数理解析研究所講究録
第 855 巻 1993 年 101-117

例外群 E_7 の作用する概均質ベクトル空間の特異不変超関数

室 政和 (岐阜大学)

要約: 例外群 $\mathbf{E}_7$ の作用する既約な概均質ベクトル空間を例にとって，その orbit の構造を明らかにし，また群の作用で不変な超関数のうちで特にその support が —デルタ関数のように — 部分多様体 (この場合には，orbit の合併になる) に含まれてしまうものを決定する.

目次

0. はじめに.

n 次元の実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に実数体上定義された代数群 G が代数的に作用している状況を考えよう. $\mathbb{R}^n$ 上の超関数 $f(x)$ が

$$f(g\cdot x)=f(x) \tag{0.1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 22E45 20G20 Secondary 11E39.
キーワード: prehomogeneous vector space, micro-local calculus.

を満たすときこれを G-不変な超関数という[1]. $\mathbb{R}^n$におけるG-軌道は, 代数的な集合であるから, 当然のことながら不変超関数の台は $\mathbb{R}^n$ の中の— 有限, あるいは無限個の — G-軌道の合併となり, これは $\mathbb{R}^n$ の中の閉集合をなす.

特に興味深いのは, 有理関数や解析関数とは違って, 超関数の場合にはその台 (support) が "余次元 1 以上の" 閉集合となる超関数が存在しうる, ということである. ここでは, このような超関数の事を**特異超関数 (singular hyperfunction)** とよぶ. 特異超関数の一番簡単な例として, 一変数の超関数で 1 点に台を持つ, いわゆるデルタ関数とその微分がある. 一変数の関数の場合には特異超関数はこのような関数で尽きてしまうが, 2 変数以上の関数となると余次元が 1 以上の部分多様体 (subvariety) そのものがバラエティに富んでいる. それでも, その台が non-singular な subvariety であるならばその形はそこに台を持つ測度を微分して得られるものとわかるが, 台が singularity を持つならば普通はどのようなものになるのか分からない. さらにそこに台を持つ超関数を決定 — さらには構成 — するのは容易なことではない. しかもまずいことに, 軌道の合併として得られる閉集合は, たいていが singularity を持っている.

しかし, 一方で "群の作用による不変性" ということに着目すると, 実際に存在する可能性のある超関数を holonomic system の解と捉えることができ, その数は限られたものであることがわかる. しかも, 適当な条件のもとに実際にこれを構成することができる場合がある. それは,

軌道の有限性: 群の作用によって有限個の軌道に分解すること.

相対不変多項式の存在: 余次元 1 以上の軌道の合併は $\mathbb{R}^n$ 上の多項式の零点となること.

のふたつの条件を満たしている場合で, このような場合には相対不変多項式の**複素べき**を考え[2], そこから派生する超関数によって, 特異な不変超関数を作る, という方法である.

実は, これらの条件は概均質ベクトル空間の条件を少し強くしたものであって, これらの条件にあてはまる概均質ベクトル空間は豊富に存在する. そして, いくつかの例で具体的に計算してみると, 群 G の作用で不変な特異超関数が相当数存在することがわかる. この論説では, 例外群 $\mathbf{E}_7$が作用している正則な既約概均質ベクトル空間を例にとって, この空間における特異超関数を含むすべての不変超関数を決定することを試みる. 例としてこの空間を取り上げた理由は, この空間が, 例外群 $\mathbf{E}_7$ を定義する多項式 (Freudenthal Polynomial) がそのまま概均質ベクトル空間の相対不変式になっている, 興味深いものでありながらあま

[1]実際には, $f(g\cdot x)=\chi(g)\cdot f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ をχ-相対不変といって, このような関数やこれから派生する関数も不変超関数として一括して論ずる.

[2]これは, 現在我々が多変数の超関数を構成するために知っているおそらく唯一の方法である!!

り研究されていないらしいこと，軌道の数があまり多くなく具体的に精密な計算にむいていそうなこと，これと同じ構造を持った概均質ベクトル空間があって，それらも — 少しづつ違ってはいるが — ほとんど同じ構造を持っていること，などの理由による．

1. 問題の設定 — 何を求めるのか？

まず，問題をもう少しきちんと設定しておこう．

$(\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}, \rho, \boldsymbol{V}_{\mathbb{C}})$ を $\mathbb{C}$ 上定義された概均質ベクトル空間，$(\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}, \rho, \boldsymbol{V}_{\mathbb{R}})$ をその一つの実形 (real form) とする．必要に応じて，条件をゆるめる事はできるが，ここでは次の条件を課しておく．

(1) irreducible かつ regular である． したがって，$(\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}, \rho, \boldsymbol{V}_{\mathbb{C}})$ は既約な多項式を相対不変式 $P(x)$ を持ち，singular set は，$\boldsymbol{S}_{\mathbb{C}} = \{x \in \boldsymbol{V}_{\mathbb{C}}; P(x) = 0\}$ で与えられる．このとき，適当な character χ が存在して，

$$P(\rho(g) \cdot x) = \chi(g) P(x) \tag{1.1}$$

と書ける．

この条件は必ずしも必要とは考えられないが，我々が調べようとする概均質ベクトル空間はたいていこの性質を満たしている．

定義 1.1. $\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}}$ 上の超関数 $f(x)$ に対して次のように用語を定める．

