数理解析研究所講究録
第857巻 1994年 63-80

Painlevé方程式の古典解

名大教養　梅村　浩 (Hiroshi Umemura)

特殊関数に関する標準的な本であるWhittaker-WatsonのModern analysis (1902, …)には次の関数が扱われている.

(0) Gamma関数, Riemann ζ関数;

(1) 超幾何関数およびその合流(Bessel関数等);

(2) 楕円関数, Theta関数.

我々は代数微分方程式に関心があるので, (0)の族はここでは考察の対象から外す. (1)の族は2階線形常微分方程式の解であり, (2)の族は楕円曲線と関係している。両者の間には深い関係があることがGauß以来知られている。

即ち,超幾何級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \cdots$$

は超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\frac{du}{dx} - \alpha\beta u = 0$$

の解である。一方λをパラメータとする楕円曲線$y^2 = z(z-1)(1-\lambda z)$

の周期 $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(1-\lambda z)}} = u(\lambda)$ を考えると，$u(x)$ は $\alpha=\beta=\frac{1}{2}, \gamma=1$ とした超幾何微分方程式をみたす。

次のような全く別の見方もできる。(1)の族も(2)の族もPainlevé方程式を通じて同じ枠組の中に入る。つまり(1)の族の関数も(2)の族の関数もPainlevé方程式の特別な場合の解と考えられる。(1)の族の微分Galois群は線形代数群であり，(2)の族においては，楕円曲線であるが，両者はPainlevé方程式のGalois群(=無限次元)を媒介として結ばれていると考えられる。

具体的には，Painlevéの第1方程式 $y''=6y^2+x$ は，$y''=6y^2+ax-g_2$ $(a, g_2 \in \mathbb{C})$ と同値であり，ここで $a=0$ とすれば $y''=6y^2-g_2$。これはWeierstraßの$\wp$関数 $\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$ によって解ける。このようにして，(2)の族はPainlevé方程式に含まれる。超幾何級数 の仲間とPainlevé方程式については§3，および最後の表参照。

Painlevé方程式を通して(1)と(2)の族を結びつけることは，自然であり本質的なことと思れる。

§1 古典関数（[U1], [U2] 参照）

古典関数の定義は前世紀から存在したが，解りやすいものではなかった。現代的には次のようにやる．

有理関数体$\mathbb{C}(x)$から出発して，次の許される操作を有限回くり返して得られる関数を古典関数という。

許される操作

(1) 加減乗除，および微分 d/dx；

(2) 線形常微分方程式を解く；

(3) アーベル関数に代入する。

(2)より，代数方程式が許される操作で解けることが分り，特に代数関数は古典関数となる。これらの操作は代数群と関係しており，理論的な意味を持っていることは[U1], [U2]で示した。

§2 Painlevé の第2方程式 P_{II} の古典解

Painlevé方程式は6個の微分方程式 $P_I, P_{II}, \cdots, P_{VI}$ から成っており，次のようにP_{VI}を順次特殊化することにより得られる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & P_{IV} & & & & \\
P_{VI} \longrightarrow P_V & \nearrow \atop \searrow & & \searrow \atop \nearrow & P_{II} & \longrightarrow & P_I . \\
 & & P_{III} & & & &
\end{array}
$$

典型的な場合であるP_{II}について古典解がどのように現わ

れるかを説明する。

Painlevé の第2方程式 $P_{11}(\alpha)$ $d^2q/dx^2 = 2q^3 + xq + \alpha$ (α は複素パラメータ) は，次の連立方程式系と同値である([O1]参照).

$$S_{11}(\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{dq}{dx} = p - q^2 - \dfrac{x}{2}, \\ \dfrac{dp}{dx} = 2pq + \alpha + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

