数理解析研究所講究録
第857巻1994年1-8

The upper-bound of the volume of the dual polytopes of integral convex polytopes P in $\mathbb{R}^n$ with $\mathrm{Int}(P)\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$

東北学院大学教養学部　土橋宏康
(Hiroyasu Tsuchihashi)

Pを$\mathbb{R}^n$内の整凸多面体とする。即ち、Pは$\mathbb{Z}^n$の有限部分集合の凸包である。さらに、Pは$\dim P = n$, $\mathrm{Int}(P)\cap\mathbb{Z}^n = \{0\}$を満たすと仮定する。このようなPから得られる扇$\{\mathbb{R}_{\geq 0}F \mid F$は$\partial P$の面$\}\cup\{\{0\}\}$に対応するコンパクトn次元toric多様体$X_P$は標準特異点しか持たず、Pの境界が単体的ならば$X_P$は$\mathbb{Q}$－Fano多様体であることが知られている。逆に、すべての$\mathbb{Q}$－Fano toric多様体は上記の条件を満たす整凸多面体から得られる。また、X_Pが$\mathbb{Q}$－factorialでなくても反標準因子$-K_{X_P}$は$\mathbb{Q}$－Cartierであり、$(-K_{X_P})^n$が定義できる。Pの双対多面体を

$$P^* = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \geq -1 \text{ for } \forall y\in P\}$$

により定義すれば$(-K_{X_P})^n = n!\,\mathrm{vol}(P^*)$であることが知られている。現在までに知られているものの中で$\mathrm{vol}(P^*)$が最大となる整凸多面体PはZaks, Perles&Wills[2]によって最初に発見された次の例で与えられる。

<u>例</u>　$y_1=2$, $y_2=3$, ..., $y_{k+1}=y_1y_2\dots y_k+1$により数列$\{y_k\}$を定める。$P_n$を${}^t(1,0,\dots,0),\dots,{}^t(0,\dots,0,1)$, ${}^t(2(1-y_n)/y_1,\dots,2(1-y_n)/y_{n-1},-1)$を頂点とする単体とすれば、双対多面体$P_n^*$は${}^t(-1+y_1,-1,\dots,-1),\dots,{}^t(-1,\dots,-1,-1+y_{n-1},-1)$, ${}^t(-1,\dots,-1,-1+2(y_n-1))$, ${}^t(-1,\dots,-1)$を頂点とする単体である。従って、P_n^*も整凸多面体であり、$\mathrm{Int}(P_n)\cap\mathbb{Z}^n = \mathrm{Int}(P_n^*)\cap\mathbb{Z}^n = \{0\}$である。また$n!\,\mathrm{vol}(P_n^*) = y_1y_2\dots y_{n-1}2(y_n-1) = 2(y_n-1)^2$である。

<u>予想 A_n $(n \geq 3)$</u>　Pが $\mathrm{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内のn次元整凸多面体ならば、$n!\mathrm{vol}(P^*) \leq 2(y_n-1)^2$ 。

<u>注</u>　$n=2$ のときPを ${}^t(1,0)$, ${}^t(0,1)$, ${}^t(-1,-1)$ を頂点とする単体とすれば $2!\mathrm{vol}(P^*) = 9 > 2(y_2-1)^2 = 8$ だから A_2 は偽である。

上記の予想は次の定理により、簡単なアルゴリズムで確かめることのできる別の予想（［1］の B_n）に帰着できる。

<u>定理</u>　nを3以上の整数とする。1以上 $n-1$ 以下の各整数 ℓ に対して次の条件を満たす正の実数 $L(\ell)$ が存在すると仮定する。

$L(\ell) \geq L(\ell-1)(L(\ell-1)+1)$.

$\mathbb{Q}^{\ell}_{>0}$ の任意の点 $x=(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ に対して $\mathrm{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbb{Z}^\ell = \{0\}$ ならば $1+x_1+x_2+\ldots+x_\ell \leq L(\ell)$。ここに、$\Delta(x)$ は $(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1),-x$ を頂点とする単体である。

このとき、$\mathrm{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の任意の整凸多面体Pに対して $n!\mathrm{vol}(P^*) \leq 2L(n-1)^2$ である。