- **(relatively-invarinat な超関数)** 超関数 $f(x)$ がrelatively-invariant **(相対不変)** であるとは，群$\boldsymbol{G}$ のある character χ に対して，$f(g \cdot x) = \chi(g) f(x)$ が満たされることである．（χ-invaraiant ともいう．）
- **(quasi-invarinat な 超関数)** 超関数 $f(x)$ がquasi-(relatively-)invariant **(擬 (相対) 不変)** であるとは，群$\boldsymbol{G}$ のある character χ があって，超関数 $f(x)$ に対して $f(g \cdot x) - \chi(g) f(x)$ という操作を繰り返すといつかは 0 になるものをいう．(χ-quasi-invaraiant ともいう．) (0 に なるまで回数-1) を degree という．
- **(singular な超関数)** [3] 超関数 $f(x)$ の support が $\mathbb{R}^n$のある多項式 $P(x)$ の零点に含まれるとき，$f(x)$ をsingular **(特異)** な超関数であるという．特に，$f(x)$ の Fourier 変換像も singular な超関数となるとき，これを bi-singular**(双特異)** という．

これに加えて，$(\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}, \rho, \boldsymbol{V}_{\mathbb{R}})$ は，さらに次の条件を満たすものとする．

---

[3]singular でない超関数を，本文では便宜上 "non-singular" と呼ぶが，これは singularity を持たない超関数という意味ではないので注意して欲しい．(support が open set を含むということである．)

(2) singuler set $S_{\mathbb{C}}$ は$G_{\mathbb{C}}$の部分群$G_{\mathbb{C}}^1 := \{g \in G_{\mathbb{C}}; P(\rho(g)x) = P(x)\}$ によって有限個の軌道に分かれる.

(3) relatively invariant な超関数はすべて $|P(x)|_L^s$ の linear combination で書ける.

これらの条件のうち，最初の条件は，概均質ベクトル空間の中でも性質のよいものという理由であげたもので，自然なものといってよいであろう．確かめることも簡単である．一方で，２番目と３番目の条件は条件としてはきつすぎる，と感じるかも知れないが，重要と思われる例ではたいていこれが満たされている.

問題 1. ここでは次の問題を考える.

(1) $(G_{\mathbb{R}}, \rho, V_{\mathbb{R}})$ のすべての相対不変超関数を決定/構成せよ.

(2) そのうちで，特異な超関数はどのようなものがあるか.

2. その解き方 — どのようにして問題を解くか？

$(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ を前節の条件を満たす概均質ベクトル空間とする．この群$G_{\mathbb{C}}$の Lie 環を $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ と書き．表現 ρ の infinitesimal な表現を $d\chi$，既約な相対不変式 $P(x)$ の character χ の infinitesimal な character を$\delta\chi$とする.

このとき，$V_{\mathbb{C}}$上の character χ^s $(s \in \mathbb{C})$ に対応する相対不変な関数 $u(x)$ の満たす微分方程式は次の式で与えられる.

$$\text{(2.1)} \qquad \mathfrak{M}_s :< d\rho(A), \frac{\partial}{\partial x} > -s\delta\chi(A))u(x) = 0, \quad \text{for all } A \in \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$$

この微分方程式は regular holonomic system になり，したがってその characteristic variety $ch(\mathfrak{M}_s)$ は Lagrangian subvariety になる.

$$\text{(2.2)} \qquad ch(\mathfrak{M}_s) = \bigcup_{i \in I} \Lambda_{i\mathbb{C}}$$

をその既約成分分解としよう．ここで $\Lambda_{i\mathbb{C}}$ は既約な complex Lagrangian subvariety にあらわす.

この holonomic system の解となる 超関数 $u(x)$ をその cotangent bundle $T^*V_{\mathbb{R}}$ 上の microfunction と考えたとき，その support は $\bigcup_{i\in I} \Lambda_{i\mathbb{C}}$ の real locus $\bigcup_{i\in I} \Lambda_{i\mathbb{R}}$ に含まれる．この各既約成分 $\Lambda_{i\mathbb{R}}$ における $u(x)$ の値を決定してやることによって，$\mathfrak{M}_s$ の超関数解を一つ定めることができる．この超関数解の support は，ちょうど $T^*V_{\mathbb{R}}$ における $u(x)$ の support を $V_{\mathbb{R}}$ に射影したものになり，したがって，ある $V_{\mathbb{R}}$ の閉集合に support を持つような超関数を定めるためには，それに対応する $T^*V_{\mathbb{R}}$ の閉集合に support を持つような microfunction 解を定めればよい.

具体的には，microfunction $u(x)$ の代わりにその principal symbol $\sigma_\Lambda(u(x))$ を，各 real Lagrangian subvariety 毎に決定してやればよい．

この事をもう少し詳しく述べよう．

$$ch(\mathfrak{M}_s) = \bigcup_{i \in I} \Lambda_{i\mathbb{C}} \tag{2.3}$$

にあらわれる既約な complex Lagrangian subvariety $\Lambda_{i\mathbb{C}}$ からその singular points および他の 既約な Lagrangian subvariety と交わっている点を除いた集合を$\Lambda_{i\mathbb{C}}^\circ$ と書く．これは connected かつ non-singular な Lagrangian subvariety であるが，この real locus $\Lambda_{i\mathbb{R}}^\circ := \Lambda_{i\mathbb{C}}^\circ \cap T^*\boldsymbol{V}_\mathbb{R}$ は幾つかの connected components に分かれる．この分解を

$$\Lambda_{i\mathbb{R}}^\circ = \bigsqcup_{j \in J_i} \Lambda_{ij\mathbb{R}} \tag{2.4}$$

と書く．

この超関数解 fに対して，$\Lambda_{ij\mathbb{R}}$ 上の sheaf

$$\sqrt{|\Omega_{\Lambda_{ij\mathbb{R}}}|} \otimes \sqrt{|\Omega_{V_\mathbb{R}}|} \tag{2.5}$$

