数理解析研究所講究録
第856巻 1994年 34-39

Regularity Theorems for Holonomic Modules

北大理 本多 尚文
(N. Honda)

0. Introduction

常微分方程式において、その不確定特異点度と、解の増大度の関係は、いろいろな研究がなされており、詳細な結果が知られている。

まず、不確定特異点度の定義を思いだしておこう。

$$P = a_0(z)D^n + a_1(z)D^{n-1} + \cdots + a_n(z), \quad a_0(z) \not\equiv 0, \quad a_k(z) \in \mathbb{C}\{x\},$$

に対して、原点における不確定特異点度は、

$$\mathrm{Irr}_{\{0\}}(P) \underset{\mathrm{def}}{:=} \underset{1 \leq k \leq n}{\mathrm{Max}} \left\{ 1, \frac{\mathrm{mult}_{\{0\}} a_0 - \mathrm{mult}_{\{0\}} a_k}{n-k} \right\}$$

で、定義される。

この不確定特異点度と、解層を関係付ける結果として、次の小松[1]による結果を紹介しておこう。

$\mathcal{D}^{(s)}_{b,0}$: $(1<s<+\infty)$ 原点における Gevrey (s) クラスの
distribution の層の stalk.

$\mathcal{B}_0$: hyperfunction の原点における stalk.

P を実解析的係数を持つ線型常微分方程式とする。

この時 $P:\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_0$ において次は同値.

(1) $\mathrm{Ker}\,P \subset \mathcal{D}^{(s)}_{b,0}$ $\Longleftrightarrow$ (2) $\mathrm{Irr}_{\log}(P) \leqq \dfrac{s}{s-1}$

これは実領域における結果だが、複素領域における結果、例えば、解層を増大度付きの形式べき級数におき換えた時も類似の結果が成立する.

この報告の目標は、これらの結果を高次元で証明する事、つまり、ホロノミック系に対して類似の比較定理を示す事にある.

さて、まずそのためには、不確定特異点度を、高次元でも定義する必要がある。ここでは、以下の様な定義を採用する.

1. 不確定特異点度

まず、初めにいくつかの必要になる層を定義しておく.

X を n 次元複素多様体、$\mathcal{E}_X$ を T^*X 上の PDO の層, $\mathcal{E}^\infty_X$ を T^*X 上の無限階 PDO の層とする(これらの定義は SKK を見よ)

① $\mathcal{E}^{(s)}_X \subset \mathcal{E}^\infty_X$: 増大度が Gevrey (s) クラスに属する
無限階 PDO の層

$P \in \mathcal{E}_X^{\infty}(U)$（$U$は$T^*X$の open set）に対し．

$$P \in \mathcal{E}_X^{(s)}(U) \Leftrightarrow {}^{\forall}K \Subset U,\ {}^{\exists}C_K > 0$$
$$\sup_{(z,\zeta)\in K} |P_i(z,\zeta)| \leqq \frac{C_K^i}{i!^s} \quad (i \geq 0)$$

② YをXの複素部分多様体とする．この時Yに沿った（増大度制限を持つ）holomorphic microfunction の層が．次の様に定義される．$\mathcal{O}_X$を正則関数の層とする．

$$C_{Y|X}^{\mathbb{R},f} := T\text{-}\mu_Y(\mathcal{O}_X)[\mathrm{Codim}_{\mathbb{C}} Y],$$
$$C_{Y|X}^{\mathbb{R},(s)} := T\text{-}\mu_Y^{(s)}(\mathcal{O}_X)[\mathrm{Codim}_{\mathbb{C}} Y],$$
$$C_{Y|X}^{\mathbb{R}} := \mu_Y(\mathcal{O}_X)[\mathrm{Codim}_{\mathbb{C}} Y].$$

$C_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \subset C_{Y|X}^{\mathbb{R},(s)} \subset C_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ はT_Y^*X上の層で．$\mathcal{E}_X$（resp. $\mathcal{E}_X^{(s)}$，$\mathcal{E}_X^{\infty}$）が作用する．また．

$$C_{Y|X}^{\mathbb{R},(s)} = \mathcal{E}_X^{(s)} \cdot C_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$$

が成立する．

③．$V \subset \mathring{T}^*X := T^*X \setminus T_X^*X$ を．regular or maximally degenerated involutive submanifold とする．有理数 $\sigma \in [1,\infty)$ に対して．

$$I_V := \{P \in \mathcal{E}_X;\ \mathrm{ord}(P) \leqq 1 \text{ かつ } \sigma_1(P)|_V \equiv 0\},$$

$$\mathcal{E}_V^{(\sigma)} := \sum_{n\geq 0} \mathcal{E}_X\left(\frac{(1-\sigma)n}{\sigma}\right) I_V^n$$

を定義する. ただし. $\mathcal{E}_X(k) := \{ P \in \mathcal{E}_X ; \mathrm{ord}(P) \leq k \}$.