$y_{\ell+1}-1 = y_1y_2\ldots y_\ell = (y_\ell-1)y_\ell$ であるから、上記の定理で $L(\ell) = y_{\ell+1}-1$ とすることができれば予想 A_n は正しい。ところが、$L(1) = 2 = y_2-1$, $L(2) = 6 = y_3-1$ とできることは簡単に分るから（［1］）、予想 A_3 が正しいことも分る。また、計算機により $\ell \leq 5$ に対して $L(\ell) = y_{\ell+1}-1$ とできることも確かめらた（［1］）。

<u>定理の証明</u>　先ず、Pが単体の場合を考える。即ち、Pは $\mathbb{Z}^n$ の $n+1$ 個の元 $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ の凸包である。このとき $v_{n+1} = -x_1v_1-x_2v_2-\ldots-x_nv_n$ を満たす正有理数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ がある。ここで、$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 1$ としてよい。$M = v_1\mathbb{Z} \oplus v_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus v_n\mathbb{Z}$ とすれば、Mは $\mathbb{Z}^n$

の指数有限な部分加群であるから、

$$\mathrm{vol}(P^*) \leqq \mathrm{vol}_{M^*}(P^*) = \mathrm{vol}(\Delta({}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n))^*)$$
$$= (1/n!)(1+\Sigma_{j=1}^{n} x_j)^n/(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

である。次に、$w_j = x_j/(1+x_n)$ とおけば、$w_1 \geqq w_2 \geqq \ldots \geqq w_{n-1} \geqq 1/2$, $\mathrm{Int}(\Delta({}^t(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}))) \cap \mathbb{Z}^{n-1} = \{0\}$, $(1+\Sigma_{j=1}^{n} x_j)^n/(x_1 x_2 \ldots x_n) = (1+1/x_n)(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)^n/(w_1 w_2 \ldots w_{n-1}) \leqq 2(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)^n/(w_1 w_2 \ldots w_{n-1})$ であるから、次の補題によりPが単体の場合の証明は終る。

<u>補題</u>1　$w = {}^t(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^{n-1}$ が $\mathrm{Int}(\Delta(w)) \cap \mathbb{Z}^{n-1} = \{0\}$, $w_1 \geqq w_2 \geqq \ldots \geqq w_{n-1} \geqq 1/2$ を満たせば

$$(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)^n/(w_1 w_2 \ldots w_{n-1}) \leqq L(n-1)^2$$

<u>証明</u>　$n=3$ のときは簡単に確かめられる。以下、n を4以上の整数とする。$w_j^1 = w_j/(1+w_{n-1})$ とすると

$$\mathrm{Int}(\Delta({}^t(w_1^1, w_2^1, \ldots, w_{n-2}^1))) \cap \mathbb{Z}^{n-2} = \{0\},$$
$$w_1^1 \geqq w_2^1 \geqq \ldots \geqq w_{n-2}^1 \geqq 1/3,$$
$$(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)^n/(w_1 w_2 \ldots w_{n-1}) =$$
$$(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)(1+1/w_{n-1})(1+\Sigma_{j=1}^{n-2} w_j^1)^{n-1}/(w_1^1 w_2^1 \ldots w_{n-2}^1)$$

となる。

最初に、$w_{n-2}^1 \geqq 1/2$ の場合を考える。帰納法の仮定より

$$(1+\Sigma_{j=1}^{n-2} w_j^1)^{n-1}/(w_1^1 w_2^1 \ldots w_{n-2}^1) \leqq L(n-2)^2.$$

$w_{n-1} \geqq L(n-2)$ ならば $(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)(1+1/w_{n-1}) \leqq L(n-1)(1+1/L(n-2)) = L(n-1)(L(n-2)+1)/L(n-2)$ だから

$$(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)^n/(w_1 w_2 \ldots w_{n-1}) \leqq L(n-2)^2 L(n-1)(L(n-2)+1)/L(n-2)$$
$$= L(n-1)L(n-2)(L(n-2)+1) \leqq L(n-1)^2.$$

$w_{n-1} < L(n-2)$ ならば $(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)(1+1/w_{n-1}) = (1+\Sigma_{j=1}^{n-2} w_j^1)(1+w_{n-1})^2/w_{n-1} \leqq L(n-2)(1+L(n-2))^2/L(n-2) = (1+L(n-2))^2$ だから

$$(1+\Sigma_{j=1}^{n-1} w_j)^n/(w_1 w_2 \ldots w_{n-1}) \leqq L(n-2)^2(L(n-2)+1)^2 \leqq L(n-1)^2.$$