の real analytic な section $\sigma_{\Lambda_{ij\mathbb{R}}}(f)$ が与えられて，これが，超関数解 fと 1 対 1 に対応する．(ここで，$|\Omega_{\Lambda_{ij\mathbb{R}}}|$ と $|\Omega_{V_\mathbb{R}}|$ はそれぞれ $\Lambda_{ij\mathbb{R}}$ と $\boldsymbol{V}_\mathbb{R}$ 上の volume forms である．) この section $\sigma_{\Lambda_{ij\mathbb{R}}}(f)$ を f の **principal symbol** と呼ぶ．また逆に，すべての real Lagarangian $\Lambda_{ij\mathbb{R}}$上でで prinacipal symbol を定めればそれに対応する超関数解はただ一つに定まる．

しかし，もちろん勝手な principal symbol を各 Lagrangian subvariety 上に与えたとしても，それに対応する microfunction 解 がうまく $T^*\boldsymbol{V}_\mathbb{R}$ 全体にまで延長できるかどうかは分からないし，無理に全体に延長しても— microfunction の sheaf は flabby だから延長するだけのことならできる — それが $\mathfrak{M}_s$ の解としての超関数になっているのかどうかも分からない．ちゃんと超関数解になるためには，その principal symbol が満たすべき条件がある．holonomic system $\mathfrak{M}_s$ の超関数解の principal symbol が満たすべき条件は，$\mathfrak{M}_s$ の micro-local な構造によって決まる．一方で，その条件を満たす超関数解が実際に存在するか，という問題が生じるが，これは実際に解を構成する事でこれを保証する．

解の構成には，相対不変式の複素べきを利用する．相対不変式 $P(x)$ の複素べきはやはり相対不変な超関数になり，複素べきのパラメータ $s \in \mathbb{C}$ に対して χ^s-不変な超関数になる．すなわち，

$$\boldsymbol{V}_\mathbb{R} - \boldsymbol{S}_\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{l} \boldsymbol{V}_{j\mathbb{R}} \tag{2.6}$$

を $V_{\mathbb{R}}$ からその singular set $S_{\mathbb{R}}$ を除いた集合の connected component 分解とする.

$$|P(x)|^s_{V_{i\mathbb{R}}} := \begin{cases} |P(x)|^s & ,x \in V_{i\mathbb{R}} \text{ の時}, \\ 0 & ,x \notin V_{i\mathbb{R}} \text{ の時}, \end{cases} \tag{2.7}$$

と定義する. この関数は $S_{\mathbb{R}}$ の点を除いて $V_{\mathbb{R}}$ 上の連続関数になる. さらにここで, $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ をテスト関数とする積分,

$$(|P(x)|^s_{V_{i\mathbb{R}}}, \phi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} |P(x)|^s_{V_{i\mathbb{R}}} \phi(x) dx \tag{2.8}$$

を考えると, 自然に $|P(x)|^s_{V_{i\mathbb{R}}}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の超関数とみなすことができる[4]. この超関数は次の性質を持つ.

- これは, $\Re(s) > -1$ で絶対収束し, そこでは s について holomorphic なパラメータを持つ超関数である. さらにこれは s を meromorphic なパラメータに持つ $\mathbb{R}^n$ 上の超関数として, 全平面 $s \in \mathbb{C}$ に解析接続できる.
- この超関数の s に関する pole は s が-1 以下の有理数の点にあらわれ, その点は $P(x)^s$ の B-関数の根によって決まる.
- $|P(x)|^s_L$ の pole を Laurent 展開したとき, その主要部の係数にあらわれる超関数は, support が $S_{\mathbb{R}}$ に含まれる.

このようにして定義された超関数 $|P(x)|^s_{V_{i\mathbb{R}}}$ が

$$|P(g \cdot x)|^s_{V_{i\mathbb{R}}} = |\chi(g)| \cdot |P(g \cdot x)|^s_{V_{i\mathbb{R}}} \tag{2.9}$$

を満たすことは, (2.9) よりすぐわかる.

したがって, このようにして定義された超関数 (2.7) は holonomic system (2.1) の解になっている. これらの超関数 (の線形結合) によって書ける超関数の各 Lagrangian における principal symbol が, 求めるべき超関数の principal symbol と一致すれば, その様な principal symbol を持つ超関数解の存在が保証される.

相対不変な超関数に限っていうならば, このような方法で基本的には相対不変な超関数をすべて決定する事ができる. このうち, support が $S_{\mathbb{R}}$ に含まれてしまうものを特定しようとすれば, open orbit に対応する Lagrangian 上の principal symbol が零になるような超関数を決定すればよい.

quasi-relatively-invariant な超関数も基本的には同様の方法で決定できる. すなわち, これが満たす holonomic system とその超関数解の principal symbol が満たす関係式を求め, この条件にあう (可能な) 超関数解を決定するのである. この場合もその条件にあう超関数の存在は, 別途構成する事によって示す必要がある.

---

[4]いわゆる Local zeta function である.

3. 取り扱う概均質ベクトル空間とその ORBIT 分解

さて，我々がここで取り扱う概均質ベクトル空間は，例外型の Lie 群 $\mathbf{E}_7$ の最低次元表現である．この表現についてまず簡単に述べておく．

すこし唐突かも知れないが，6 次の symplectic 群 $\mathbf{Sp}_{6\mathbb{C}}$ の表現の話しからはじめよう．これが例外群 $\mathbf{E}_{7\mathbb{C}}$ の表現と緊密な関係にあるからである．$\mathbb{C}^6$ を 6 次元の複素数体上のベクトル空間，$< u_1, u_2, ..., u_6 >$ をこのベクトル空間の基底とする．この基底から，$\mathbf{GL}(\mathbb{C}^6)$ の中の symplectic 群を

$$\mathbf{Sp}_{6\mathbb{C}} := \{g \in \mathbf{GL}_{6\mathbb{C}}; g \cdot J = J\}$$