実際，$S_{11}(\alpha)$ より p を消去して $P_{11}(\alpha)$ が得られる。複素パラメータ α の次の変換を考える;

$$i(\alpha) = -\alpha, \quad t_+(\alpha) = \alpha + 1, \quad t_-(\alpha) = \alpha - 1.$$

t_+, t_- は $\mathbb{Z}$ と同型な群を生成し，$\langle i, t_+, t_- \rangle = \langle t_+, t_- \rangle \rtimes \langle i \rangle \simeq \mathbb{Z} \rtimes S_2$ となる。この群はアフィンルート系 $\hat{A}_1$ の Weyl 群に他ならない。各パラメータ α に対して，P_α, Q_α を $\mathbb{C}(x)$ 上の不定元とする。体の $\mathbb{C}(x)$-準同型写像 $T^*_{\alpha,\alpha-1} : \mathbb{C}(x)(P_{\alpha-1}, Q_{\alpha-1}) \to \mathbb{C}(x)(P_\alpha, Q_\alpha)$ を

$$T^*_{\alpha,\alpha-1}(Q_{\alpha-1}) = -Q_\alpha + \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{P_\alpha - 2Q_\alpha^2 - x},$$

$$T^*_{\alpha,\alpha-1}(P_{\alpha-1}) = -P_\alpha + 2Q_\alpha^2 + x$$

により定義する。同様に体の $\mathbb{C}(x)$-準同型写像 $T^*_{\alpha,\alpha+1} : \mathbb{C}(x)(P_{\alpha+1}, Q_{\alpha+1}) \to \mathbb{C}(x)(P_\alpha, Q_\alpha)$ を

$$T^*_{\alpha,\alpha+1}(Q_{\alpha+1}) = -Q_\alpha - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{P_\alpha}$$

$$T^*_{\alpha,\alpha+1}(P_{\alpha+1}) = -P_\alpha + 2\left(Q_\alpha + \frac{\alpha+\frac{1}{2}}{P_\alpha}\right)^2 + \alpha$$

により定義する。さらに$\mathbb{C}(\alpha)$-準同型写像$I^*_{\alpha,-\alpha}:\mathbb{C}(\alpha)(P_{-\alpha},Q_{-\alpha})$
$\to\mathbb{C}(\alpha)(P_\alpha,Q_\alpha)$

$$I^*_{\alpha,-\alpha}(Q_{-\alpha}) = Q_\alpha + \frac{\alpha+\frac{1}{2}}{P_\alpha},\quad I^*_{\alpha,-\alpha}(P_{-\alpha}) = P_\alpha$$

を導入しておく。定義より

$$T^*_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(Q_{-\frac{1}{2}}) = -Q_{\frac{1}{2}},\quad T^*_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(P_{-\frac{1}{2}}) = -P_{\frac{1}{2}} + 2Q_{\frac{1}{2}}^2 + \alpha,$$

$$I^*_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(Q_{\frac{1}{2}}) = Q_{-\frac{1}{2}},\quad I^*_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(P_{\frac{1}{2}}) = P_{-\frac{1}{2}},$$

であることに注意しておく。

$$T^*_{\alpha,\alpha-1}\circ T^*_{\alpha-1,\alpha} = Id,\quad T^*_{\alpha-1,\alpha}\circ T^*_{\alpha,\alpha-1} = Id,\quad I^*_{\alpha,-\alpha}\circ$$

$I^*_{-\alpha,\alpha} = Id$, $I^*_{\alpha,-\alpha}\circ T^*_{-\alpha,-\alpha+1}\circ I^*_{-\alpha+1,\alpha-1} = T^*_{\alpha,\alpha-1}$ であることが示せる。

体の$\mathbb{C}(\alpha)$-準同型写像$T^*_{\alpha,\alpha-1}:\mathbb{C}(\alpha)(P_{\alpha-1},Q_{\alpha-1})\to\mathbb{C}(\alpha)(P_\alpha,$
$Q_\alpha)$はアフィン平面の有理写像

$$T_{\alpha,\alpha-1}:\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}(\alpha)[P_\alpha,Q_\alpha]\cdots\to\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}(\alpha)[P_{\alpha-1},Q_{\alpha-1}]$$

