数理解析研究所講究録
第 857 巻 1994 年 26-39

超幾何級数と強凸多面錐

北大理　齋藤　睦　(SAITO, Mutsumi)

本稿では、$\mathcal{A}$-超幾何級数と強凸多面錘との関連の例として、§2 では $\mathcal{A}$-超幾何級数の零でない項の数が有限個となる (以後、多項式と呼ぶ) のはどういう時かという問題を考える。 また、§4 では $\mathcal{A}$-超幾何級数で生成されるシンメトリー部分代数の表現が有限次元となる条件を考える。

§1. 正規 $\mathcal{A}$-超幾何微分方程式系

集合 $\{s_1,\dots,s_n\}$ を n 階の自由 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$の基底とする。また、$\{e_1,\dots,e_n\}$ を $M := \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$の $\{s_1,\dots,s_n\}$ に双対な基底とする。加群 Mの部分集合 $\mathcal{A} = \{\chi_j \mid 1 \le j \le N\}$ $(N > n)$ に対して、次の三つの条件を考える。

(1)　$\chi_1,\dots,\chi_N$ は Mを生成する。

(2)　元 $c_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$があって$\chi_j(c_0) = 1$ $(\forall j)$ を満たす。

(3)　$M_{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} M$において

$$\Lambda = M \cap (\sum_{j=1}^{N} \mathbb{R}_{\ge 0}\chi_j)$$

が成立する。　ここで、半群Λ を$\Lambda := \sum_{j=1}^{N} \mathbb{Z}_{\ge 0}\chi_j$で定義する。

条件 (1) 及び (2) を満たす集合 $\mathcal{A}$ に対して、$\sum_{j=1}^{N} a_j\chi_j = 0$ を満たす $a = (a_j)_{j=1}^{N}$からなる $\mathbb{Z}^N$の部分加群を L と書く。また、$\mathbb{C}^N$ 上のワイル代数を $W = \mathbb{C}[u_1,\dots,u_N, D_1,\dots,D_N]$ とする。 ここで、$(u_1,\dots,u_N)$ は $\mathbb{C}^N$上の座標で、$D_j = \partial/\partial u_j$ $(j = 1,\dots,N)$ である。加群 L の元 a に対して、$\Box_a = \prod_{a_j>0} D_j^{a_j} - \prod_{a_j<0} D_j^{-a_j}$ と置く。更に、$\beta \in M_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ に対して、 W-加群

$$W/(\sum_{i=1}^{n} W(\sum_{j=1}^{N} \chi_j(s_i)u_j D_j - \beta(s_i)) + \sum_{a\in L} W\Box_a)$$

をパラメーターβを持つ $\mathcal{A}$-超幾何系と呼ぶ (cf. [GGZ])。もし、$\mathcal{A}$ が条件 (1) と (2) のほかに (3) も満たすならば、その $\mathcal{A}$-超幾何系は正規と呼ばれる。この稿を通じて $\mathcal{A}$ は条件 (1)、(2)、及び (3) を満たすと仮定する。$M_{\mathbb{R}}$ における点$\chi_1,\dots,\chi_N$ の凸包を Q と書き、Q の余次元 1 の面 (ファセット) 全体の集合を $\mathcal{F}$と書く。ファセット $\Gamma \in \mathcal{F}$に対して、 φ_Γ をΓで張られる超平面を定義する最大公約数が 1 の整数係数の線形形式で$\varphi_\Gamma(\chi_j) \geq 0$ $(\forall j)$ を満たすものとする。

§2. 多項式になる条件

パラメーター$\beta \in M_{\mathbb{C}}$及び$\gamma\chi := \sum_{j=1}^{N} \gamma_j\chi_j = \beta$ となる$\gamma = (\gamma_j)_{j=1}^{N} \in \mathbb{C}^N$ に対して、形式的 $\mathcal{A}$-超幾何級数$\Phi(\gamma, u)$ を

$$\Phi(\gamma, u) := \sum_{a\in L}(\prod_{j=1}^{N} \Gamma(\gamma_j + a_j + 1)^{-1})u^{a+\gamma}$$