を満たす部分群として定義する．ただし，ここで

$$J := u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6$$

である．この群 $\mathbf{Sp}_{6\mathbb{C}}$の 3 次の交代テンソル空間 $\wedge^3\mathbb{C}^6$ への作用を考える．この空間は 20 次元であるので，これを$\boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{C}}$ と書く．この空間は，$\mathbf{Sp}_{6\mathbb{C}}$の作用によって，14 次元と 6 次元の 2 個の既約成分に分解する．

$$\wedge^3\mathbb{C}^6 = \{x = \sum_{(i,j,k)} x_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k; \quad x_{ijk} \in \mathbb{C}\}$$

と書くとき，14 次元の既約成分の部分空間 $\boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}}$ は，

(3.1) $$x_{125} = x_{163}, x_{124} = x_{623}, x_{143} = x_{523}, x_{416} = x_{256}, x_{451} = x_{356}, x_{452} = x_{436}$$

を満たす $\boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{C}}$ の部分空間である．このとき，この空間に

$$g = (g_1, g_2) \in \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} = \mathbf{Sp}_{6\mathbb{C}} \times \mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$$

が

$$\rho(g); x \mapsto g_2 \cdot (g_1 \cdot x)$$

によって $\boldsymbol{V}_{\mathbb{C}}$に作用し，$(\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}, \rho, \boldsymbol{V}_{\mathbb{C}})$ は regular な概均質ベクトル空間になる．ここで我々は，相対不変式を書きやすくするために$\boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}}$を次のように書き表す．

(3.2) $$\boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}} = \{(x_0, y_0, X, Y);\ x_0 = x_{123}, y_0 = x_{456},\ X, Y \in M_3(\mathbb{C})\}.$$

ただし，ここで

$$X = \begin{pmatrix} x_{423} & x_{143} & x_{124} \\ x_{523} & x_{153} & x_{125} \\ x_{623} & x_{163} & x_{126} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{156} & y_{416} & y_{451} \\ y_{256} & y_{426} & y_{452} \\ y_{356} & y_{436} & y_{453} \end{pmatrix}$$

である．実際には，(3.1) の条件により，X, Yは対称行列になる．

この概均質ベクトル空間の相対不変式は，

$$(3.3)\quad P(x)=(x_0y_0-\mathrm{tr}(XY))^2+4x_0\det(Y)+4y_0\det(X)-4\sum_{ij}\det(X_{ij})\det(Y_{ji})$$

によって与えられる．ここで，X_{ij} は行列 X より第 i 行と第 j列を除いてできる 2×2 行列の行列式を表している．

さて，このベクトル空間は

$$(3.4)\qquad \boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus Sym_3(\mathbb{C})\oplus Sym_3(\mathbb{C})$$

(ここで，$Sym_3(\mathbb{C})$ は 3×3 の複素対称行列の空間) の形をしているが，同じ形態のベクトル空間として，

$$(3.5)\qquad \boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus Her_3(\mathbb{C}_{\mathbb{C}})\oplus Her_3(\mathbb{C}_{\mathbb{C}})$$

$$(3.6)\qquad \boldsymbol{V}(32)_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus Her_3(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})\oplus Her_3(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})$$

$$(3.7)\qquad \boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus Her_3(\mathfrak{C}_{\mathbb{C}})\oplus Her_3(\mathfrak{C}_{\mathbb{C}})$$

を考える事ができる．ここで，$Her_3(-)$ は括弧 $(-)$ の中の係数を持つ 3×3 エルミート行列の空間で，$\mathbb{C}_{\mathbb{C}},\mathbb{H}_{\mathbb{C}},\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ はそれぞれ，複素係数の二元数環，複素係数の四元数環と Cayley 数環 (八元数環) をあらわす．[5] これらのエルミート行列に対しても，それぞれの方法で行列式，トレース，余因子などが定義される[6]ので，相対不変式となる多項式 (3.3) はそのままの形で，それぞれ (3.5)，(3.6)，(3.7) のベクトル空間上の多項式になる．

多項式 $P(x)$ を不変にする元より成る $\mathbf{GL}(\boldsymbol{V}_{\mathbb{C}})$ の部分群を$\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{C}}$ とすると，$\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}=\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$ の作用によって$\boldsymbol{V}_{\mathbb{C}}$ は概均質ベクトル空間となる．$\boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{C}}$，$\boldsymbol{V}(32)_{\mathbb{C}}$，$\boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{C}}$ に作用する$\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{C}}$はそれぞれ６次の特殊線形群 $\mathbf{SL}_{6\mathbb{C}}$，１２次のスピン群 $Spin_{12\mathbb{C}}$，E_7型の例外群 $\mathbf{E}_{7\mathbb{C}}$ である．(この場合，$\mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$ はもちろんスカラー倍の作用である．) これらは，$P(x)$ を相対不変式とする既約な概均質ベクトル空間である．

これらの概均質ベクトル空間のうち，特に

$$(3.8)\qquad \begin{aligned}\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}&=\mathbf{E}_{7\mathbb{C}}\times\mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}\\ \boldsymbol{V}_{\mathbb{C}}&=\boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

が，我々が考察する概均質ベクトル空間である．

---

[5]実際には $Her_3(\mathbb{C}_{\mathbb{C}})\simeq M_6(\mathbb{C})$, $Her_3(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})\simeq Alt_{12}(\mathbb{C})$ となる多元環の同型写像が存在するので通常は後者を使う．ここで $Alt_{12}(-)$ は 12×12 の括弧 $(-)$ の中の係数をもつ交代行列の空間を表す．