を定義する。同様にして、有理写像$T_{\alpha,\alpha+1}$, $T_{\alpha,-\alpha}$が定義される。これらは双有理写像である。

さて (p_α, q_α) が $S_{II}(\alpha)$ の解であるとすると、有理写像 $T_{\alpha,\alpha+1}$ は点 (p_α, q_α) で定義され、$T_{\alpha,\alpha+1}(p_\alpha, q_\alpha)$ は $S_{II}(\alpha-1)$ の解であることが示せる。$T_{\alpha,\alpha-1}$, $T_{\alpha,-\alpha}$ についても同様に点 (p_α, q_α) で定義され、$T_{\alpha,\alpha-1}(p_\alpha, q_\alpha)$, $T_{\alpha,-\alpha}(p_\alpha, q_\alpha)$ は各々 $S_{II}(\alpha-1)$, $S_{II}(-\alpha)$ の解となる。

以上のことにより、方程式系 $S_{II}(\alpha)$ の研究は、ルート系 $\hat{A}_1$ のアフィンWeyl群の $\mathbb{C}$ への作用の基本領域 $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\,\alpha \le 0\}$ 内に α が含まれる場合に帰着できる。

次の定理が証明できる。

定理　(1) $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、方程式 $P_{II}(\alpha)$ には唯一つの代数解がある。(2) $\alpha \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ のとき、Painlevé方程式 $P_{II}(\alpha)$ にはRiccati方程式 $y' = -y^2 - \frac{x}{2}$ の解で書ける（1-パラメータ）解が存在する。(3) それ以外の解は古典的でない。

他のPainlevé方程式についても、上の定理の類似を証明することが究極の目的であるが、これに関する最近の進展について述べる。このノートの終りに、各Painlevé方程式についてパラメータ空間、Weyl群、Wall上に出現する古典特殊関数、代数解として現れる特殊多項式を表にしておいた。この問題は次の古典的な結果を含んでいることを注意しておく。

Painlevéの予想－西岡の定理　Painlevéの第1方程式 $y''=6y^2+x$ の解は全て非古典的である([N]).

Schwarzの結果　超幾何微分方程式の全ての解が代数的となるようなパラメータ α, β, γ の決定([S]).

§3 解析のプロセス

第2方程式で説明する。方程式系 $S_{II}(\alpha)$ を考える。p, q を不定元とする。微分

$$X(\alpha)=\frac{\partial}{\partial x}+\left(p-q^2-\frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial q}+\left(2pq+\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial p}:\mathbb{C}(x,p,q)\to\mathbb{C}(x,p,q)$$

を考える。K を微分体 $(\mathbb{C}(x), d/dx)$ の微分拡大，δ を K の微分とする。微分

$$X(\alpha):\mathbb{C}(x,p,q)\to\mathbb{C}(x,p,q)$$

は微分

$$\delta+\left(p-q^2-\frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial q}+\left(2pq+\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial p}:K(p,q)\to K(p,q)$$

に延長される。この微分も同じ記号 $X(\alpha)$ で表すことにする。

多項式環 $K[p,q]$ のイデアル I が次の条件をみたすとき，I は $X(\alpha)$-不変であるという：任意の $f\in I$ について，$X(\alpha)f\in I$ となる。単項イデアル (F) が $X(\alpha)$-不変のとき，多項式 $F\in K[p,q]$ は $X(\alpha)$-不変であるという。これは，$X(\alpha)F=GF$

となる多項式 $G \in K[p, q]$ が存在することと同値である．定数でない（つまり，$F(0,0) \neq F(p, q)$ である）不変多項式 $F(p, q)$ の0点 $V(F) \subset \operatorname{Spec} K[p, q]$ を $\operatorname{Spec} K[p, q]$ の $X(\alpha)$-不変曲線とよぶ。

幾何学的には，$X(\alpha)$ はアフィン平面 $\operatorname{Spec} K[p, q]$ 上のベクトル場を定義し，ベクトル場 $X(\alpha)$ は不変曲線 $F=0$ に沿って流れていることを意味している。

