数理解析研究所講究録
第 860 巻 1994 年 12-18

m-accretivity を導く条件 $\mathrm{Re}\,(Au, Su) \geq 0$ と $\mathrm{Re}\,(A^*u, S^{-1}u) \geq 0$ について

東京理科大学理学部　宮島　静雄 (Shizuo Miyajima)

§1. Introduction

ここでは Hilbert 空間上の線型作用素のみを取り扱う. X を内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ Hilbert 空間とすると, X 上の contraction C_0-半群の生成作用素（の符号を変えたもの）は m-accretive という性質で特徴づけられることはよく知られている. 念のために述べておくと, 稠密に定義された X 上の線型作用素 A が accretive であるとは

$$\mathrm{Re}\,(Au, u) \geq 0 \quad (\forall u \in D(A))$$

がなりたつことであり, さらに A が 値域条件

$$R(\lambda + A) = X \quad (\exists \lambda > 0) \text{（実は } \forall \lambda > 0 \text{ と同等）}$$

をみたすとき, A は m-accretive であると言うのであった. ここで $D(A)$ は A の定義域, $R(\lambda + A)$ は $\lambda + A$ の値域を表わす.

Remark 1.1. A が稠密に定義された accretive operator であれば, A は closable になり A の closure も accretive になる.

Remark 1.2. non-negative self-adjoint operator は m-accretive operator の重要な例である.

応用上では, 微分作用素などとして稠密に定義された作用素が m-accretive であることを確かめることが重要な問題になる. この際 accretive であることを確認するのは比較的容易にできることが多いが, 値域条件の成立を示すことは一般にかなり難しい. 値域条件の成立を示す重要な方法として摂動理論によるものがあるが, この内の特異摂動に関連した判定条件として, non-negative self-adjoint operator を補助に用いる Okazawa と Sohr によるものがある. 以下ではこれらに関係したことのみ扱うので, 次の (H) を常に仮定しておく :

(H)　S は Hilbert 空間 X 上の non-negative self-adjoint operator で,
A は稠密に定義された closed accretive operator である.

(H) の下でさらに $D(A) \supset D(S)$ のとき Okazawa [3] は次の条件を考察した :

(O)　$\mathrm{Re}\,(Au, Su) \geq 0 \quad (\forall u \in D(S))$.

また Sohr [6] は (H) に加え S が有界な逆を持つときに次の条件を導入した :

(S)　$\mathrm{Re}\,(A^*u, S^{-1}u) \geq 0 \quad (\forall u \in D(A^*))$.

(O), (S) から共に, A が m-accretive であることが導かれるが, これらは同値な条件ではない. しかし (O), (S) の前提にある $D(A) \supset D(S)$ と有界な S^{-1} の存在を共に仮定すれば (O) と (S) は同値になることが容易に分る. これらの事情から次のことが問題として考えられる.

<u>問題 1</u> (O), (S) は共に「A が m-accretive」という条件より強いわけであるが,「A が m-accretive」という条件に何かを加えて逆に (O) や (S) を導けないか?

<u>問題 2</u> (O), (S) はかなり近い条件であるが同値ではない. これらの二つを一つにまとめて, $D(A) \supset D(S)$ とか S^{-1} の存在が言えるときには (O), (S) にそれぞれ同値になる条件を設定できないか?

§2. 問題 1 について

まず発展方程式の理論に現れる, 生成作用素に対して許容的な部分空間という概念を思い出そう.

Definition 2.1. $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ は Hilbert 空間 X 上の C_0-半群とし, Y を X の部分空間で, それ自身ノルム $\|\cdot\|_Y$ で Banach 空間になっており, 自然な埋め込み写像 $Y \to X$ が連続になっているものとする. このとき Y が A-許容であるとは, $e^{-tA}Y \subset Y$ で $\{e^{-tA}|_Y\}_{t\geq 0}$ が Y 上の C_0-半群になることを言う.