[6]例えば，[Mur89] などを参照．

しかし，実際にはこれらの概均質ベクトル空間はほとんど同じ構造をしている．

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathfrak{C}_{\mathbb{C}} \tag{3.9}$$

となる自然な，多元環としての，埋め込みによって

$$Sym_3(\mathbb{C}) \hookrightarrow Her_3(\mathbb{C}_{\mathbb{C}}) \hookrightarrow Her_3(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}) \hookrightarrow Her_3(\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}) \tag{3.10}$$

も存在する．これらの埋め込みから，自然に

$$\boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \boldsymbol{V}(32)_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{C}} \tag{3.11}$$

が得られる．$\boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{C}}$上の相対不変式 $P(x)$ をこれに埋め込まれる部分ベクトル空間$\boldsymbol{V}(32)_{\mathbb{C}}$，$\boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{C}}$，$\boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}}$ に制限したものがそれぞれのベクトル空間上の相対不変式であり，これらを不変にする $\mathbf{GL}(\boldsymbol{V}_{\mathbb{C}})$ の部分群 $\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{C}}$ も同じ様に順に埋め込まれる関係にある．

このようにして定義された概均質ベクトル空間 $(\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}, \rho, \boldsymbol{V}_{\mathbb{C}})$ は orbit 分解においても同じ構造をしている．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 3.1. (1) $\boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}}$ は$\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} = \mathbf{Sp}_{6\mathbb{C}} \times \mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$ の作用によって 5 個の orbits に分解する．

$$\boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{O}_{\mathbb{C}} \cup \boldsymbol{S}_{1\mathbb{C}} \cup \boldsymbol{S}_{2\mathbb{C}} \cup \boldsymbol{S}_{3\mathbb{C}} \cup \boldsymbol{S}_{4\mathbb{C}}$$

そして，それらは次の点によって生成される．すなわち，各 orbit の生成点 $(x_0, y_0, X, Y) \in \boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{C}}$ は次で与えられる．

$$\boldsymbol{O}_{\mathbb{C}} : (1, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$$\boldsymbol{S}_{1\mathbb{C}} : (1, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$\boldsymbol{S}_{2\mathbb{C}} : (0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$\boldsymbol{S}_{3\mathbb{C}} : (1, 0, (0), (0))$$

$$\boldsymbol{S}_{4\mathbb{C}} : (0, 0, (0), (0))$$

(2) 同じく，$\boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{C}}$，$\boldsymbol{V}(32)_{\mathbb{C}}$，$\boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{C}}$ も (3.11) による埋め込み写像によって，同じ点から生成される．ここで，各 orbit の余次元は次の表 1 で与えられる．

orbit	$\mathbf{Sp}_{6\mathbb{C}}$	$\mathbf{SL}_{6\mathbb{C}}$	$Spin_{12\mathbb{C}}$	$\mathbf{E}_{7\mathbb{C}}$
$\boldsymbol{O}_{\mathbb{C}}$	0	0	0	0
$\boldsymbol{S}_{1\mathbb{C}}$	1	1	1	1
$\boldsymbol{S}_{2\mathbb{C}}$	4	5	7	11
$\boldsymbol{S}_{3\mathbb{C}}$	7	10	16	28
$\boldsymbol{S}_{4\mathbb{C}}$	14	20	32	56

表 1. orbit の次元

次に，これらの概均質ベクトル空間の real form (実形) を考えよう．real form は必ずしも一つとは限らない[7]．我々は，ここでは (3.4)，(3.5)，(3.6)，(3.7) の係数 $\mathbb{C}$ が そのまま $\mathbb{R}$ になるような real form を取り上げる．すなわち，

$$\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}} = \boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus Sym_3(\mathbb{R}) \oplus Sym_3(\mathbb{R}) \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}} = \boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus Her_3(\mathbb{C}) \oplus Her_3(\mathbb{C}) \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}} = \boldsymbol{V}(32)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus Her_3(\mathbb{H}^d_{\mathbb{R}}) \oplus Her_3(\mathbb{H}^d_{\mathbb{R}}) \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}} = \boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus Her_3(\mathfrak{C}^d_{\mathbb{R}}) \oplus Her_3(\mathfrak{C}^d_{\mathbb{R}}) \tag{3.15}$$

となる場合である．ここで，$\mathbb{H}^d_{\mathbb{R}}$ や $\mathfrak{C}^d_{\mathbb{R}}$ は，それぞれ，実数体 $\mathbb{R}$ 上の Hamilton の四元数体，実数体 $\mathbb{R}$ 上の Cayley 数体 (一つしかない) を表している．(3.3) の多項式 $P(x)$ はそのまま，この空間$\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}}$上の実係数の多項式となり，この多項式を不変にするような $\mathbf{GL}(\boldsymbol{V}_{\mathbb{R}})$ の部分群が$\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{C}}$ の real form になる．これを$\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{R}}$ と書く．実際には，$\boldsymbol{V}(14)_{\mathbb{R}}$ に作用する $\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{R}}$は $\mathbf{Sp}_{6\mathbb{R}}$，$\boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{R}}$ に作用する $\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{R}}$は $\mathbf{SU}(3,3)_{\mathbb{R}}$，$\boldsymbol{V}(32)_{\mathbb{R}}$ に作用する $\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{R}}$は $Spin_{6\mathbb{H}^d_{\mathbb{R}}}$，$\boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{R}}$ に作用する $\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{R}}$は $\mathbf{E}^{(-25)}_{7\mathbb{R}}$，となる[8]．$\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$の real form $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ は$\boldsymbol{G}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbf{GL}_{1\mathbb{R}}$ となる．このようにして得られた real form に対しても，同じ様に次の自然な多元環の埋め込みがある．

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}^d_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathfrak{C}^d_{\mathbb{R}} \tag{3.16}$$

