp(m, \mathbb{R}) \quad (p + q = 2m)$$

$$O(2m, \mathbb{C}) \backslash GL(2m, \mathbb{C}) / Sp(m, \mathbb{C})$$

$$Sp(p, q) \backslash GL(n, \mathbb{H}) / O^*(2n) \quad (p + q = n)$$

2 $GL(p, \mathbb{F}) \times GL(n - p, \mathbb{F}) \backslash GL(n, \mathbb{F}) / GL(r, \mathbb{F}) \times GL(n - r, \mathbb{F})$

\mathbb{F} を任意の体 (非可換でもよい) とし、 $G = GL(n, \mathbb{F})$ の部分群 H 及び L を次で定義する。

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \mid P \in GL(p, \mathbb{F}), Q \in GL(q, \mathbb{F}) \right\},$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \mid R \in GL(r, \mathbb{F}), S \in GL(s, \mathbb{F}) \right\}$$

$$(n = p + q = r + s)$$

注意 3 \mathbb{F} の標数 $\neq 2$ のとき、 G の involution $\sigma: g \mapsto I_{p,q}gI_{p,q}$ 及び $\tau: g \mapsto I_{r,s}gI_{r,s}$ によって、 $H = G^\sigma$ 及び $L = G^\tau$ と書ける。ここで

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}.$$

定理 2 G の任意の H-L 両側剰余類は次の形の元を含む。

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ここで、 $p \times r$ 行列 A , $p \times s$ 行列 B , $q \times r$ 行列 C 及び $q \times s$ 行列 D は次で与えられ、

$$A = \begin{pmatrix} A(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A(k) \\ & & & I_{n_r} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(k) \\ & & & I_{n_r} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(k) \\ & & & I_{n_r} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D(k) \\ & & & D_{\text{reg}} \end{pmatrix}$$

D_{reg} は $D_{\text{reg}} - I_{n_r} \in GL(n_r, \mathbb{F})$ を満たす $GL(n_r, \mathbb{F})$ の元であり、 $(A(j), B(j), C(j), D(j))$ は次の 8 種類のうちの 1 つである。(ℓ は自然数)

type	$A(j)$	$B(j)$	$C(j)$	$D(j)$
$ad \cdots da$	I_ℓ	$N_{\ell, \ell-1}$	$N_{\ell-1, \ell}$	$I_{\ell-1}$
$da \cdots ad$	$I_{\ell-1}$	$N_{\ell-1, \ell}$	$N_{\ell, \ell-1}$	I_ℓ
$ad \cdots ad$	I_ℓ	N_ℓ	I_ℓ	I_ℓ
$da \cdots da$	I_ℓ	I_ℓ	N_ℓ	I_ℓ
$bc \cdots cb$	$N_{\ell, \ell-1}$	I_ℓ	$I_{\ell-1}$	$N_{\ell-1, \ell}$
$cb \cdots bc$	$N_{\ell-1, \ell}$	$I_{\ell-1}$	I_ℓ	$N_{\ell, \ell-1}$
$bc \cdots bc$	N_ℓ	I_ℓ	I_ℓ	I_ℓ
$cb \cdots cb$	I_ℓ	I_ℓ	I_ℓ	N_ℓ

($N_\ell, N_{\ell, \ell-1}, N_{\ell-1, \ell}$ はそれぞれ大きさが $\ell \times \ell, \ell \times (\ell-1), (\ell-1) \times \ell$ の次の形の行列