定理1の証明は次のように進行する．

I 不変曲線の存在するための，α についての必要条件を求める。

もっと正確に言えば，$(\mathbb{C}(x), d/dx)$ の微分拡大体 K が存在して，$X(\alpha)$-不変曲線が $\operatorname{Spec} K[p, q]$ 上に存在するための，α についての必要条件を求める．

答 $-\frac{1}{2} < \alpha \leq 0$ なら $X(\alpha)$-不変曲線は存在しない。

この結果を方程式 $P_{II}(\alpha)$ の解の性質と結びつけるのに，次の定理を使う（[U1] 参照）.

定理 $X(\alpha)$-不変曲線が存在しなければ，その α について方程式系 $S_{II}(\alpha)$ の任意の解は，代数的であるか非古典的であ

ろ。($p(x)$, $q(x)$ がともに $\mathbb{C}(x)$ 上代数的である解を代数解といい，$p(x)$, $q(x)$ がともに古典的である解を古典解という。従って非古典解とは，$p(x)$, $q(x)$ のいずれかが非古典的となる解のことである。)

この定理により，$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha\leq 0$ かつ $\alpha\neq-\frac{1}{2}$ ならば微分方程式系 $S_{11}(\alpha)$ の解は非古典的である。但し代数解を除く。

$\{\alpha \mid -\frac{1}{2}\leq \mathrm{Re}\,\alpha\leq 0\}$ がアフィン Weyl 群の基本領域であることから，次の結論を得る。

結論　$\alpha\notin\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ であれば，$S_{11}(\alpha)$ の任意の解は非古典的。但し，代数解を除く。

Ⅱ　不変曲線を決定する．

Ⅰより不変曲線が存在する可能性のあるのは，$\alpha\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ の場合に限る．$\alpha=-\frac{1}{2}$ のとき，$p=0$ が不変曲線であり，この場合不変曲線は $p=0$ に限ることが示される。これより $\alpha=-\frac{1}{2}$ ならば $S_2(\alpha)$ の古典解は $q'=-q^2-\frac{t}{2}$，$p=0$ に限ることが証明できる。Weyl 群の作用を使って次の結論を得る。

結論　$\alpha\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ のときの古典解が決定される，但し代数解を除く．

Ⅲ　代数解を決定する。

Ⅰ, Ⅱ は同じ枠組の内で扱えるが，Ⅲ はやや性格が異なる。

§4 これまで知られていた結果と新しい結果

第1方程式 P_{I} については，Ⅰ, Ⅲ のみで解析が終り §2 で述べた Painlevé－西岡の定理が証明できる(西岡[N], 梅村[U1]).

第2方程式 P_{II} については，Ⅰ, Ⅱ は野海[No]による。Ⅲ はそれ以前に村田[M]によって行われた.

第4方程式 P_{IV} については，Ⅰ およびⅡの一部が岡本[O2]によってなされた。村田は[M1]において代数解を決定した。

第3方程式 P_{III} となると難しさが一段増すが，Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ は村田によってなされた[M2]。その方法は，P_{II}, P_{IV} の場合も含めて，直接に計算をするものであり，そのまま P_{V}, P_{VI} に適用するのは困難であった.

1992年の春から，渡辺文彦とともに P_{V}, P_{VI} を分析するために，P_{II}, P_{IV} についての既知の結果の証明をできるだけ単純な原理に還元するように努力した。その結果，P_{II}, P_{IV}, P_{III} についての上記の結果の証明が簡略化され，P_{V}, P_{VI} について Ⅰ の過程（現在整理中であるが，多分 Ⅱ の過程も）を完遂することに成功した([UW1,2], [W]).

以上，日本人の名前のみ挙げたが，その前に旧ソ連の数

学者Yablonskii, Vorob'ev, Lukashevich, Gromak フランスのAiraultの貢献があったことを忘れてはならない.