Remark 2.2. Y が A-許容のとき Y 上の C_0-半群 $\{e^{-tA}|_Y\}_{t\geq 0}$ の生成作用素 (の符号を変えたもの) は Y における A の部分 A_Y になる. ここで A_Y は

$$\begin{cases} D(A_Y) := \{y \in Y \mid y \in D(A),\ Ay \in Y\} \\ A_Y y := Ay \end{cases}$$

で定義されるものである.

問題 1 については次の定理が一つの解答を与える.

Theorem 2.3. (H) かつ $D(A) \supset D(S)$ とすると,

$$(O) \iff (A): \begin{cases} \text{(i) } A \text{ は } m\text{-accretive}, \\ \text{(ii) } D(S^{1/2}) \text{ は } A\text{-許容で次が成り立つ：} \\ \quad \|S^{1/2}e^{-tA}u\| \leq \|S^{1/2}u\| \quad (\forall t \geq 0 \text{ and } \forall u \in D(S^{1/2})) \end{cases}$$

この定理の "$\Rightarrow$" の部分は Kato [2] が示し, それを少し一般化したものが Okazawa–Unai [4] において双曲型発展方程式の発展作用素の存在を示すのに応用された. また, 実は非線型半群の枠組みで (A) の (i) を前提として $(O) \iff$ (ii) in (A) が以前から知られていた (H. Brezis [1, Thérème 4.4]) ことが岡澤氏により指摘された. ここでは "$(O) \Leftarrow (A)$" の別証明を与えておきたい.

証明のために 3 つの補題を準備しておく.

Lemma 2.4. A, S は (H) を満たし，さらに Theorem 2.3 の (A) が成り立っているとする．このとき A の吉田近似 A_n $(n \in N)$ は任意の $u \in D(S^{1/2})$, $t \geq 0$ に対して $\|S^{1/2}e^{-tA_n}u\| \leq \|S^{1/2}u\|$ をみたす．

Proof. 仮定から，任意の $u \in D(S^{1/2})$ と $\lambda > 0$ に対して $t \mapsto e^{-\lambda t}S^{1/2}e^{-tA}u$ はノルム連続であることが容易に分かる．従って $\int_0^\infty e^{-\lambda t}S^{1/2}e^{-tA}u\,dt$ が X での Riemann 積分として存在する．これより，$S^{1/2}$ が閉作用素ということを使って

$$\begin{aligned}\|S^{1/2}(\lambda + A)^{-1}u\| &= \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}S^{1/2}e^{-tA}u\,dt\right\| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|S^{1/2}u\|\,dt = \frac{1}{\lambda}\|S^{1/2}u\|\end{aligned}$$

ということが分かる．故に，任意の $u \in D(S^{1/2})$ と $n \in N$ に対して

$$\begin{aligned}\left\|S^{1/2}e^{-nt}\sum_{k=0}^{N}\frac{(nt)^k}{k!}[n(n+A)^{-1}]^k u\right\| &\leq e^{-nt}\sum_{k=0}^{N}\frac{(nt)^k}{k!}\|S^{1/2}[n(n+A)^{-1}]^k u\| \\ &\leq e^{-nt}\sum_{k=0}^{N}\frac{(nt)^k}{k!}\|S^{1/2}u\| \\ &\leq \|S^{1/2}u\|\end{aligned}$$

となる．$e^{-nt}\sum_{k=0}^{N}\frac{(nt)^k}{k!}[n(n+A)^{-1}]^k u \to e^{-tA_n}u \quad (N \to \infty)$ と $S^{1/2}$ が弱閉ということを合わせると，これから $e^{-tA_n}u \in D(S^{1/2})$ と $\|S^{1/2}e^{-tA_n}u\| \leq \|S^{1/2}u\|$ が得られる．□