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.)$$

証明. $G = GL(n, \mathbb{F})$ とし、 n 次元右 \mathbb{F} -ベクトル空間 \mathbb{F}^n を

$$\mathbb{F}^n = V^+ \oplus V^- = W^+ \oplus W^-$$

と分解する。ただし

$$V^+ = e_1\mathbb{F} \oplus \cdots \oplus e_p\mathbb{F},$$

$$V^- = e_{p+1}\mathbb{F} \oplus \cdots \oplus e_n\mathbb{F},$$

$$W^+ = e_1\mathbb{F} \oplus \cdots \oplus e_r\mathbb{F},$$

$$W^- = e_{r+1}\mathbb{F} \oplus \cdots \oplus e_n\mathbb{F}$$

($\{e_1, \dots, e_n\}$ は \mathbb{F}^n の標準的基底) とする。このとき、

$$H = \{g \in G \mid gV^+ = V^+ \text{ and } gV^- = V^-\},$$

$$L = \{g \in G \mid gW^+ = W^+ \text{ and } gW^- = W^-\}.$$

任意の $g \in G$ に対し、

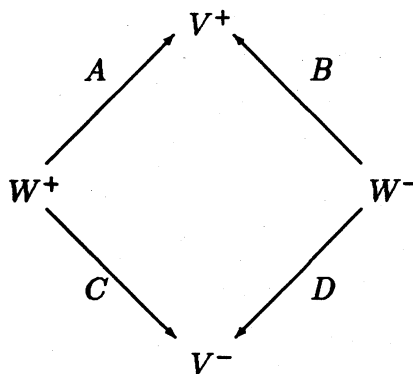
HgL の代表元の取り方 =

$\{g : W^+ \oplus W^- \rightarrow V^+ \oplus V^- \text{ における } V^+, V^-, W^+, W^- \text{ の基底の取り方}\}$

であることに注意する。

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

とおく (A, B, C, D はそれぞれ $p \times r, p \times s, q \times r, q \times s$ -行列とする。) と、次の図式が書ける。



Idea (落合啓之氏による) $Q = A^{-1}BD^{-1}C : W^+ \rightarrow W^+$ が定義できる (写像になる) ならば Q の共役類は HgL の不変量である。

以下のように定理2の証明では $GL(n, \mathbb{F})$ の定義すなわち逆元の存在のみを使うのであるが、 $n \times n$ -行列全体に対して同じ問題を考えるときは上の idea が基本になると思われる (c.f. [4])。

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}$$

(ただし A', B', C', D' はそれぞれ $r \times p, s \times p, r \times q, s \times q$ -行列) とおき、

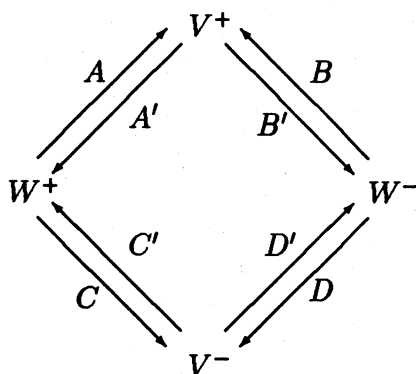
$$E = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

$$E' = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} 0 & C' \\ B' & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$E'E + F'F = I_n, \quad E'F + F'E = 0, \quad EE' + FF' = I_n, \quad EF' + FE' = 0 \quad (2.1)$$

が成り立ち、次の図式が書ける。



$\lambda \in \mathbb{F}_0$ (\mathbb{F} の center) に対し、

$$E'E = \begin{pmatrix} A'A & 0 \\ 0 & D'D \end{pmatrix} : W^\pm \rightarrow W^\pm$$

の一般固有空間

$$W_\lambda^\pm = \{w \in W^\pm \mid (E'E - \lambda I_n)^N w = 0 \text{ for } N \gg 0\}$$

が定義できる。また、十分大きい N について

$$W_{\text{reg}}^\pm = (E'E)^N (E'E - I_n)^N W^\pm$$

とおけば、一般固有空間分解

$$W^\pm = W_1^\pm \oplus W_0^\pm \oplus W_{\text{reg}}^\pm$$

ができる。同様に、 $EE' : V^\pm \rightarrow V^\pm$ についても

$$V^\pm = V_1^\pm \oplus V_0^\pm \oplus V_{\text{reg}}^\pm$$

とできる。この2つの分解について、容易に次の補題が示せる。((2.1) も用いる。)