§5 我々の方法による分析

我々の方法を使うと, §3の分析が如何に進行するか, P_{II} を使って説明する. 都により過程Iに限定する。我々の方法の特徴は, 次の2点にある: (1) ベクトル空間の自然でない基底は使用しない; (2) できる限り計算を避けるようにする。ベクトル空間に自然な基底が存在しなければ, coordinate free に議論を進めることを(1)は意味する. P_V, P_{VI} では計算が大変になるのは予想されるので, (2)が必要となる。

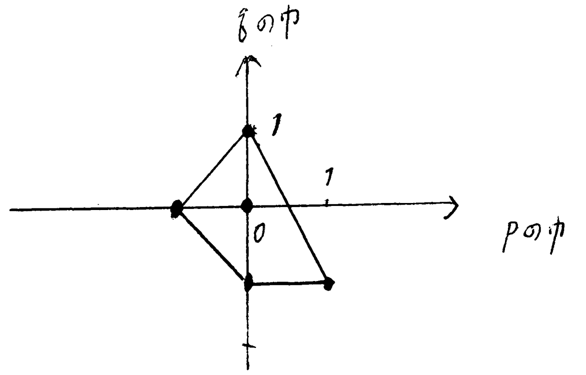
§3の記号を用いて, 定数でない多項式 $F \in K[p, q]$ (Kは$\mathbb{C}(x)$の微分拡大体) が $X(\alpha)$-不変であるとする. つまり

$$(5.1) \qquad X(\alpha)F = GF$$

となる多項式 $G \in K[p, q]$ が存在するとする。$\partial/\partial q$ を q^{-1}, $\partial/\partial p$ を p^{-1} に置きかえて微分

$$X(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x} + \left(p - q^2 - \frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial q} + \left(2pq + \alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial p}$$

のNewton多角形を書くと, 次のようになる.



等式(5.1)はpの巾, qの巾に関する2次元(=2方向)の情報を含んでいる。2次元では扱いにくいので1次元化して, (5.1)よりFに関する有用な情報を引き出す。つまりp, qに重みをつける。上のNewton多角形に傾き$-\frac{1}{2}$の線分が現れることより, pの重さを2, qの重さを1とする。これにより$K[p,q]$が次数付環となる:

$$K[p,q]=\bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d ,$$

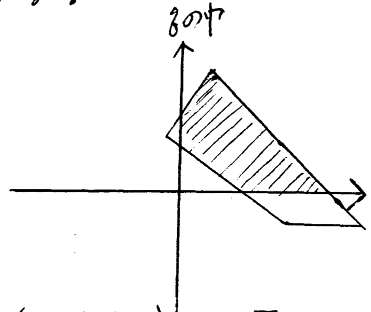
($R_d=0$および重さdの多項式のなすK-ベクトル空間). この分解に対応して, 微分 $X(\alpha): K[p,q]\to K[p,q]$ も斉次作用素に分解される:

$$X(\alpha)=X_1+X_0+X_{-1}+X_{-2},$$

ここで $X_1=(p-q^2)\partial/\partial p$, $X_0=\partial/\partial x$, $X_{-1}=-x/2\cdot\partial/\partial q$, $X_{-2}=(\alpha+\frac{1}{2})\partial/\partial p$ である。X_i $(-2\leq i\leq 1)$ は重さiの作用素である。つまり $X_i(R_d)\subset R_{d+i}$ が任意の$d\in\mathbb{N}$について成り立つ.

注意 $X(\alpha)$のNewton多角形より, FのNewton多角形を求めることができる. FのNewton多角形は$X(\alpha)$に出現する辺と

平行な辺で囲まれた4辺形と第1象限の共通部分となることが示せる。但し退化した場合もありうる。
左図参照.



Fを斉次分解する;

$F = F_m + F_{m-1} + \cdots + F_0$, $F \in R_d$ $(0 \le d \le m)$, $F_m \ne 0$.