となる自然な 多元環 の埋め込みによって

$$Sym_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow Her_3(\mathbb{C}) \hookrightarrow Her_3(\mathbb{H}^d_{\mathbb{R}}) \hookrightarrow Her_3(\mathfrak{C}^d_{\mathbb{R}}) \tag{3.17}$$

---

[7]ちなみに，$\mathbf{Sp}_{6\mathbb{C}} \times \mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$ の場合は 1 個，$\mathbf{SL}_{6\mathbb{C}} \times \mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$ の場合は 3 個，$Spin_{12\mathbb{C}} \times \mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$ の場合は 3 個，$\mathbf{E}_{7\mathbb{C}} \times \mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$ の場合は 2 個，の real forms が存在する．

[8]ここで，$\mathbf{SU}(3,3)_{\mathbb{R}}$は signature が (3,3) の特殊ユニタリ群，$Spin_{6\mathbb{H}^d_{\mathbb{R}}}$は $\mathbb{H}^d_{\mathbb{R}}$上の 6 次のスピノル群，$\mathbf{E}^{(-25)}_{7\mathbb{R}}$は killing form の signature が-25 の $\mathbf{E}_{7\mathbb{C}}$の real form である．

も存在する．これらの埋め込みから，自然に

$$V(14)_{\mathbb{R}} \hookrightarrow V(20)_{\mathbb{R}} \hookrightarrow V(32)_{\mathbb{R}} \hookrightarrow V(56)_{\mathbb{R}} \tag{3.18}$$

が得られる．

これによって，complex の場合と同じ様に，$G^+_{\mathbb{R}}$ による orbit 分解の生成点は $V(14)_{\mathbb{R}}$ に取れる．これらの real forms の orbits の生成点は次で与えられる．

定理 3.2. (1) $V(14)_{\mathbb{R}}$ は $G_{\mathbb{R}}$ によって次のように orbit 分解する[9]．

$O_{\mathbb{R}} = [A] \cup [B] \cup [C]$	3 軌道に分解
$S_{1\mathbb{R}} = [D] \cup [F]$	2 軌道に分解
$S_{2\mathbb{R}} = [I] \cup [J]$	2 軌道に分解
$S_{3\mathbb{R}}$	1 軌道
$S_{4\mathbb{R}}$	原点だけ.

ここで，$O_{\mathbb{R}}$，$S_{i\mathbb{R}}(i=1,2,3,4)$ などは，それぞれ $O_{\mathbb{C}} \cap V(14)_{\mathbb{R}}$，$S_{i\mathbb{C}} \cap V(14)_{\mathbb{R}}$ $(i=1,2,3,4)$ を表す．

(2) その各軌道の生成点 $(x_0, y_0, X, Y) \in V_{\mathbb{R}}$ は次で与えられる．

- $O_{\mathbb{R}}$ に含まれる orbits.

$$[A]:(1,0,\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix})$$

$$[B]:(1,0,\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix})$$

$$[C]:(-1,0,\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix})$$

[9] ここで，各 orbit を $[A]$,$[B]$ のようにアルファベットを使って書いたのは，(ここでは表に出さなかったが) 対応する Lagrangian subvariety を同じアルファベットで書いたためである．

- $S_{1\mathbb{R}}$ に含まれる orbits.

$$[D] : (1, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$[F] : (-1, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

- $S_{2\mathbb{R}}$ に含まれる orbits.

$$[I] : (0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$[J] : (0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

- そのほかの orbits.

$$S_{3\mathbb{R}} : (1, 0, (0), (0))$$
$$S_{4\mathbb{R}} : (0, 0, (0), (0))$$

(3) $\boldsymbol{V}(20)_{\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{V}(32)_{\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{R}}$ における生成点は，(3.18) による埋め込み写像によって 2. と同じ点で与えられる.

(4) 各 orbits の closure の間には次の包含関係が成り立つ.

- $\overline{[A]} \supset [D]$
  $\overline{[B]} \supset [D], [F]$
  $\overline{[C]} \supset [F]$
- $\overline{[D]} \supset [I], [J]$
  $\overline{[F]} \supset [I], [J]$
- $\overline{[I]} \supset S_{3\mathbb{R}}$
  $\overline{[J]} \supset S_{3\mathbb{R}}$
- $\overline{S_{3\mathbb{R}}} \supset S_{4\mathbb{R}}$

したがって，特に $\boldsymbol{V}(56)_{\mathbb{R}}$の orbit 分解もこれよりわかる.

4. 特異不変超関数

さて，このようにして計算した結果を次に述べる．$V(14)_{\mathbb{R}}$，$V(20)_{\mathbb{R}}$，$V(32)_{\mathbb{R}}$ においても同様の結果を出すことができるが，ここでは，$V(56)_{\mathbb{R}}$ についての結果だけを述べる．

$V(56)_{\mathbb{R}}$ においては，特異不変 (singular invariant) な超関数はχ^s-invariant あるいは，χ^s-quasi-invariant になり，特に，s の値が $s=-1,-2,\ldots$ と $s=-11/2,-13/2,\ldots$ の時にあらわれる事がわかる．我々は，$Inv(s)$ は χ^s-invariant な超関数の空間を，$Inv^{(k)}(s)$ は degree k の χ^s-quasi-invariant な超関数の空間をあらわす．このとき，singular (さらには bi-singular) な超関数があらわれうるのは，次にあげる空間である．これらは,「同型[10]」によって 4 つの場合に分類される．