補題 1 次の図式が成り立つ。ただし、 f_* は f の制限。

$$\begin{array}{ccccccc} W^\pm & = & W_1^\pm & \oplus & W_0^\pm & \oplus & W_{\text{reg}}^\pm \\ E \updownarrow E' & & E_1 \updownarrow E'_1 & & E_0 \updownarrow E'_0 & & E_{\text{reg}} \updownarrow E'_{\text{reg}} \\ V^\pm & = & V_1^\pm & \oplus & V_0^\pm & \oplus & V_{\text{reg}}^\pm \\ \\ W^\pm & = & W_1^\pm & \oplus & W_0^\pm & \oplus & W_{\text{reg}}^\pm \\ F \updownarrow F' & & F_1 \updownarrow F'_1 & & F_0 \updownarrow F'_0 & & F_{\text{reg}} \updownarrow F'_{\text{reg}} \\ V^\mp & = & V_1^\mp & \oplus & V_0^\mp & \oplus & V_{\text{reg}}^\mp \end{array}$$

以上によって、 $g_* = E_* + F_* : W_*^+ \oplus W_*^- \rightarrow V_*^+ \oplus V_*^-$ ($*$ = 1, 0, reg) を標準形にすればよい。 $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}_0$ に対し、次の図式が書ける。

$$\begin{array}{ccccc} & & V_\lambda^+ & & \\ & \nearrow A_\lambda & & \nwarrow B_\lambda & \\ & W_\lambda^+ & & W_\lambda^- & \\ & \nwarrow C_\lambda & & \nearrow D_\lambda & \\ & & V_\lambda^- & & \end{array}$$

(The diagram shows a diamond shape with vertices V_λ^+ at the top, V_λ^- at the bottom, W_λ^+ on the left, and W_λ^- on the right. Arrows connect the vertices: A_λ from W_λ^+ to V_λ^+ , B_λ from W_λ^- to V_λ^+ , C_λ from W_λ^+ to V_λ^- , and D_λ from W_λ^- to V_λ^- . There are also arrows from V_λ^+ to W_λ^+ labeled A'_λ , from V_λ^+ to W_λ^- labeled B'_λ , from V_λ^- to W_λ^+ labeled C'_λ , and from V_λ^- to W_λ^- labeled D'_λ .)

(2.1) により、

$$E'_\lambda E_\lambda + F'_\lambda F_\lambda = I_{W_\lambda} \quad (2.2)$$

$$E'_\lambda F_\lambda + F'_\lambda E_\lambda = 0 \quad (2.3)$$

(2.3) の両辺に右から $E_\lambda^{-1}F_\lambda$ をかけて、

$$E'_\lambda F_\lambda E_\lambda^{-1} F_\lambda + F'_\lambda F_\lambda = 0 \quad (2.4)$$

(2.2) から (2.4) を辺々引いて、

$$\begin{aligned} E'_\lambda E_\lambda - E'_\lambda F_\lambda E_\lambda^{-1} F_\lambda &= I_{W_\lambda} \\ E'_\lambda E_\lambda (I_{W_\lambda} - (E_\lambda^{-1} F_\lambda)^2) &= I_{W_\lambda} \\ (E_\lambda^{-1} F_\lambda)^2 &= I_{W_\lambda} - (E'_\lambda E_\lambda)^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

したがって、

$$E_\lambda^{-1} F_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & A_\lambda^{-1} B_\lambda \\ D_\lambda^{-1} C_\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

が nilpotent $\iff \lambda = 1$ 。

一般に、“nilpotent pair”

$$V_a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f} \end{array} V_b \quad (2.6)$$