等式(5.1)は

(5.2) $$(X_1 + X_0 + X_{-1} + X_{-2})(F_m + F_{m-1} + \cdots + F_0) = G(F_m + F_{m-1} + \cdots + F_0)$$

と書ける。これより $G \in R_1 + R_0$ が結論できる. $G = g_1 q + g_0$ $g_1, g_0 \in K$ と書ける。これを(5.2)に代入して, 両辺の同じ次数の項を比較すると

(5.3) $$X_1 F_d = g_1 q F_d + g_0 F_{d+1} - X_0 F_{d+1} - X_{-1} F_{d+2} - X_{-2} F_{d+3},$$
$$-3 \le d \le m$$

を得る。ここで, $F_{m+3} = F_{m+2} = F_{m+1} = 0$, $F_{-1} = F_{-2} = F_{-3} = 0$ とする。 (5.2)と(5.3)は同値である.

K-algebra 準同型 $\varphi : K[p, q] \longrightarrow K[T]$ を $\varphi(q) = T$, $\varphi(p) = 2T^2$ により定義する. 次の図式は可換になる.

$$
(5.4)\qquad
\begin{tikzcd}
K[p,q] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "X_1"'] & K[T] \arrow[d, "T^2\frac{d}{dT}"] \\
K[p,q] \arrow[r, "\varphi"] & K[T]
\end{tikzcd}
$$

従って, $\operatorname{Ker}\varphi = (2q^2-p)$ は X_1-不変である。実際 $X_1(2q^2-p)$ $= -2q(2q^2-p)$ となる。

次に K-代数準同型 $\psi: K[p,q] \to K[T]$ を $\psi(q)=T$, $\psi(p)=0$ によって定義すると, 次の図式は可換となる;

$$
(5.5)\qquad
\begin{tikzcd}
K[p,q] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "X_1"'] & K[T] \arrow[d, "-T^2\frac{d}{dT}"] \\
K[p,q] \arrow[r, "\psi"] & K[T]
\end{tikzcd}
$$

従って, $\operatorname{Ker}\psi = (p)$ は X_1-不変となる。実際 $X_1(p) = 2qp$ が成立する。

注意　(5.4), (5.5) は次の図式を可換にする斉次K-代数準同型全体Φに他ならない;

$$
\begin{tikzcd}
K[p,q] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "X_1"'] & K[T] \arrow[d, "T^2\frac{d}{dT}"] \\
K[p,q] \arrow[r, "\Phi"'] & K[T]
\end{tikzcd}
$$

可換図式 (5.4), (5.5) が我々を計算から解放する。

可換図式(5.4), (5.5)を使って，数学的帰納法により，次の2つの補題が証明できる．

補題　d, k, l を整数とし $d \geq 0$，$1 \leq l \leq k$ をみたすとする。A を R_d に属する多項式とし，$\mu' \in K$ とする．$1 \leq l' \leq l$ なる任意の整数 l' に対して $\mu' - d + 4l' - 4 \neq 0$ でありかつ A が合同式 $X_1 A \equiv \mu' q A \mod (2q^2 - p)^k$ をみたすならば，$A \equiv 0 \mod (2q^2 - p)^l$ である。

補題　d, k, l, A, μ' を上と同様とする．$1 \leq l' \leq l$ なる任意の整数 l' について $\mu' + d - 4l' + 4 \neq 0$ が成立しかつ A が合同式 $X_1 A \equiv \mu' q A \mod p^k$ をみたすならば，$A \equiv 0 \mod p^l$ である．

これら2つの補題を用いて，漸化式(5.3)を研究する．

$d = m$ のとき，(5.3)は

$$X_1 F_m = g_1 q F_m$$

となる．上の補題のみを用いて，$F_m = c p^i (2q^2 - p)^j$ $(c \in K)$，$g_1 = 2(i-j)$ であることが証明できる。F を $\frac{1}{c} F$ でとりかえることにより，最初から $c = 1$，つまり