で定義する。形式的級数$\Phi(\gamma, u)$ は、パラメーターβを持つ $\mathcal{A}$-超幾何系の解である (cf. [**Hr**], [**GGZ**])。

補題 2.1. $I := \{ i \,|\, \gamma_i \in \mathbb{Z} \}$、$J := [1, N] - I$と置く。また、$\beta_I := \sum_{i \in I} \gamma_i \chi_i$ と置く。この時、

$$\Phi(\gamma, u) \neq 0 \Leftrightarrow \beta_I \in \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \chi_i + \sum_{j \in J} \mathbb{Z} \chi_j$$

が成り立つ。

証明: 明らかに

$$\begin{aligned} &\{ a \in L \,|\, \Phi(\gamma, u) \text{ の } u^{a+\gamma} \text{ の係数は零でない} \} \\ =&\{ a \in L \,|\, a_i \geq -\gamma_i \ (\forall i \in I) \} =: S \end{aligned}$$

である。一方、任意の $a \in L$ に対して$\beta_I = \sum_{i \in I} \gamma_i \chi_i = \sum_{i \in I} \gamma_i \chi_i + \sum_{i \in I} a_i \chi_i + \sum_{j \in J} a_j \chi_j = \sum_{i \in I} (\gamma_i + a_i) \chi_i + \sum_{j \in J} a_j \chi_j$ と書けるので $S \neq \emptyset$ と$\beta_I \in \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \chi_i + \sum_{j \in J} \mathbb{Z} \chi_j$ は同値。 ∎

補題 2.2. Γ_J を全ての χ_j $(j \in J)$で張られる凸包とする。この時、$\Phi(\gamma, u) \neq 0$ である必要十分条件は$\Gamma \supset \Gamma_J$となる全ての$\Gamma \in \mathcal{F}$に対して、$\varphi_\Gamma(\beta) \geq 0$ となることである。

証明: 必要性は補題 1 から従う。十分性の証明のために$\Gamma \supset \Gamma_J$となる全ての$\Gamma \in \mathcal{F}$に対して、$\varphi_\Gamma(\beta) \geq 0$ と仮定する。もし、$\Gamma \in \mathcal{F}$ が $\Gamma \not\supset \Gamma_J$ を満たせば、$\varphi_\Gamma(\chi_{j_0}) > 0$ を満たす $j_0 \in J$が存在する。従って、$\gamma'_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(j \in J)$ があって、$\Gamma \not\supset \Gamma_J$を満たす全ての$\Gamma \in \mathcal{F}$に対して、$\varphi_\Gamma(\sum_{j\in J} \gamma'_j \chi_j) \geq -\varphi_\Gamma(\beta_i)$ が成立する。よって、$\beta' := \beta_I + \sum_{j\in J} \gamma'_j \chi_j$と置けば、全ての$\Gamma \in \mathcal{F}$に対して、$\varphi_\Gamma(\beta') \geq 0$ が成立する。故に正規性より$\beta' \in \sum_{i=1}^{N} \mathbb{Z}_{\geq 0}\chi_i$ を得る。従って、$\beta_I \in \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\chi_i + \sum_{j\in J} \mathbb{Z}\chi_j$となり補題 2.1 より補題 2.2 が証明された。 ∎

次に、$[1, N]$ の部分集合 Kに対して次の条件 (F) を考える。

$$(F) \quad a \in L,\ a_i \geq 0\ (\forall i \in K) \Rightarrow a_i = 0\ (\forall i \in K)$$

(F) を満たす Kに対して、全てのχ_j $(j \notin K)$ で張られる凸包を$\Gamma(K)$ と書く。

補題 2.3 (cf. [S1]). (F) を満たす Kに対して$\Gamma(K)$ を対応させることにより、(F) を満たす $[1, N]$ の部分集合全体の集合と Q の面全体の集合が一対一に対応する。

定理 2.4. 今、$\Phi(\gamma, u) \neq 0$ と仮定する。この時、$\Phi(\gamma, u)$ が多項式になる必要十分条件は、錘 $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_J$が $\mathbb{R}_{\geq 0}Q$ の$\sharp J$次元の単体的面になっていることである。