(f^2 は nilpotent) について、次のことが知られている (c.f. [6])。 $v_1, \dots, v_k \in V_a \cup V_b$ をうまくとれば、 $V_j = \sum_{N \geq 0} f^N v_j$ とおくと

$$V_a \oplus V_b = \bigoplus_{j=1}^k V_j$$

が成り立つ。 V_j に対し次のように “ab-string” を対応させることができ、

ab-string	dim V_j	#a	#b	$f^N v_j$ (N : even)	$f^N v_j$ (N : odd)
$ab \cdots ba$	$2\ell - 1$	ℓ	$\ell - 1$	V_a	V_b
$ba \cdots ab$	$2\ell - 1$	$\ell - 1$	ℓ	V_b	V_a
$ab \cdots ab$	2ℓ	ℓ	ℓ	V_a	V_b
$ba \cdots ba$	2ℓ	ℓ	ℓ	V_b	V_a

nilpotent pair (2.6) に対してこれらの ab-string の集まり “ab-diagram” を対応させることができる。

$g_1 = E_1 + F_1$ について、 W_1^\pm と V_1^\pm を

$$E_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$$

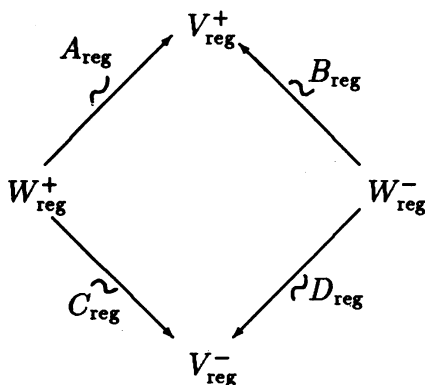
によって同一視して $E_1 = \text{id.}$ としてよく、 F_1 に対して “ad”-diagram を対応させるのが自然である。また、 $g_0 = E_0 + F_0$ については、 W_0^\pm と V_0^\mp を

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_0 \\ C_0 & 0 \end{pmatrix}$$

によって同一視し、 E_0 に対して “bc”-diagram を対応させるのがよい。最後に、

$$g_{\text{reg}} = E_{\text{reg}} + F_{\text{reg}} = \begin{pmatrix} A_{\text{reg}} & B_{\text{reg}} \\ C_{\text{reg}} & D_{\text{reg}} \end{pmatrix}$$

については



であるから、 $A_{\text{reg}} = B_{\text{reg}} = C_{\text{reg}} = I_{n_r}$ ($n_r = \dim W_{\text{reg}}^\pm = \dim V_{\text{reg}}^\pm$) としてよく、(2.5) と同様にして

$$\begin{pmatrix} D_{\text{reg}} & 0 \\ 0 & D_{\text{reg}} \end{pmatrix} = (F_{\text{reg}}^{-1} E_{\text{reg}})^2 = I_{2n_r} - (F'_{\text{reg}} F_{\text{reg}})^{-1}$$

が成り立つから

$$I_{n_r} - D_{\text{reg}} \in GL(n_r, \mathbb{F})$$

である。

q.e.d.

$$\begin{aligned} \text{系} \quad H \backslash G / L \cong & \bigsqcup_{n_r=0}^{\min(p,q,r,s)} \{GL(n_r, \mathbb{F})' \text{ の共役類}\} \times \{ad\text{-diagram} \sqcup bc\text{-diagram} \mid \\ & \#a + \#b = p - n_r, \#c + \#d = q - n_r, \#a + \#c = r - n_r, \#b + \#d = s - n_r\} \end{aligned}$$

ただし $\#*$ は diagram 中の文字 $*$ の数を表し、 $GL(n_r, \mathbb{F})' = \{g \in GL(n_r, \mathbb{F}) \mid I_{n_r} - g \in GL(n_r, \mathbb{F})\}$ 。