次に、$w_{n-2}^1 < 1/2$ の場合を考える。このとき、$w_{n-1} < 1$ である。$w_j^k = w_j^{k-1}/(1+w_{n-k}^{k-1})$ $(2 \leqq k \leqq n-2, 1 \leqq j \leqq n-k-1)$ とすれば

$$w_1^k \geqq w_2^k \geqq \ldots \geqq w_{n-k-1}^k \geqq 1/(k+2),$$

$\mathrm{Int}(\Delta({}^t(w^k_1, w^k_2, \ldots, w^k_{n-k-1}))) \cap \mathbb{Z}^{n-k-1} = \{0\}$

である。従って、特に $w^{n-2}_1 \leqq 1$ である。まず、ある k $(2 \leqq k \leqq n-2)$ に対して $w^1_{n-2}, w^2_{n-3}, \ldots, w^{k-1}_{n-k} < 1/2$, $w^k_{n-k-1} \geqq 1/2$ であると仮定する。このとき、$2 \leqq j < k$ に対して $(1+w^j_{n-j-1})^{j+2}/w^j_{n-j-1}$

$\leqq \max((1+1/2)^{j+2}/(1/2), (1+1/(j+2))^{j+2}/(1/(j+2))$

$= \max(3^{j+2}/2^{j+1}, (j+3)^{j+2}/(j+2)^{j+1}) < y_{j+2}-1 < y_{j+2}$. また

$((1+w^1_{n-2})^3/w^1_{n-2})((1+w_{n-1})^2/w_{n-1}) \leqq (4^3/3^2)((1+1/2)^2/(1/2))$

$= 32 < y_3y_2y_1$ である。一方、$k \leqq n-3$ のとき

$(1+\Sigma^{n-k}_{j=1} w^k_j)^n/(w^k_1 w^k_2 \ldots w^k_{n-k-1})$

$= (1+\Sigma^{n-k-1}_{j=1} w^k_j)^k (1+\Sigma^{n-k-1}_{j=1} w^k_j)^{n-k}/(w^k_1 w^k_2 \ldots w^k_{n-k-1})$

$\leqq L(n-k-1)^k L(n-k-1)^2 = L(n-k-1)^{k+2} \leqq L(n-k-1)^{2^k} < L(n-k)^{2^{k-1}} < \ldots < L(n-1)$ であり、$k = n-2$ のときも、$(1+w^k_1)^{n-2}(1+w^k_1)^2/w^k_1 \leqq 2^{n-2} \cdot 9/2 < y_n - 1 \leqq L(n-1)$ である。従って、

$(1+\Sigma^{n-1}_{j=1} w_j)^n/(w_1 w_2 \ldots w_{n-1})$

$= ((1+\Sigma^{n-2}_{j=1} w^1_j)^n/(w^1_1 w^1_2 \ldots w^1_{n-2}))((1+w_{n-1})^2/w_{n-1}) = \ldots$

$= ((1+\Sigma^{n-k-1}_{j=1} w^k_j)^n/(w^k_1 w^k_2 \ldots w^k_{n-k-1}))((1+w^{k-1}_{n-k})^{k+1}/w^{k-1}_{n-k}) \ldots ((1+w_{n-1})^2/w_{n-1}) < L(n-1) y_{k+1} \ldots y_2 y_1 = L(n-1)(y_{k+2}-1) \leqq L(n-1)(y_n-1) \leqq L(n-1)^2$ である。最後に、$w^1_{n-2}, w^2_{n-3}, \ldots, w^{n-2}_1 < 1/2$ のときは、

$(1+\Sigma^{n-1}_{j=1} w_j)^n/(w_1 w_2 \ldots w_{n-1})$

$= ((1+w^{n-2}_1)^n/w^{n-2}_1)((1+w^{n-3}_2)^{n-1}/w^{n-3}_2) \ldots ((1+w_{n-1})^2/w_{n-1})$

$< (y_n-1) y_{n-1} \ldots y_2 y_1 = (y_n-1)^2 \leqq L(n-1)^2$ である。 ■

次に、P が単体でない場合を考える。$\mathbb{R}^n$ 内の凸体 Q_1 , Q_2 に対して、$Q_1 \subset Q_2$ ならば $Q^*_1 \supset Q^*_2$ であることに注意すると P は包含関係に関して極小と仮定してよい。即ち、Q が P に含まれる n 次元整凸多面体ならば Q = P かまたは $0 \notin \mathrm{Int}(Q)$.