証明: 先ず、$\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_J$が $\mathbb{R}_{\geq 0}Q$ の単体的面であると仮定する。$i \in I$を任意に固定しよう。 χ_i は Γ_Jに属さないので、χ_j $(j \in J)$ を全て含むようなファセッ

ト $\Gamma_i \in \mathcal{F}$ があって、$\varphi_{\Gamma_i}(\chi_i) > 0$ を満たす。今、 $a \in S$とする。 即ち、$a_i \geq -\gamma_i$ $(\forall i \in I)$ とする。すると$\sum_{k \in I} a_k \varphi_{\Gamma_i}(\chi_k) = 0$ だから

$$\varphi_{\Gamma_i}(\chi_i) a_i = - \sum_{k \in I - \{i\}} \varphi_{\Gamma_i}(\chi_k) a_k \leq \sum_{k \in I - \{i\}} \varphi_{\Gamma_i}(\chi_k) \gamma_k$$

となる。従って、

$$S = \{ a \in L \mid -\gamma_i \leq a_i \leq \varphi_{\Gamma_i}(\chi_i)^{-1} \sum_{k \in I - \{i\}} \varphi_{\Gamma_i}(\chi_k) \gamma_k \, (\forall i \in I) \}$$

である。また、$\{\chi_j \,|\, j \in J\}$ は線形独立で$\sum_{j \in J} a_j \chi_j = -\sum_{i \in I} a_i \chi_i$ だから、a_j $(j \in J)$ は a_i $(i \in I)$ から一意的に決る。従って、S は有限集合である。

次に、$\Phi(\gamma, u)$ が零でない多項式であると仮定する。即ち、Sが空でない有限集合であると仮定する。先ず、$b \in S$としよう。もし、$a^0 \in L$ が $a^0_i \geq 0$ $(\forall i \in I)$ を満たせば、明らかに $b + ma^0 \in S$ $(\forall m \in \mathbb{Z})$ となる。Sが有限集合であるから、$a^0 = 0$ でなくてはならない。これは $\{\chi_j \,|\, j \in J\}$ が線形独立であって、Iが (F) を満たすことを意味する。 ∎

§3. シンメトリー代数

この節では、シンメトリー代数の定義とその構造定理について述べる。ワイル代数 Wを全ての$\square_a$ $(a \in L)$ で生成される左イデアルで割ったもの

を $H = H_{\mathcal{A}}$ と書く。次に、$\tilde{A} = \tilde{A}_{\mathcal{A}}$を

$$\tilde{A} := \{ P \in W \mid \Box_a P = \sum_{b \in L} P_{ab} \Box_b \quad (\forall a \in L, \exists P_{ab} \in W) \}$$

で定義する。明らかに、$\tilde{A}$ は結合的代数である。シンメトリー代数 $A = A_{\mathcal{A}}$ を

$$\begin{aligned} A :&= \tilde{A} / \tilde{A} \cap (\sum_{a \in L} W \Box_a) \\ &\xrightarrow{\sim} (\tilde{A} + \sum_{a \in L} W \Box_a) / \sum_{a \in L} W \Box_a \\ &\subset H \end{aligned}$$

で定義する。

定理 3.1 (cf. [S2]). 各 $\chi \in M$ を $\mathfrak{h} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$上に、線形に延長する。ウェイト$\chi \in M$に対して、ウェイト空間 A_χ を

$$A_\chi := \{ P \in A \mid [s, P] = \chi(s) P \quad (\forall s \in \mathfrak{h}) \}$$

で定義する。ここで、$[s, P] := sP - Ps$ と置いた。この時、シンメトリー代数のウェイト空間への分解

$$A = \bigoplus_{\chi \in M} A_\chi$$

がある。

定理 3.2 (cf. [**S2**]). 各ウェイト$\chi \in M$に対して、$E_\chi \in A_\chi$が定まり、ウェイト空間 A_χ は、

$$A_\chi = \mathbb{C}[s]E_\chi$$

と書ける。但し、$\mathbb{C}[s] = \mathbb{C}[s_1, \ldots, s_n]$ 及び $s_i = \sum_{j=1}^{N} \chi_j(s_i) u_j D_j \ (\forall i)$ とした。