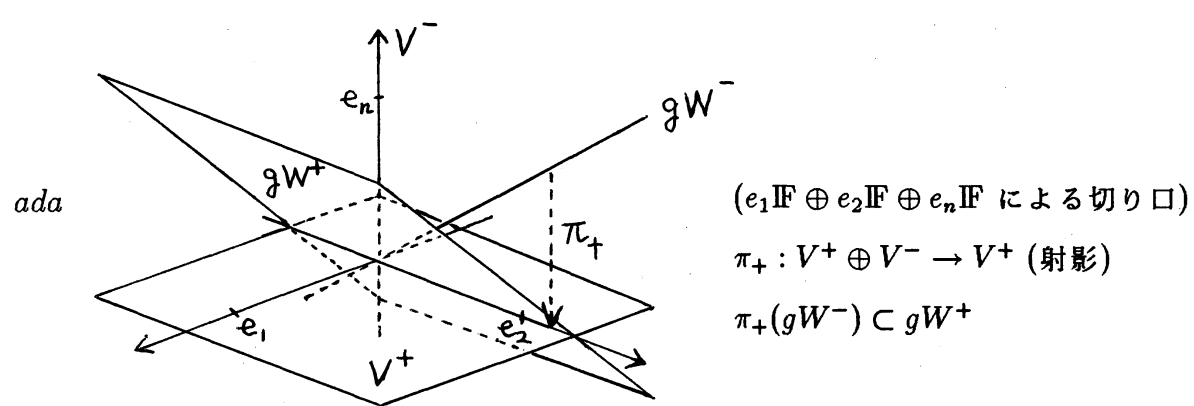
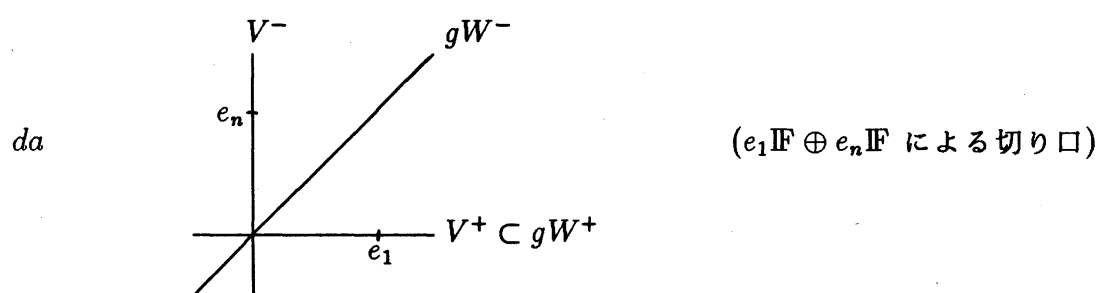
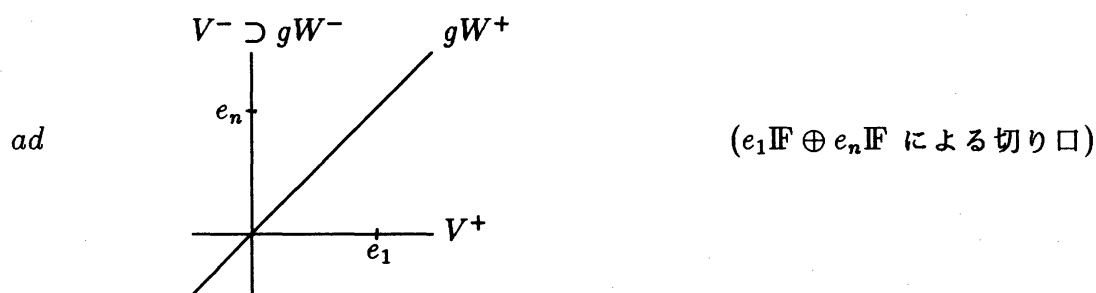
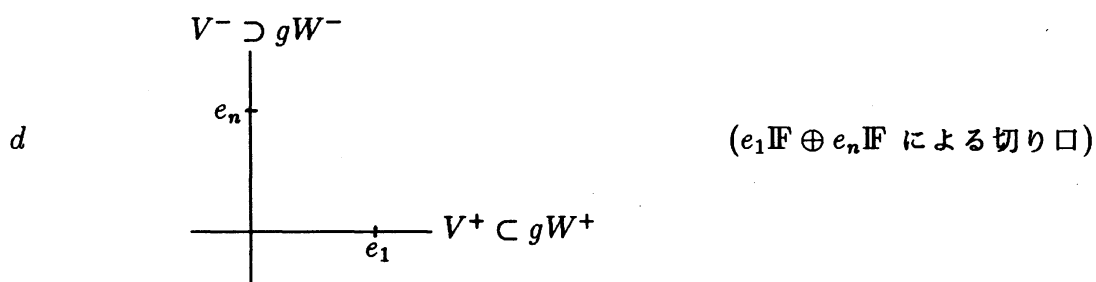
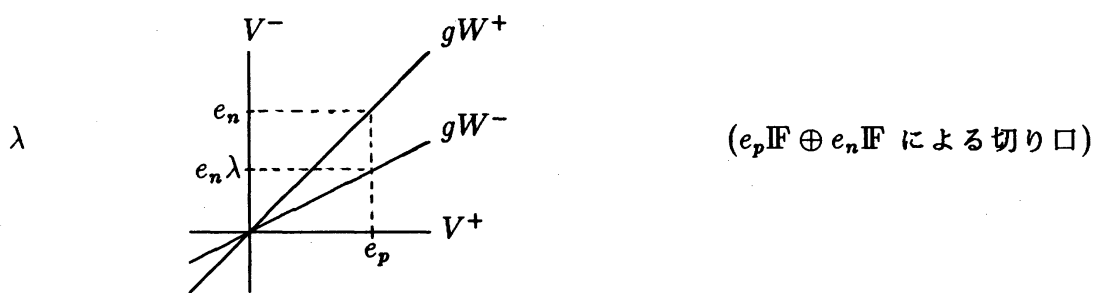
例 1 ([4]) $p \geq 2, q \geq 2$ かつ $s = 1$ のときを考える。