Case 1: $Inv(-1) \simeq Inv(-2) \simeq \cdots \simeq Inv(-13)$
Case 2: $Inv(-14) \simeq Inv(-15) \simeq \cdots$
Case 3: $Inv(-\frac{11}{2}) \simeq Inv(-\frac{13}{2}) \simeq \cdots \simeq Inv(-\frac{17}{2})$
Case 4: $Inv(-\frac{19}{2}) \simeq Inv(-\frac{21}{2}) \simeq \cdots$
$Inv^{(1)}(-\frac{19}{2}) \simeq Inv^{(1)}(-\frac{21}{2}) \simeq \cdots$

このベクトル空間の同型にしたがって，singular な超関数を含みうる quasi-relatively-invariant な超関数の各ベクトル空間の次元を表にしたものが，次の 表 2 である．

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
bi-singular な超関数の次元	2	0	1	0(0)
singular な超関数の次元	2	3	2	2(3)
(quasi)-relatively-invariant な超関数の次元	3	3	3	3(6)

括弧 (·) の中の数字は quasi-invariant なものを含めた不変超関数の次元

表 2. 不変な超関数の空間の次元 ($\mathbf{E}_7 \times \mathbf{GL}_{1\mathbb{C}}$, 56-dim. rep $\otimes\square$)

これらのベクトル空間の基底は，$|P(x)|_L^s$，$(L=A,B,C)$ を s について Laurent 展開した時に，その係数としてあらわれる超関数を利用して与えることができる．以下，それを順に書き下す．

[10] この同型は，後述のように不変微分作用素で与えられ，support を保存する．

- $Inv(-1)$ の基底.$s=-1$ において,

$$|P(x)|_L^s = \sum_{n=-1}^{\infty} (s+1)^n P_n(L,-1), \qquad (L=A,B,C)$$

と Laurent 展開される.

(1) $P_{-1}(A,-1)$ と $P_{-1}(C,-1)$ は, singular かつ bi-singular になる. さらに,

$$P_{-1}(B,-1) = P_{-1}(A,-1) + P_{-1}(C,-1)$$

であるので, $Inv(-1)$ の中で, singular なものは2次元しかない.

(2) さらに,

$$P_0(B,-1) - (P_0(A,-1) + P_0(C,-1))$$

は non-singular な不変超関数になる. (1) における singular な超関数の基底とあわせて $Inv(-1)$ の基底をなす.

- $Inv(-2) \simeq Inv(-3) \simeq \cdots$ の基底.

微分作用素 $P(\frac{\partial}{\partial x})$ を使って,

$$P(\frac{\partial}{\partial x}) Inv(-k) = Inv(-k-1)$$

$(k=1,2,\cdots,12)$ の同型対応があり, この同型は support を保存するので, これによって $Inv(-1)$ の基底に微分作用素 $P(\frac{\partial}{\partial x})$ を複数回作用させる事によって得られる.

- $Inv(-\frac{11}{2})$ の基底.

$$|P(x)|_L^s = \sum_{n=-1}^{\infty} (s+\frac{11}{2})^n P_n(L,-\frac{11}{2}), \qquad (L=A,B,C)$$

と Laurent 展開される. ただしここで, $P_{-1}(B,-\frac{11}{2})=0$ である.

(1)

$$P_{-1}(A,-\frac{11}{2}) - 3P_{-1}(C,-\frac{11}{2})$$

は $Inv(-\frac{11}{2})$ の中の bi-singular な超関数である. bi-singular な超関数はこれ1次元だけ.

(2) $P_{-1}(A,-\frac{11}{2}),P_{-1}(C,-\frac{11}{2})$ は $Inv(-\frac{11}{2})$ の中の singular な超関数の空間の基底になる.

(3) $P_{-1}(A,-\frac{11}{2}),P_{-1}(C,-\frac{11}{2})$ に加えて, $P_0(B,-\frac{11}{2})$ は non-singular な超関数になる. (2) で与えられた基底にこれを加えると $Inv(-\frac{11}{2})$ の基底になる.

- <u>$Inv(-\frac{13}{2}) \simeq Inv(-\frac{15}{2}) \simeq \cdots$ の基底.</u>

$$P(\frac{\partial}{\partial x})Inv(-\frac{11}{2}-k) = Inv(-\frac{11}{2}-k-1)$$

$(k=0,1,2)$ によって与えられる.

- <u>$Inv(-\frac{19}{2})$ の基底.</u>

$$|P(x)|_L^s = \sum_{n=-2}^{\infty}(s+\frac{19}{2})^n P_n(L,-\frac{19}{2}), \qquad (L=A,B,C)$$

と Laurent 展開される. ここで, $P_{-2}(B,-\frac{19}{2})=0$ である.

(1) $Inv(-\frac{19}{2})$ の中には bi-singular な超関数は存在しない.

(2) $Inv(-\frac{19}{2})$ の中に singular な超関数は 2 次元分存在して, その基底は, $P_{-2}(A,-\frac{19}{2}) = 3P_{-2}(C,-\frac{19}{2}) = \frac{3}{2\pi}P_{-1}(B,-\frac{19}{2})$ と $P_{-1}(A,-\frac{19}{2}) - 3P_{-1}(C,-\frac{19}{2})$ によって与えられる.

(3) $Inv(-\frac{19}{2})$ の中の non-singular な超関数は 1 次元分存在して, その基底は $P_0(B,-\frac{19}{2}) - 2\pi P_{-1}(C,-\frac{19}{2})$ で与えられる. (2) の基底とこの超関数によって, $Inv(-\frac{19}{2})$ の基底が与えられる.

- <u>$Inv(-\frac{21}{2}) \simeq Inv(-\frac{23}{2}) \simeq \cdots$ の基底.</u>

$$P(\frac{\partial}{\partial x})Inv(-\frac{19}{2}-k) = Inv(-\frac{19}{2}-k-1)$$

$(k=0,1,2,\cdots)$ によって与えられる.