<u>補題</u> 2　Q を $\mathbb{R}^n$ 内の原点を内部に含む凸体とする。Q が単体でなければ、次の条件を満たす凸多面体 Q_0 が存在する。

(*)　$0 \in \mathrm{Int}(Q_0)$, $\{\text{the vertices of } Q_0\} \subsetneqq \{\text{the vertices of } Q\}$

<u>証明</u>　$v_1, v_2, \ldots, v_s$ をQの頂点とする。各頂点v_jに対して$0 \in \overline{v_j v_j'}$ を満たすQの境界上の点v_j'が唯一つ存在する。F_j をv_j' を内部に含むQの面とする（v_j'が頂点のときは$F_j = v_j'$）。v_jとF_jの凸包Q_jがQに等しくなければ、$Q_0 = Q_j$ は(*)を満たす。そこですべてのjについて$Q_j = Q$ であると仮定する。このとき、v_j以外のQの頂点はすべてF_j上にあるから $< v_k, u_j > = -1 (j \neq k)$を満たす$\mathbb{R}^n$の元$u_j$が存在する。すると $s \neq j \neq k$ $(s \neq j = k)$ のとき$< v_k - v_s, u_j > = 0$ (> 0) だから $v_1 - v_s, v_2 - v_s, \ldots, v_{s-1} - v_s$は線型独立であることになり、Qは単体であることになる。■

Q＝Pに対して、上の補題の条件(*)を満たす凸多面体の中で次元が最大のものを一つ選んでP_0とし、その次元をmとする。Pは極小であるから、$m < n$である。$v_1, v_2, \ldots, v_s$をPの頂点とする。このとき、P_0の頂点は$v_1, v_2, \ldots, v_r$ $(r<s)$であるとしてよい。HをP_0で張られる$\mathbb{R}^n$の部分空間とし、$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/H$を射影とする。Pは極小であるから、$p(v_{r+1}), p(v_{r+2}), \ldots, p(v_s)$ は$p(P)$の頂点である。さらに、$p(P)$が単体であることも次のようにしてわかる。$Q = p(P)$が単体でなければ、上の補題により$\{v_{r+1}, \ldots, v_s\}$ の固有部分集合$\{u_1, \ldots, u_\ell\}$ で$p(u_1), \ldots, p(u_\ell)$ の凸包が原点を内部に含むものがある。すると $u_1, \ldots, u_\ell, v_1, \ldots, v_r$ の凸包は条件(*)を満たし次元はmより大きいから、P_0の選び方に矛盾する。従って、$n - m + 1 = s - r$ である。以下で、P^*の体積を評価するために射影 $P^* \to P_0^*$ のfiberの体積の評価を考える。正の有理数$b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_s$で$b_{r+1} + b_{r+2} + \ldots + b_s = 1, b_{r+1}p(v_{r+1}) + b_{r+2}p(v_{r+2}) + \ldots + b_s p(v_s) = 0$を満たすものが存在する。このとき、 $u_0 := b_{r+1}v_{r+1} + b_{r+2}v_{r+2} + \ldots + b_s v_s$はHに含まれる。$u_0 \neq 0$ ならば$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$の中の一次独立な元$u_1, u_2, \ldots, u_\ell$で$u_0, u_1, \ldots, u_\ell$の凸包$Q_0$が原点を内部に含むものがある。また、$u_1, \ldots, u_\ell, v_{r+1}, \ldots, v_s$ の凸包をQとする。（$u_0 = 0$ のときは$Q_0 = \{0\}$, Qは$v_{r+1}, \ldots, v_s$ の凸包とする。）このとき、Qは単体であり、原点を内部に含む。$n > \dim Q = \ell + n - m$だから$\ell < m$である。IとJをそれぞれQと$Q_0$で張られる$\mathbb{R}^n$の部分空間とすれば、$J = H \cap I$, $\mathbb{R}^n = H +$