$$\#b + \#d + n_r = s = 1$$

であるから、 G の H-L 両側剰余類は次の 9 種類である。 $(\lambda \in \mathbb{F} - \{0, 1\}, H \setminus G/L \cong (\mathbb{F} - \{0, 1\}) \sqcup 8 \text{ point})$

type	representative g	n_r	ad -diag.	bc -diag.	codim.
λ	$\begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	1
d	$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	$2p$
ad	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} ad \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	p
da	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} da \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	p
ada	$\begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 & N_{2,1} \\ 0 & I_{p-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ N_{1,2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} ada \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	1
b	$\begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_q & 0 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b \\ c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	$2q$
bc	$\begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} bc \\ c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	q
cb	$\begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} cb \\ c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	q
cbc	$\begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,2} & 0 & 1 \\ 0 & I_2 & 0 & N_{2,1} \\ 0 & 0 & I_{q-2} & 0 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} cbc \\ c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$	1

V^+, V^-, gW^+, gW^- を図示すると次のようになる。



b, bc, cb, cbc の type についてはそれぞれ a, da, ad, ada の図において V^+ と V^- の役割を入れ替えた図を書けばよい。

3 若干の一般論

実代数群 G とその involution τ について $L = G^\tau$ とおき、写像 $\psi : G \rightarrow G$ を $\psi(x) = x\tau(x)^{-1}$ で定義する。このとき、 ψ は全単射 $G/L \rightarrow \psi(G)$ を導く。 G の任意の閉部分群 Q に対し、次の写像が定義できる。

$$\tilde{\psi} : Q \backslash G/L \rightarrow Q \backslash G/\tau(Q)$$

命題 2 $\tilde{\psi}$ の各 fiber は有限集合である。

証明. 任意の $x \in G$ に対し、 $\tilde{\psi}$ の定義により

$$\{QyL \mid \psi(y) \in Q\psi(x)\tau(Q)\}$$

の有限性を示せばよい。 $Q_x = x^{-1}Qx$ とおくと、 $Q \backslash G/L$ は $QyL \mapsto x^{-1}QyL = Q_x x^{-1}yL$ により $Q_x \backslash G/L$ と同一視できるから、次の集合 R の有限性を示せばよい。

$$R = \{Q_x zL \mid \psi(z) \in Q_x \tau(Q_x)\}$$

明らかに

$$R = \{Q_x zL \mid \psi(z) \in Q_x\} = \{Q_x zL \mid \psi(z) \in (Q_x^\tau)^-\}$$