定理 3.3 (cf. [**S2**]). ウェイト$\chi, \chi' \in M$に対して、

$$E_\chi E_{\chi'} = q_{\chi,\chi'}(s) E_{\chi+\chi'}$$

が成立する。但し、

$$\begin{aligned} q_{\chi,\chi'}(s) & \\ := & \prod_{\varphi_\Gamma(\chi)<0, \varphi_\Gamma(\chi')>0} \ \prod_{m=\varphi_\Gamma(\chi)}^{\min\{\varphi_\Gamma(\chi+\chi'),0\}-1} (\varphi_\Gamma - m) \\ & \times \prod_{\varphi_\Gamma(\chi)>0, \varphi_\Gamma(\chi')<0} \ \prod_{m=\max\{\varphi_\Gamma(\chi+\chi'),0\}}^{\varphi_\Gamma(\chi)-1} (\varphi_\Gamma - m) \end{aligned}$$

である。

§4. $\mathcal{A}$-超幾何級数で生成される有限次元表現

この節では、シンメトリー部分代数の形式的 $\mathcal{A}$-超幾何級数によって生成される表現が有限次元になるための条件を考える。

補題 4.1. $\lambda=(\lambda_j)_{j=1}^N\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ に対して

$$E_{-\lambda\chi}\Phi(\gamma,u)=\Phi(\gamma-\lambda,u)$$

が成り立つ。

証明: この場合、$E_{-\lambda\chi}=D_1^{\lambda_1}\cdots D_N^{\lambda_N}$ であるので明らか。 ∎

定理 4.2. $\lambda=(\lambda_j)_{j=1}^N\in\mathbb{Z}^N$ に対して

$$E_{\lambda\chi}\Phi(\gamma,u)=b_{\lambda\chi}(\beta+\lambda\chi)\Phi(\gamma+\lambda,u)$$

が成り立つ。但し、$b_{\lambda\chi}(s)=\prod_{\varphi_\Gamma(\lambda\chi)>0}\prod_{m=0}^{\varphi_\Gamma(\lambda\chi)-1}(\varphi_\Gamma-m)$ である。

証明: $\lambda_+,\lambda_-\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ を $\lambda_{+j}=\max\{\lambda_j,0\}$, $\lambda_{-j}=\max\{-\lambda_j,0\}$ $(\forall j)$ で定義する。明らかに $\lambda=\lambda_+-\lambda_-$ である。[S2] の Proposition 2.7 (1) により $b_{\lambda\chi}(s)E_{-(\lambda_-)\chi}=E_{\lambda\chi}E_{-(\lambda_+)\chi}$ である。従って、補題 4.1 により

$$\begin{aligned}E_{\lambda\chi}\Phi(\gamma,u)&=E_{\lambda\chi}E_{-(\lambda_+)\chi}\Phi(\gamma+\lambda_+,u)\\&=b_{\lambda\chi}(s)E_{-(\lambda_-)\chi}\Phi(\gamma+\lambda_+,u)\\&=b_{\lambda\chi}(s)\Phi(\gamma+\lambda,u)\\&=b_{\lambda\chi}(\beta+\lambda\chi)\Phi(\gamma+\lambda,u)\end{aligned}$$

である。 ∎

系 4.3. $\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{N} \in \mathbb{Z}^N$とし、$\Phi(\gamma+\lambda, u) \neq 0$ と仮定する。この時、$E_{\lambda\chi}\Phi(\gamma, u) = 0$ となる必要十分条件はファセット$\Gamma \in \mathcal{F}$ が存在し、$\varphi_\Gamma(\beta) \in \mathbb{Z}$, $\varphi_\Gamma(\lambda\chi) > 0$, 及び$-\varphi_\Gamma(\lambda\chi) \leq \varphi_\Gamma(\beta) \leq -1$ が成り立つことである。

証明: $b_\chi(s) = \prod_{\varphi_\Gamma(\chi)>0} \prod_{m=0}^{\varphi_\Gamma(\chi)-1}(\varphi_\Gamma - m)$ だから、系 4.3 は定理 4.2 より従う。 ∎