Lemma 2.5. A, S は (H) を満たし，さらに Theorem 2.3 の (A) が成り立っているとする．このとき A の吉田近似 A_n は，任意の $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$, $n \in N$ と $u \in D(S^{1/2})$ に対して $\|S^{1/2}e^{-t(A_n+\varepsilon S)}u\| \leq \|S^{1/2}u\|$ を満たし，$D(S^{1/2})$ は $(A_n + \varepsilon S)$-許容になる．

Proof. A_n は X 上の有界な accretive operator で，εS は X で m-accretive なので，operator sum $A_n + \varepsilon S$ は定義域 $D(S)$ を持つ m-accretive operator になる．従って Trotter の product formula (Pazy [5, p. 92]) が使える：

$$e^{-t(A_n+\varepsilon S)}u = \lim_{k\to\infty}\left(e^{-\frac{t}{k}A_n}e^{-\frac{t\varepsilon}{k}S}\right)^k u \quad (u \in X). \tag{1}$$

$\|S^{1/2}e^{-\frac{t\varepsilon}{k}S}u\| \leq \|S^{1/2}u\|$ ということと Lemma 2.4 から，任意の $u \in D(S^{1/2})$ に対して $\|S^{1/2}e^{-\frac{t}{k}A_n}e^{-\frac{t\varepsilon}{k}S}u\| \leq \|S^{1/2}u\|$ が分かる．帰納的に $\|S^{1/2}\left(e^{-\frac{t}{k}A_n}e^{-\frac{t\varepsilon}{k}S}\right)^k u\| \leq \|S^{1/2}u\|$ が得られるので，(1) と $S^{1/2}$ の弱閉性により結論が得られる．□

Lemma 2.6. A, S は (H) を満たし，さらに Theorem 2.3 の (A) が成り立っているとする．このとき任意の定数 $c > 0$ に対して Theorem 2.3 の (A) において S を $S + c$ で置き換えたものが成り立つ．

Proof. (A) の中のノルム不等式以外は，任意の $c>0$ に対して $D((S+c)^{1/2})=D(S^{1/2})$ と $\|(S+c)^{1/2}v\|^2=\|S^{1/2}v\|^2+c\|v\|^2$ $(v\in D(S^{1/2})$ により，同値なグラフノルムを以て $D((S+c)^{1/2})=D(S^{1/2})$ が成り立つことから明か．ノルム不等式は $u\in D(S^{1/2})$ に対する次の計算から出る（$\{e^{-tA}\}$ が X 上の縮小半群であることも使っている）:

$$\begin{aligned}\|(S+c)^{1/2}e^{-tA}u\|^2 &= \|S^{1/2}e^{-tA}u\|^2+c^2\|e^{-tA}u\|^2\\ &\le \|S^{1/2}u\|^2+c^2\|u\|^2\\ &= \|(S+c)^{1/2}u\|^2\end{aligned}$$

Proof of "$(A)\Rightarrow(O)$" in Theorem 2.3:

初めに S が有界な逆を持つ場合に証明すればよいことに注意しよう．実際，Lemma 2.6 により任意の定数 $c>0$ に対し，(A) は S を $S+c$ で置き換えても成り立ち，$\mathrm{Re}\,(\tilde{A}u,(S+c)u)\ge 0$ $\quad(\forall u\in D(S))$ が示されれば $c\downarrow 0$ として (O) が得られる．

そこで S は有界な逆を持つとしよう．このとき $S\ge c>0$ なる定数 c があるので，$(u,v)_1:=(S^{1/2}u,S^{1/2}v)$ は $D(S^{1/2})$ 上の内積となり，それはグラフノルムと同値なノルムを定める．この内積をいれた空間 $D(S^{1/2})$ を Y で表そう．このとき Lemma 2.5 より任意の $n\in N$ と $\varepsilon>0$ に対して Y は $(A_n+\varepsilon S)$-許容となる．よって $A_n+\varepsilon S$ の Y における部分 $(A_n+\varepsilon S)_Y$ は m-accretive になる (cf. Pazy [5, Theorem 5.5])．即ち，$\mathrm{Re}\,((A_n+\varepsilon S)u,u)_1\ge 0$ が任意の $u\in D(A_n+\varepsilon S)_Y$ に対して成り立つ．言い換えると，