$$F_m = p^i (2q^2 - p)^j \qquad (i, j \text{の少くとも一方は0でない}).$$

と仮定してよい．　$d = m - 1$ のとき(5.3)は

$$X_1 F_{m-1} = g_1 q F_{m-1} + g_0 F_m - X_0 F_m$$

となるが，上の補題のみを用いて $F_{m-1} \equiv 0 \mod p^i (2q^2 - p)^j$

が示せる。よって $F_{m-1}=0$. さらに $g_0=0$ もこれから導ける。

同様にして，つまり漸化式 ($d=m-2$) と補題より，多項式の計算は一切しなくて

$$F_{m-2}=j\lambda p^{i}(2g^{2}-p)^{j-1}$$

が示せる。

さらに漸化式 ($d=m-3$) と補題より，ここでも計算は必要なくて，

$$p(2g^{2}-p)F_{m-3}=cg\,p^{i}(2g^{2}-p)^{j} \qquad (c\in K)$$

が示せる。

これを漸化式に代入すると，p, g についての3次式の計算により

$$c=2\lambda\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\quad i\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=j\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)$$

が導かれる。とくに $\alpha=\dfrac{i+j}{2(i-j)}$ である。

以上より，不変曲線が存在すれば α は有理数であり $|\alpha|\geqq\frac{1}{2}$ であることが証明できた。即ち§3 の I の答が得られた。

上の2つの補題のみを用いて，§3 の II 不変曲線の決定を行うことができる。この場合も計算は，ほとんど必要なし。

我々の方法の特色をまとめておこう。

(1) 微分作用素$X(\alpha)$のNewton多角形より, p, qの重さを決める.

(2) p, qの多項式が $2q^2-p$, p の中で割り切れることを主張する補題を使う. これらの補題は可換図式(5.4), (5.5)から導かれる.

(2)により, 計算を避けることができる。このことはP_{III} P_V, P_{VI}の研究で重要になって来る。一方, P_{III}, P_V, P_{VI}の研究においては, 2種類の重さを導入する必要がある。このとき(1)が力を発揮する。詳しいことは[UW], [W]を参照されたい。

表

	パラメータ空間	Weyl群	Wall上の古典解	代数関数解
P_I	$\mathbb{C}^0$	Id		
P_{II}	$\mathbb{C}$	$\widehat{A}_1$	Airy関数	Yablonskii-Vorob'ev多項式
P_{III}	$\mathbb{C}^2$	$\widetilde{B}_2$	Bessel関数	
P_{IV}	$\mathbb{C}^2$	$\widehat{A}_2$	Hermite関数	Hermite多項式, 岡本多項式
P_V	$\mathbb{C}^3$	$\widehat{A}_3$	合流超幾何	Laguerreの多項式
P_{VI}	$\mathbb{C}^4$	$\widetilde{D}_4$	超幾何関数	Jacobiの多項式

References

[M 1] Y. Murata, *Rational solutions of the second and the fourth Painlevé equations*, Fuccialaj Ekvacioj **28** (1985), 1–32.

[M 2] ———, Preprint ?.

[N] K. Nishioka, *A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent*, Nagoya Math. Journal **109** (1988), 63–67.

[No] M. Noumi, Private cominucations (1986, 1987).

[O 1] K. Okamoto, *Studies on the Painlevé equations III*, Math. Ann. **275** (1986), 221–255.

[O 2] ———, Private note (1987).

[S] H. A. Schwarz, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeopmetrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes dargestellt*, J. Reine Angew. Math. **75** (1873), 292–335.

[U 1] H. Umemura, *On the irreducibilty of the first differential equation of Painlevé*, Nagoya Math. J. **117** (1990), 125–171.

[U 2] H. Umemura, *Birational automorphism groups and differential equations*, Nagoya Math. J. **119** (1990), 125–171.

[UW 1] H. Umemura and H. Watanabe, *On the classification of the solutions of the second and the fourth Painlevé equations*, in preparation.

[UW 2] ———, *On the classification of the solutions of the third Painlevé equation*, in preparation.

[W] H. Watanabe, *On the solutions of the fifth and sixth Painlevé equations*, in preparation.