集合 $\mathcal{F}$ の部分集合 $F_1(\gamma)$, $F_2(\gamma)$ 及び $F(\gamma)$ を

$$F_1(\gamma) := \{\Gamma \in \mathcal{F} \,|\, \Gamma \supset \Gamma_J\},$$

$$F_2(\gamma) := \{\Gamma \in \mathcal{F} \,|\, \Gamma \not\supset \Gamma_J, \varphi_\Gamma(\beta) \in \mathbb{Z}_{\leq -1}\},$$

及び $F(\gamma) := F_1(\gamma) \cup F_2(\gamma)$ で定義する。更に、錘 C_γ を

$$C_\gamma := \left\{ \chi \in M_\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_\Gamma(\chi) \geq 0 \ (\forall\Gamma \in F_1(\gamma)) \\ \\ \varphi_\Gamma(\chi) \leq 0 \ (\forall\Gamma \in F_2(\gamma)) \end{array} \right\}$$

で定義する。また、C を $M_\mathbb{R}$内の任意の錘とし、$M' := M \cap C$と置く。次に、M'の部分集合$\Lambda_{M'}(\gamma)$を

$$\Lambda_{M'}(\gamma) := \left\{ \chi \in M' \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_\Gamma(\chi) \geq -\varphi_\Gamma(\beta) \ (\forall\Gamma \in F_1(\gamma)) \\ \\ \varphi_\Gamma(\chi) < -\varphi_\Gamma(\beta) \ (\forall\Gamma \in F_2(\gamma)) \end{array} \right\}$$

で定義する。

注意: $\chi \in M$とし、$\Phi(\gamma, u) \neq 0$ と仮定する。この時、系 4.3 は、$E_\chi\Phi(\gamma, u) \neq 0$

となる必要十分条件は$\chi \in \Lambda_M(\gamma)$となることである、と言い換えられる。

次の補題は線形代数の易しい演習問題である。

補題 4.4. $M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ の元χ_0 が存在して$\varphi_\Gamma(\chi_0) = \varphi_\Gamma(\beta)$ $(\forall\Gamma \in F(\gamma))$ が成り立つ。

定理 4.5. $\Phi(\gamma, u) \neq 0$ と仮定した時、次は同値。(1) $\sharp\Lambda_{M'}(\gamma) < \infty$。

(2) $\sharp(C_\gamma \cap (\chi + M')) < \infty$ $(\forall\chi \in M_{\mathbb{Q}})$。

(3) $C_\gamma \cap M' = \{0\}$。

証明: $\chi_0 \in M_{\mathbb{Q}}$ を補題 4.4 におけるものとする。この時、$\Lambda_{M'}(\gamma) \subset (M' \cap (-\chi_0 + C_\gamma)) \xrightarrow{\sim} (C_\gamma \cap (\chi_0 + M'))$ だから、(2) $\Rightarrow$ (1) は明らか。

仮定 $\Phi(\gamma, u) \neq 0$ より $0 \in \Lambda_{M'}(\gamma)$である。$\chi \in C_\gamma \cap M'$ と $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $m\chi = 0 + m\chi \in \Lambda_{M'}(\gamma)$ が成り立つ。従って、(1) $\Rightarrow$ (3) を得る。

最後に、(3) を仮定する。部分集合 $P \subset F(\gamma)$ に対して、

$$M'_P := \left\{ \chi' \in M' \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_\Gamma(\chi') \geq 0 \ (\forall\Gamma \in P) \\ \\ \varphi_\Gamma(\chi') \leq 0 \ (\forall\Gamma \in F(\gamma) - P) \end{array} \right\}$$

と置く。この時、$M' = \cup_{P \subset F(\gamma)} M'_P$である。(2) を云うためには$\sharp(C_\gamma \cap (\chi + M'_P)) < \infty$ $(\forall\chi \in M_{\mathbb{Q}}, \forall P \subset F(\gamma))$ を示せばよい。$\chi \in M_{\mathbb{Q}}$ と $P \subset F(\gamma)$ を任意に固定する。もし、$\chi' \in M'_P - \{0\}$ ならば、(3) により$\varphi_\Gamma(\chi') < 0$ とな