$$\mathrm{Re}\,(S^{1/2}(A_n+\varepsilon S)u,S^{1/2}u)\ge 0 \tag{2}$$

が $(A_n+\varepsilon S)u\in D(S^{1/2})$ なる $u\in D(S^{1/2})$ に対して成り立つ．次に $(A_n+\varepsilon S)S^{-1}$ が X 上の位相同型になることに注意しよう．このことは $S\ge c>0$ と $A_n+\varepsilon S=[A_n+\varepsilon(S-c)]+\varepsilon c$ から分かる ($A_n+\varepsilon(S-c)$ は定義域を $D(S)$ として m-accretive であることに注意)．従って $\mathcal{D}:=\{u\in X\mid (A_n+\varepsilon S)S^{-1}u\in D(S^{1/2})\}$ は X で稠密である．任意の $u\in\mathcal{D}$ は明らかに $S^{-1}u\in D(S^{1/2})$ と $(A_n+\varepsilon S)S^{-1}u\in D(S^{1/2})$ を満たすので，(2) より

$$\mathrm{Re}\,((A_n+\varepsilon S)S^{-1}u,u)=\mathrm{Re}\,(S^{1/2}(A_n+\varepsilon S)S^{-1}u,S^{1/2}(S^{-1}u))\ge 0$$

が成り立つ．$\mathcal{D}$ が X で稠密なことから，これは $\mathrm{Re}\,((A_n+\varepsilon S)S^{-1}u,u)\ge 0$ が任意の $u\in X$ で成り立つことを意味する．$\varepsilon>0$ は任意だったので，どんな $u\in X$ に対しても $\mathrm{Re}\,(A_nS^{-1}u,u)\ge 0$ が得られ，従って $u\in D(S)$ に対しては $\mathrm{Re}\,(A_nu,Su)\ge 0$ となる．$n\to\infty$ とした極限移行により，$u\in D(S)$ に対して $\mathrm{Re}\,(Au,Su)\ge 0$ が成り立つことが分かる．□

一方，条件 (S) についても同様なことが言える．

Theorem 2.7. (H) かつ有界な S^{-1} が存在するとすると，

$$(S)\iff(A):\begin{cases}\text{(i) } A \text{ は } m\text{-accretive,}\\ \text{(ii) } D(S^{1/2}) \text{ は } A\text{-許容で次が成り立つ：}\\ \quad \|S^{1/2}e^{-tA}u\|\le\|S^{1/2}u\| \quad (\forall t\ge 0 \text{ and } \forall u\in D(S^{1/2}))\end{cases}$$

Proof. $(S) \Longrightarrow (A)$ **の証明：** (i) の証明：$\lambda > 0$ を任意に取ったとき $R(A+\lambda)^{\perp} = 0$ を示せばよい．$x \in R(A+\lambda)^{\perp}$ とすると，$x \in D(A^*)$ で $(A^*+\lambda)x = 0$ なので，

$$0 = \mathrm{Re}\,((A^*+\lambda)x, S^{-1}x) = \lambda(x, S^{-1}x) + \mathrm{Re}\,(A^*x, S^{-1}x) \geq \lambda(x, S^{-1}x) \geq 0$$