- <u>$Inv^{(1)}(-\frac{19}{2})$ の基底.</u>

quasi-invariant なものは,

(1) $Inv(-\frac{19}{2})$ の基底に加えて

$$P_{-1}(A,-\frac{19}{2}) \text{ (あるいは } -3P_{-1}(C,-\frac{19}{2}))$$

を $Inv^{(1)}(-\frac{19}{2})$ の中の singular な超関数の空間の基底として付加すればよい.

(2) $Inv(-\frac{19}{2})$ の基底と (1) に加えて $P_0(A,-\frac{19}{2}) - 3P_0(C,-\frac{19}{2})$ と $P_1(B,-\frac{19}{2}) - 2\pi P_0(C,-\frac{19}{2})$ が non-singular な超関数を含めた $Inv^{(1)}(-\frac{19}{2})$ の基底にあらわれる.

- <u>$Inv^{(1)}(-\frac{21}{2}) \simeq Inv^{(1)}(-\frac{23}{2}) \simeq \cdots$ の基底.</u>

$$P(\frac{\partial}{\partial x})Inv^{(1)}(-\frac{19}{2}-k) = Inv^{(1)}(-\frac{19}{2}-k-1)$$

$(k=0,1,2,\cdots)$ によって与えられる.

- $Inv(-14)$ の基底.

$$|P(x)|_L^s = \sum_{n=-1}^{\infty}(s+14)^n P_n(L,-14), \qquad (L=A,B,C)$$

と Laurent 展開される.

(1) $Inv(-14)$ の中に bi-singular なものは存在しない.

(2) $P_{-1}(A,-14)$, $P_{-1}(B,-14)$, $P_{-1}(C,-14)$, は $Inv(-14)$ の基底になる. これらはすべて singular な超関数である.

(3) quasi-relatively-invariant な超関数で singular になるものはこのほかには存在しない.

- $Inv(-15) \simeq Inv(-16) \simeq \cdots$ の基底.

$$P(\frac{\partial}{\partial x})Inv(-k) = Inv(-k-1)$$

$(k=15,16,17\cdots)$ によって与えられる.

最後に, これらの基底としてあらわれた特異な超関数の実際の support を参考までに与えておこう.

- $Inv(-1)$

$$supp(P_{-1}(A,-1)) = \overline{[D]}$$
$$supp(P_{-1}(C,-1)) = \overline{[F]}$$

- $Inv(-\frac{11}{2})$

$$supp(P_{-1}(A,-\frac{11}{2})) = \overline{[I]\cup[J]}$$
$$supp(P_{-1}(C,-\frac{11}{2})) = \overline{[I]}$$
$$supp(P_{-1}(A,-\frac{11}{2}) - P_{-1}(C,-\frac{11}{2})) = \overline{[J]}$$

- $Inv^{(1)}(-\frac{19}{2})$

$$supp(P_{-2}(A,-\frac{19}{2})) = \overline{S_{3\mathbb{R}}}$$
$$supp(P_{-1}(A,-\frac{19}{2}) - 3P_{-1}(C,-\frac{19}{2})) = \overline{[I]\cup[J]}$$
$$supp(P_{-1}(A,-\frac{19}{2})) = \overline{[I]\cup[J]}$$

- $\underline{Inv(-14)}$

$$supp(P_{-1}(A,-14)) = \overline{[D]}$$
$$supp(P_{-1}(B,-14)) = \overline{[D]\cup[F]}$$
$$supp(P_{-1}(C,-14)) = \overline{[F]}$$

ただし，

$$supp(P_{-1}(A,-14)+P_{-1}(B,-14)+P_{-1}(C,-14)) = S_{4\mathbb{R}} = \text{原点}$$

参考文献

[Bai73] W. L. Jr. Baily, *Introductory lectures on automorphic forms*, Publication of the mathematical society of Japan, vol. 12, Iwanami Shoten Publishers and Princeton UP, Tokyo, 1973.

[Gyo91] A. Gyoja, *Theory of Prehomogeneous Vector Vector Spaces without Regular Condition*, Publ. Res. Inst. Math. Sci.,Kyoto Univ. **27** (1991), no. 6, 861–922.

[Jac71] N. Jacobson, *Exceptional Lie Algebras*, Marcel Dekker Lecture Note in Math., vol. 1, Marcel Dekker, 1971.

[Kas77] M. Kashiwara, *Microlocal calculus of simple microfunctions*, Analysis and Algebraic Geometry, Papers in honor of Professor K.Kodaira (W. L. Jr Baily and T. Shiota, eds.), Iwanami Shoten Publishers, 1977, pp. 369–374.

[KM74] M. Kashiwara and T. Miwa, *Microlocal calculus of and Fourier transforms of relative invariants of prehomogeneous vector spaces*, Suurikaiseki Kenkyuusho Koukyuuroku **283** (1974), 60–147.

[KS90] M. Kashiwara and P. Shapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, 1990.

[Mur80] M. Muro, *Some prehomogeneous vector spaces with relative invariants of degree four and the formula of the Fourier transforms*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **56** (1980), no. 2, 70 – 74.

[Mur87] M. Muro, *The dimension of the space of relatively invariant hyperfunctions on regular prehomogeneous vector spaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **63** (1987), no. 3, 66–68.

[Mur89] M. Muro, *On zeta functions associated with the exceptional Lie group of type* $\mathbf{E}_6$, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties (Adv. Stud. Pure Math., 15) (Boston) (K-i. Hashimoto and Y. Namikawa, eds.), Academic Press, 1989, pp. 429–463.

[Mur90] M. Muro, *Invariant hyperfunctions on regular prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type*, Tôhoku Math. J. (2) **42** (1990), no. 2, 163–193.