るファセット $\Gamma \in F_1(\gamma)$ が存在するか、または $\varphi_\Gamma(\chi') > 0$ となるファセット $\Gamma \in F_2(\gamma)$ が存在する。いずれの場合も $\chi + m\chi' \notin C_\gamma$ $(\forall m > |\varphi_\Gamma(\chi)|/|\varphi_\Gamma(\chi')|)$ となるファセット $\Gamma \in F(\gamma)$ が存在する。Gordan の補題より M'_P は有限生成半群であるから $\sharp(C_\gamma \cap (\chi + M'_P)) < \infty$ が判る。 ∎

系 4.6. $\sharp\Lambda_M(\gamma) = \infty$。

証明: 明らかに C_γ は n 次元の錘である。従って、$C_\gamma \cap M \neq \{0\}$ であるから定理 4.5 より従う。 ∎

$A_{M'}$ を全ての E_χ $(\chi \in M')$ と $A_0 = \mathbb{C}[s]$ で生成される A の部分代数とする。明らかに $\Phi_\gamma := \oplus_{\chi \in \mathbb{Z}^N/L \xrightarrow{\sim} M} \mathbb{C}\Phi(\gamma + \chi, u)$ は A-加群である。次の命題は、系 4.3 の後の注意から明らかである。

命題 4.7. $\Phi(\gamma, u) \neq 0$ と仮定する。この時、$\Phi(\gamma, u)$ で生成される Φ_γ の $A_{M'}$-部分加群のウェイトの集合は $\beta + \Lambda_{M'}(\gamma)$ である。

系 4.8. $\Phi(\gamma, u) \neq 0$ と仮定する。この時、$\Phi(\gamma, u)$ で生成される Φ_γ の $A_{M'}$-部分加群が有限次元になるための必要十分条件は $C_\gamma \cap M' = \{0\}$ である。

例 4.9: M を A_n 型 $(n \geq 3)$ のルート格子とする。即ち、$M = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$ である。ここで $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は単純ルート全体の集合とする。今、p $(1 < p < n)$ を固定して、$\mathcal{A} := \{\sum_{k=l}^m \alpha_k \,|\, l \leq p \leq m\}$ と置く。また、$\{s_1, \ldots, s_n\}$ を

$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ の双対基底とする。この時、

$$\{\varphi_\Gamma \mid \Gamma \in \mathcal{F}\}$$
$$=\{s_1, s_{i+1}-s_i\ (1\le i\le p-1), s_i - s_{i+1}\ (p\le i\le n-1), s_n\}$$

である。さて、$l\le p\le m$ となる l,m に対して $\alpha_{lm} := \sum_{i=l}^{m}\alpha_i$ 、$m\ge p$ となる m と $l,l'\le p$ を満たす相異なる l,l' に対して $\alpha_{ll'} := \alpha_{lm}-\alpha_{l'm}$、$l\le p$ となる l と $m,m'\ge p$ を満たす相異なる m,m' に対して $\alpha_{m'm} := \alpha_{lm}-\alpha_{lm'}$ とそれぞれ置く。すると、

$$R=\{\pm\alpha_{lm}, \alpha_{ll'}, \alpha_{m'm} \mid l\le p\le m,\ l\ne l'\le p,\ m\ne m'\ge p\}$$

がルート系である。$A_{p-1}\times A_{n-p}$ 型の部分ルート系 R' を

$$R' := \{\alpha_{ll'},\ \alpha_{m'm} \mid l\ne l'\le p,\ m\ne m'\ge p\}$$

で定義する。この時、R'のルート格子は $M(R') = \bigoplus_{i\ne p}\mathbb{Z}\alpha_i$ である。$\gamma = (\gamma_{lm})_{l\le p\le m} \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^{p(n-p+1)}$、$M' = M(R') = \bigoplus_{i\ne p}\mathbb{Z}\alpha_i$と置く。この時、$F_1(\gamma)=\mathcal{F}$であって

$$C_\gamma = \{\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i \mid 0\le\mu_1\le\cdots\le\mu_p\ge\cdots\ge\mu_n\ge 0\}$$