I である。それゆえ、$\mathbb{R}^n/H \cong I/J$ である。$q_1 : (\mathbb{R}^n)^* \to H^*$, $q_2 : I^* \to J^*$, $j_1 : (\mathbb{R}^n)^* \to I^*$, $j_2 : H^* \to J^*$ を自然な射影とする。このとき、$q_2 \circ j_1 = j_2 \circ q_1$, $q_1(P^*) \subset P_0^*$, $q_2(Q^*) = Q_0^*$, $j_1(P^*) \subset Q^*$, $j_2(P_0^*) \subset Q_0^*$ である。また、H^* (J^*) の点 x_1 (x_2) に対して $q_1^{-1}(x_1)$ ($q_2^{-1}(x_2)$) 内の凸体 C_1 (C_2) の体積を $\mathrm{vol}(C_1)=\mathrm{vol}(C_1-v_1)$ ($\mathrm{vol}(C_2)=\mathrm{vol}(C_2-v_2)$) で定義する。ここに、$v_1$ (v_2) は $q_1^{-1}(x_1)$ ($q_2^{-1}(x_2)$) の点である。j_1 の $\ker(q_1)$ への制限は $\ker(q_2)$ の上への同型写像であるから、P_0^* の点 v に対して $\mathrm{vol}(q_1^{-1}(v) \cap P^*) \leq \mathrm{vol}(q_2^{-1}(j_2(v)) \cap Q^*)$ である。一方、$u_1^*, \ldots, u_\ell^*, v_{r+1}^*, \ldots, v_s^*$ を $\langle u_j, u_j^* \rangle > 0$, $\langle v_j, v_j^* \rangle > 0$ を満たす Q^* の頂点とし、$u_0', u_1', \ldots, u_\ell'$ を $\langle u_j, u_j' \rangle > 0$ を満たす Q_0^* の頂点とする（ただし、$u_0 = 0$ のときは $u_0' = 0$）と、$q_2(u_j^*) = u_j'$, $q_2(v_j^*) = u_0'$ である。従って、Q_0^* の任意の点 u に対して $h := \mathrm{vol}(q_2^{-1}(u_0') \cap Q^*) \geq \mathrm{vol}(q_2^{-1}(u) \cap Q^*)$ である。それゆえ、$h \geq \max\{\mathrm{vol}(q_1^{-1}(v)) \cap P^*) \mid v \in P_0^*\}$ である。

<u>補題</u> 3　$h \leq (n-m+1)L(\ell)\ldots L(\ell+n-m-1)$ ただし $L(0) = 1$.

<u>証明</u>　先ず、$(n-m+\ell)!\,\mathrm{vol}(Q^*) = \ell!\,\mathrm{vol}(Q_0^*)(n-m)!\,h$ であることに注意する。$c_1+c_2+\ldots+c_{n-m+\ell+1}=1$, $c_1u_1+\ldots+c_\ell u_\ell+c_{\ell+1}v_{r+1}+\ldots+c_{n-m+\ell+1}v_s=0$ を満たす正の有理数 $c_1, c_2, \ldots, c_{n-m+\ell+1}$ が存在する。ここで、$c_{\ell+1} \geq c_{\ell+2} \geq \ldots \geq c_{n-m+\ell+1}$ と仮定してよい。L (L') を $u_1, \ldots, u_\ell, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}$ ($u_1, \ldots, u_\ell$) で生成される $I \cap \mathbb{Z}^n$ ($J \cap \mathbb{Z}^n$) の部分加群とする。$v_s = -(c_1/c_{n-m+\ell+1})u_1 - \ldots - (c_{n-m+\ell}/c_{n-m+\ell+1})v_{s-1}$ ($u_0 = -(c_1/(1-c_1-\ldots-c_\ell))u_1 - \ldots - (c_\ell/(1-c_1-\ldots-c_\ell))u_\ell$) だから $(n-m+\ell)!\,\mathrm{vol}(Q^*) = c_1^{-1}c_2^{-1}\ldots c_{n-m+\ell}^{-1}[I \cap \mathbb{Z}^n : L]^{-1}$ ($\ell!\,\mathrm{vol}(Q_0^*) = c_1^{-1}c_2^{-1}\ldots c_\ell^{-1}[J \cap \mathbb{Z}^n : L']^{-1}$) である。$[I \cap \mathbb{Z}^n : L] \geq [J \cap \mathbb{Z}^n : L']$ だから $(n-m)!\,h \leq c_{\ell+1}^{-1}c_{\ell+2}^{-1}\ldots c_{n-m+\ell}^{-1}$ である。$c_j' = c_j + \ldots + c_{\ell+n-m+1}$ $(=1-c_1-\ldots-c_{j-1})$, $w_j = -(c_1/c_j')u_1 - \ldots - (c_\ell/c_j')u_l - (c_{\ell+1}/c_j')v_{r+1} - \ldots - (c_{j-1}$