より，$(x, S^{-1}x) = 0$ となり $x = 0$ が得られて証明される．

(ii) の証明：A が m-accretive なことが分かったので，A の吉田近似 $A_n := A(I + \frac{1}{n}A)^{-1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) が意味を持つ．また A^* も m-accretive になる．A_n が S の吉田近似 $S_n := S(I + \frac{1}{n}S)^{-1}$ に関して条件 (O) をみたすことを示す．まず $S_n > 0$ が有界で $S_n^{-1} = S^{-1} + \frac{1}{n}$ であることと，A_n が有界な m-accretive 作用素になることに注意しておこう．以下の計算は Sohr [6] による．$x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ に対し，$y_n := S_n x$, $z_n := (I + \frac{1}{n}A^*)^{-1} y_n$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(A_n x, S_n x) &= \mathrm{Re}\,(A_n {S_n}^{-1} y_n, y_n) = \mathrm{Re}\,(A_n(S^{-1} + \tfrac{1}{n}) y_n, y_n) \\
&\geq \mathrm{Re}\,(A_n S^{-1} y_n, y_n) = \mathrm{Re}\,(S^{-1} y_n, {A_n}^* y_n) \\
&= \mathrm{Re}\,(S^{-1}(I + \tfrac{1}{n}A^*) z_n, A^* z_n) \\
&\geq \mathrm{Re}\,(S^{-1} z_n, A^* z_n) \geq 0.
\end{aligned}$$

このことから定理 2.3 により，$x \in X$, $t \geq 0$ に対して

$$\|S_n^{1/2} e^{-tA_n} x\| \leq \|S_n^{1/2} x\| \leq \|S^{1/2} x\| \tag{3}$$

が得られる．ただし $x \notin D(S^{1/2})$ のときは $\|S^{1/2}x\| = \infty$ と約束する．任意の $z \in D(S^{1/2})$ に対して $n \to \infty$ のとき $S_n^{1/2} z \to S^{1/2} z$ であり，任意の $x \in X$ に対して $e^{-tA_n} x \to e^{-tA} x$ であるから，

$$(S_n^{1/2} e^{-tA_n} x, z) = (e^{-tA_n} x, S_n^{1/2} z) \to (e^{-tA} x, S^{1/2} z)$$

が成り立つ．よって，$x \in D(S^{1/2})$ のとき (3) により $|(e^{-tA}x, S^{1/2}z)| \leq \|S^{1/2}x\|\,\|z\|$ となり，$e^{-tA}x \in D(S^{1/2})$ と $\|S^{1/2} e^{-tA} x\| \leq \|S^{1/2} x\|$ が示された．

$(S) \Longleftarrow (A)$ **の証明：** 記号 Y で $D(S^{1/2})$ に内積 $(u, v)_Y := (S^{1/2}u, S^{1/2}v)$ を入れた Hilbert 空間を表わす．$y \in Y$ に対しては Y でのノルム $\|y\|_Y$ は $\|S^{1/2}y\|$ に等しく，このノルムは $D(S^{1/2})$ のグラフノルムと同値である．(A) と Lemma 2.4 より A の吉田近似 A_n ($n \in \boldsymbol{N}$) に対し $e^{-tA_n}|_Y$ は Y 上の縮小 C_0-半群をなす．その生成作用素は $-A_n$ の Y での部分で，それは $-A_n$ の Y への制限に他ならない．これを見るには，resolvent を表わす積分

$$(\lambda + A)^{-1} y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA} y\, dt \qquad (y \in Y,\ \lambda > 0) \tag{4}$$

の右辺が Y の位相で収束することと $A_n = n - n^2(n+A)^{-1}$ から Y が A_n で不変になることに注意すればよい．従って Lumer–Phillips の定理から任意の $y \in Y$ に対して

$$\mathrm{Re}\,(S^{1/2} A_n y, S^{1/2} y) = \mathrm{Re}\,(A_n y, y)_Y \geq 0.$$

特に $u \in D(S) \subset D(S^{1/2})$ とすると，$\mathrm{Re}\,(A_n u, Su) = \mathrm{Re}\,(S^{1/2} A_n u, S^{1/2} u) \geq 0$ となるので，任意の $v \in X$ に対して

$$\mathrm{Re}\,(A_n^* v, S^{-1} v) = \mathrm{Re}\,(A_n S^{-1} v, S(S^{-1} v)) \geq 0.$$