ただし $Q_x^\tau = Q_x \cap \tau(Q_x)$ and $(Q_x^\tau)^- = \{w \in Q_x \mid \tau(w) = w^{-1}\} = \{w \in Q_x^\tau \mid \tau(w) = w^{-1}\}$ である。 $R' = \{Q_x^\tau zL \mid \psi(z) \in (Q_x^\tau)^-\}$ とおくと、自然な写像 $R' \rightarrow R$ は全射であり、 R' は Galois cohomology $H^1(Q_x^\tau, \tau) = (Q_x^\tau)^- / \sim$ の部分集合に埋め込める。ここで同値関係 \sim は $w \sim w' \iff w' = qw\tau(q)^{-1}$ for some $q \in Q_x^\tau$ で定義されている。この Galois cohomology は宇澤達氏により有限であることが示されている。(N を Q_x^τ の unipotent radical とし、 K を τ -stable な Q_x^τ/N の極大コンパクト部分群とすると、自然な写像 $H^1(Q_x^\tau, \tau) \rightarrow H^1(Q_x^\tau/N, \tau)$ は単射であり、 $H^1(K, \tau) \cong H^1(Q_x^\tau/N, \tau)$ 。) q.e.d.

注意 4 (c.f. [8], [14], [17], [18]) G の放物型部分群 P に対し、 $P \backslash G/\tau(P)$ は Bruhat 分解により有限であるから命題 2 により $P \backslash G/L$ も有限である。

σ を τ と可換な G の involution とし、 $H = G^\sigma$ とおくと、命題 2 により

$$\tilde{\psi} : H \backslash G/L \rightarrow H \backslash G/H$$

の各 fiber は有限である。 $H \backslash G/H$ の構造は [13] で調べられているので、原理的には $\tilde{\psi}$ の image とすべての fiber を決定すればよいのだが、この方法で第 2 節の例をやってみるとかえって問題を複雑にしているようにも見える。

References

- [1] M. Berger. Les espace symétriques non compacts. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 74:85–177, 1957.
- [2] M. Flensted-Jensen. Spherical functions on a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case. *J. Funct. Anal.*, 30:106–146, 1978.
- [3] B. Hoogenboom. *Intertwining functions on compact Lie groups*. PhD thesis, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983.
- [4] M. Iida. Orbital decomposition of an affine symmetric space (in Japanese). In 数理解析研究所講究録 826, pages 18–26, 1993.
- [5] B. Kostant and S. Rallis. Orbits and representations associated with symmetric spaces. *Amer. J. Math.*, 93:753–809, 1971.
- [6] H. Kraft and C. Procesi. Closures of conjugacy classes of matrices are normal. *Invent. Math.*, 53:227–247, 1979.
- [7] O. Loos. *Symmetric spaces, I*. Benjamin, 1969.
- [8] T. Matsuki. The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. *J. Math. Soc. Japan*, 31:331–357, 1979.
- [9] T. Matsuki. Double coset decompositions of algebraic groups arising from two involutions I. preprint.
- [10] T. Ohta. The singularities of the closures of nilpotent orbits in certain symmetric pairs. *Tôhoku Math. J.*, 38:441–468, 1986.
- [11] T. Ohta. Classification of admissible nilpotent orbits in the classical real Lie algebras. *Journal of algebra*, 136:290–333, 1991.
- [12] T. Ohta. On the closures of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities. preprint.
- [13] T. Oshima and T. Matsuki. Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups. *J. Math. Soc. Japan*, 32:399–414, 1980.
- [14] W. Rossmann. The structure of semisimple symmetric spaces. *Canad. J. Math.*, 31:157–180, 1979.

- [15] J. Sekiguchi. The nilpotent subvariety of the vector spaces associated to a symmetric pair. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 20:155–212, 1984.
- [16] J. Sekiguchi. Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. *J. Math. Soc. Japan*, 39:127–138, 1987.
- [17] T. A. Springer. Some results on algebraic groups with involutions. *Adv. Studies in Pure Math.*, 6:525–534, 1984.
- [18] J. A. Wolf. Finiteness of orbit structure for real flag manifolds. *Geometriae Dedicata*, 3:377–384, 1974.