$/c_j')v_{j+r-\ell-1}(=(c_j/c_j')v_{j+r-\ell}+\dots+(c_{\ell+n-m+1}/c_j')v_s)$ とする。このとき、$(\mathbb{R}u_1+\dots+\mathbb{R}u_\ell+\mathbb{R}v_{r+1}+\dots+\mathbb{R}v_{j+r-\ell-1})\cap\overline{v_{j+r-\ell}\dots v_s}=\{w_j\}$ である。$j\geqq 2$ のとき、$\mathrm{Int}(Q)\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$ だから $L(j-1)\geqq 1+(c_1+c_2+\dots+c_{j-1})/c_j'=1+(1-c_j')/c_j'=1/c_j'$ である。$j=1$ のときは、$1/c_j'=1=L(0)$ である。従って、$j\geqq\ell+1$ のとき $(n-m+\ell+2-j)c_j\geqq c_j'\geqq L(j-1)^{-1}$ である。それゆえ、$(n-m)!h\leqq(n-m+1)L(\ell)(n-m)L(\ell+1)\dots 2L(\ell+n-m-1)=(n-m+1)!L(\ell)\dots L(\ell+n-m-1)$。 ■

$n-m+\ell=\dim Q\leqq\dim P_0=m$ だから $m\geqq n/2$ である。特に、$m=n/2$ ならば $\ell=0$、従って $u_0=0$ である。

$n=3$ のときは $m=2$ である。$u_0=0$ ならば $h\leqq 2$、従って $\mathrm{vol}(P^*)\leqq\mathrm{vol}(P_0^*)h\leqq(9/2)2<(1/3!)2(y_3-1)^2$。$u_0\neq 0$ ならば P は $GL(3,\mathbb{Z})$ の元により、次の4つの凸体のいずれかに移されることが容易にわかる。

(1) ${}^t(1,0,0),{}^t(0,1,0),{}^t(-1,-1,0),{}^t(0,0,1),{}^t(1,1,-1)$ の凸包

(2) ${}^t(\pm1,-1,0),{}^t(0,1,0),{}^t(0,-1,\pm1)$ の凸包

(3) ${}^t(\pm1,-1,0),{}^t(0,1,0),{}^t(0,0,1),{}^t(0,-1,-1)$ の凸包

(4) ${}^t(\pm1,-1,0),{}^t(0,1,0),{}^t(1,0,2),{}^t(-1,-2,-2)$ の凸包

これらの凸体の双対多面体の体積はいずれも $(1/3!)2(y_3-1)^2$ 以下である。

$n=4$ のときは $m=2$ または 3 である。$m=2$ ならば $\mathrm{vol}(P^*)\leqq\mathrm{vol}(P_0^*)h\leqq(9/2)3L(0)L(1)<(1/4!)2L(3)^2$。$m=3$ ならば $\ell\leqq m-1=2$, $L(2)\geqq y_3-1=6$ だから $\mathrm{vol}(P_0^*)h\leqq(1/3!)2L(2)^2 2L(\ell)<(1/4!)2L(3)^2$ である。

$n\geqq 5$ のときは $m\geqq 3$ である。従って、$\mathrm{vol}(P^*)\leqq\mathrm{vol}(P_0^*)h\leqq(1/m!)2L(m-1)^2(n-m+1)L(\ell)\ \dots\ L(\ell+n-m-1)<(1/m!)2L(m-1)^2(n-m+1)(L(m-1)+1)\ \dots\ (L(n-2)+1)\leqq(1/n!)2L(n-1)^2(n-m+1)((m+1)/(L(m-1)+1)\ \dots\ (n/L(n-2)+1)<(1/n!)2L(n-1)^2$ である。 ■

文献

[1] 土橋宏康「$\mathrm{Int}(P)\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の整凸多面体Pの双対多面体の体積の上限について」数理解析研究所講究録「計算幾何学と離散幾何学」に掲載予定

[2] J. Zaks, M. A. Perles and J. M. Wills, On the lattice vertex polytopes having interior lattice points, Elemente der Math., 37 No. 2, (1982), 44-46.