A_n^* は m-accretive operator A^* の吉田近似でもあるので，上式で $n \to \infty$ として

$$\mathrm{Re}\,(A^* v, S^{-1} v) \geq 0 \qquad (v \in D(A^*))$$

が得られ，命題が証明される．□

以上より A の生成する半群を中心にみれば (O) と (S) は同等なものであると分る．

§3. 問題 2 について

(H) の下で次の条件は常に意味がある：

(I) $\quad \forall \varepsilon > 0\ \forall u \in D(A^*)\ \ \mathrm{Re}\,(A^* u, (S+\varepsilon)^{-1} u) \geq 0.$

前節で (S) や (O) との関連が分かった半群の性質は実は条件 (I) と同値になることが示される：

Theorem 3.1. (H) の下で

$$(I) \iff (A): \begin{cases} \text{(i) } A \text{ は } m\text{-accretive}, \\ \text{(ii) } D(S^{1/2}) \text{ は } A\text{-許容で次が成り立つ：} \\ \quad \|S^{1/2} e^{-tA} u\| \leq \|S^{1/2} u\| \quad (\forall t \geq 0 \text{ and } \forall u \in D(S^{1/2})) \end{cases}$$

Proof. 初めに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $D((S+\varepsilon)^{1/2}) = D(S^{1/2})$ と $\|(S+\varepsilon)^{1/2} v\|^2 = \|S^{1/2} v\|^2 + \varepsilon \|v\|^2$ $(v \in D(S^{1/2}))$ が成り立つことに注意しよう．
"$(I) \Longrightarrow (A)$": $\varepsilon > 0$ とすると，Theorem 2.7 を A と $S+\varepsilon$ に適用できて，A は m-accretive で，任意の $u \in D((S+\varepsilon)^{1/2}) = D(S^{1/2})$ に対して

$$\|(S+\varepsilon)^{1/2} e^{-tA} u\| \leq \|(S+\varepsilon)^{1/2} u\| \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つ．初めに注意したことから，上式で $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，(ii) が成り立つことが直ちに分る．
"$(I) \Longleftarrow (A)$": $\varepsilon > 0$, $u \in D((S+\varepsilon)^{1/2}) = D(S^{1/2})$, $t \geq 0$ とすると，仮定より

$$\|(S+\varepsilon)^{1/2} e^{-tA} u\|^2 = \|S^{1/2} e^{-tA} u\|^2 + \varepsilon \|e^{-tA} u\|^2 \leq \|S^{1/2} u\|^2 + \varepsilon \|u\|^2 = \|(S+\varepsilon)^{1/2} u\|^2$$

ということが分る．これより，Theorem 2.7 を前半と逆方向に使って，A と $S+\varepsilon$ に対して Sohr の条件 (S) が成り立つことが出るので (I) が導かれる．□

この定理と前節の定理の系として直ちに次の定理が得られる．

Theorem 3.2. (H) の下で
(a) $D(A) \supset D(S)$ ならば $(O) \iff (I)$.
(b) 有界な S^{-1} が存在するならば $(S) \iff (I)$.

References

[1] Brezis, H., "Opérateurs maximaux et monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert," North-Holland, Amsterdam–London, 1973.

[2] Kato, T.,*Singular perturbation and semigroup theory*, Lecture Notes in Mathematics No. 565, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976, 104–112.

[3] Okazawa, N., *Singular perturbation of m-accretive operators*, J. Math. Soc. Japan, **32**(1980), 19–44.

[4] Okazawa, N. and A. Unai, *Linear evolution equations of hyperbolic type in Hilbert space*, SUT J. Math., **29**(1993), 51–70

[5] Pazy, A., "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations," (Applied Mathematical Sciences 44), Springer-Verlag, N.Y., 1983.

[6] Sohr, H., *Über die Selbstadjungiertheit von Schrödinger-Operatoren*, Math. Z. **160** (1978), 255–261.