が成り立つ。従って、$C_\gamma\cap M'=\{0\}$ である。$A_{M'}$は R'をルート系にもつ半

単純リー環 $\mathfrak{g}(R')_{ss}$ の (普遍でない) 包絡環だから、系 4.8 より多項式$\Phi(\gamma, u)$ は最高ウェイトが $(\sum_{l\leq p\leq m}\gamma_{lm})\omega_1 + (\sum_{l\leq p\leq m}\gamma_{lm})\omega_n$ である有限次元既約 $\mathfrak{g}(R')_{ss}$-加群を生成する。ここで、$\omega_j \in \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}} M'$ $(1 \leq j \leq n,\ j \neq p)$ は $\omega_j(-s_{i-1} + 2s_i - s_{i+1}) = \delta_{ij}$ $(\forall i, j \neq p)$ なるものとする。

例 4.10: M を C_n 型 $(n \geq 2)$ のルート格子とする。即ち、$M = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$である。ここで、$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ は単純ルート全体の集合でα_n が長いルートとする。今、$\mathcal{A} := \{\sum_{k=i}^{j-1}\alpha_k + 2\sum_{k=j}^{n-1}\alpha_k + \alpha_n \,|\, l \leq i \leq j \leq n\}$ と置く。また、$\{s_1, \dots, s_n\}$ を $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ の双対基底とする。この時、

$$\{\varphi_\Gamma \,|\, \Gamma \in \mathcal{F}\} = \{s_1, s_{i+1} - s_i\ (1 \leq i \leq n-2), 2s_n - s_{n-1}\}$$

が成り立つ。$i \leq j$なる i, j に対して$\chi_{ij} := \sum_{i\leq k<j}\alpha_k + 2\sum_{j\leq k<n}\alpha_k + \alpha_n$ と置き、$i < j$なる i, j に対して$\lambda_{ij} := \chi_{ij} - \chi_{jj}$ と置く。すると、

$$R = \{\pm\alpha_{ij} \quad (i \leq j), \pm\lambda_{ij} \quad (i < j)\}$$

がルート系である。A_{n-1} 型の部分ルート系 R' を $R' := \{\pm\lambda_{ij} \,|\, i < j\}$ で定義する。この時、R'のルート格子は $M(R') = \bigoplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}\alpha_i$ である。$\gamma = (\gamma_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n(n+1)/2}$、$M' = M(R') = \bigoplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}\alpha_i$ と置く。この時、

$F_1(\gamma) = \mathcal{F}$であって、

$$C_\gamma = \{\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i \,|\, 0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{n-1} \leq 2\mu_n\}$$

が成り立つ。$A_{M'}$は R'をルート系にもつ半単純リー環 $\mathfrak{g}(R')_{s,s}$ の (普遍でない) 包絡環だから、系 4.8 より多項式$\Phi(\gamma, u)$ は最高ウェイトが $2(\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \gamma_{ij})\omega_1$ の有限次元既約 $\mathfrak{g}(R')_{s,s}$-加群を生成する。ここで、$\omega_j \in \mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}} M'$ $(1 \leq j \leq n-1)$ は$\omega_j(-s'_{i-1} + 2s'_i - s'_{i+1}) = \delta_{ij}$ $(1 \leq \forall i, j \leq n-1)$ を満たすものとする。ただし、$s'_0 = 0$ 、 $s'_n = 2s_n$、$s'_i = s_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ と置いた。

文献

[GGZ] I. M. GELFAND, M. I. GRAEV AND A. V. ZELEVINSKY, Holonomic system of equations and series of hypergeometric type, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **295** (1987), 14–19; English translation, *Soviet Math. Dokl.* **36** (1988), 5–10.

[Hr] J. HRABOWSKI, Multiple hypergeometric functions and simple Lie algebras *SL* and *Sp*, *SIAM J. Math. Anal.* **16** (1985), 876–886.

[S1] M. SAITO, Parameter shift in normal generalized hypergeometric systems, *Tôhoku Math. J* **44** (1992), 523–534.

[S2] M. SAITO, Symmetry algebras of normal $\mathcal{A}$-hypergeometric systems, preprint.