さて. いよいよ. 不確定特異点度の定義をする.

$\mathcal{M}$を. $p \in \dot{T}^*X$ 近傍で定義されたholonomic $\mathcal{E}_X$ module とする.

[定義]

$\mathcal{M}$が高々σのweak irregularityを持つとは.

pの近傍のSupp$(\mathcal{M})$がsmoothな任意の点. $q \in \dot{T}^*X$に対し.

次の条件を満たす. Vと$\mathcal{M}_0$が存在する時を言うものとする.

1) Vは. maximally degenerated involutive submanifold で. その singular locus が qの近傍で. Supp$(\mathcal{M})$に一致する.

2) qの近傍で. $\mathcal{E}_V^{(\sigma)}$ module $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$が存在し.

$\mathcal{M}_0$は. $\mathcal{E}(0)$ Coherentで. $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X \mathcal{M}_0$を満足する.

$\square$

holonomic $\mathcal{D}_X$ module $\mathcal{N}$が高々σのweak irregularityを持つとは. $\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N}$が. 上の条件を満たす時を言うものとする.

上の条件は一見複雑だが. 量子化接触変換で. Supp$(\mathcal{M})$を. きれいな位置に持って行くと. 非常にsimpleな条件である事が判る. また一変数の時は. Introductionで定義した. Irrと一致する.

2. 主結果

以上の準備の元、主結果を述べよう。

[定理] Uを$\mathbb{C}^{\times}$ conic なT^*Xの open set、

$\mathcal{M}$を holonomic $\mathcal{E}_X$ module、$\sigma \geqq 1$を有理数とする。

この時、以下の条件は同値である。

(1) 確定特異点型の holonomic $\mathcal{E}_X$ module $\mathcal{M}_{reg}$ が存在し、

$\forall s \in [1, \frac{\sigma}{\sigma-1}]$ に対して、

$$\mathcal{E}_X^{(s)} \underset{\mathcal{E}_X}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_X^{(s)} \underset{\mathcal{E}_X}{\otimes} \mathcal{M}_{reg}$$

が成立する。

(2) 任意の部分複素多様体Yに対して、次の同型が成立する。

$$R\underline{Hom}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C^{\mathbb{R},(s)}_{Y|X})|_U \simeq R\underline{Hom}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C^{\mathbb{R}}_{Y|X})|_U,$$

$$s \in [1, \frac{\sigma}{\sigma-1}]$$

(3) $\mathcal{M}$は、高々σの weak irregularity をしか持つ。

$\boxed{/}$

ここでは、証明のかわりに、条件の意味について述べておく。(1)は、任意の holonomic system は、その irregularity に応じた$(\frac{\sigma}{\sigma-1})$の増大度を持つ、無限階のPDEを用いて、確定特異点型に変換出来る事を示している。

(2)は、introduction で述べた、小松[1]の結果に対応するものである。(ここでは、Gevrey class の ultra distribution を用いる替りに、Gevrey class の holomorphic micro function

を用いている)

もし、Xがある実解析的多様体Mの複素化で、Supp($\mathcal{M}$)が $T^*_M X$ 内の実解析的集合の複素化(smoothな点で)ならば、(2)の $C^{\mathbb{R},(s)}_{T|X}$ を $\mathcal{D}^{(s)}_{\mathcal{B},M}$ に置き換えた同様の主張の元で、定理が成立するが、一般の場合は成立するかどうか判らない。(もちろん、Supp($\mathcal{M}$)の既約成分のすべてが $iT^*_M X$ と交わると仮定して)

主定理の証明は、準備中の論文を見ていただきたい。

[1] H. Komatsu : On the regularity of the hyperfunction solutions of linear ordinary differential equations with real analytic coefficients. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 20, 107-119 (1973)