数理解析研究所講究録
第 860 巻 1994 年 71-74

3つの作用素の関連する2次不等式

北大電子科学研　安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)

非可換な2個の有界自己共役作用素 A, B の幾何学的な相互関係を取り扱う場合，それぞれを作用素 $A+iB$ の実部及び虚部として捉えると，線形作用素の数域 (numerical range) が常に複素平面の凸集合であるという Hausdorff-Toeplitz の定理が有効に働くことがある．以下では3個以上の場合について考察するが，上記のような有効な方法が見つからないので，興味ある結果が出せるのは結局は2個の場合だけであるというのが結論である．

1. 簡単な考察

A, B, C を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の有界な自己共役作用素とする．

Proposition 1. 次の *6* つの条件は互いに同値である．

(1) Hilbert 空間 $l^2_R(3)$ から $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素のなす C^*環 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への線形写像 Ψ を

$$\Psi(e_1)=A,\ \Psi(e_2)=B,\ \Psi(e_3)=C$$

で定義すると，Ψ は contraction である : $\|\Psi\|\leq 1$.

(2) $-I\leq \alpha A+\beta B+\gamma C\leq I\quad (\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2\leq 1)$.
ここで I は identity 作用素であり，作用素間の順序 $\leq$ は positivesemidefiniteness に基づくものである．

(3)$\langle x|Ax\rangle^2+\langle x|Bx\rangle^2+\langle x|Cx\rangle^2\leq\langle x|x\rangle^2\quad(\forall x\in\mathcal{H})$.

(4)$S=A+iB,\ T_1=I-C\ (\geq 0),\ T_2=I+C\ (\geq 0)$ とおくと

$$|\langle x|Sx\rangle|\leq\sqrt{\langle x|T_1x\rangle\cdot\langle x|T_2x\rangle}\qquad(\forall x\in\mathcal{H}).$$

(5) $\mathbb{M}_2$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への線形写像 Φ を

$$\Phi(E_{11})=T_1,\ \Phi(E_{22})=T_2,\ \Phi(E_{12})=S,\ \Phi(E_{21})=S^*$$

で定義すると，Φ は *positive* である，すなわち

$$X\geq 0\Longrightarrow\Phi(X)\geq 0.$$

(6) $\lambda^2T_1+\lambda(e^{i\theta}S+e^{-i\theta}S^*)+T_2\geq 0\quad(\forall\lambda\geq 0;\forall\theta,0\leq\theta\leq 2\pi)$.

これらの同値な条件を，A,B,C,I に関連した作用素不等式，またはある性質を持った作用素の存在で特徴付けられないかというのが問題の発端である．具体的はに，α,β,γ や $x\in\mathcal{H}$ 及び λ,θ 等を消去できないかということである．

しかし現状では殆ど絶望的であり，一般的な回答は期待しえないように見える．意味のある結論は A,B,C の中の少なくとも1個が 0 の場合にしか得られていない．

2. A, B, C のうち 1 つが 0 の場合

Proposition 2. $C=0$ のとき．次の条件はすべて上記の条件等と同値である．ここで $S=A+iB$ である．

(4a) $w(S)\equiv\sup\{|\langle x|Sx\rangle|:\|x\|=1\}\leq 1$; (numericalcontraction)

(4b) $2+e^{i\theta}S+e^{-i\theta}S^*\geq 0 \qquad (\forall\theta, 0\leq\theta\leq 2\pi)$.

(4c) 次のような Y, Z が存在する：

$$2+e^{i\theta}S+e^{-i\theta}S^*=(Y+e^{i\theta}Z)^*(Y+e^{i\theta}Z) \qquad (\forall\theta, 0\leq\theta\leq 2\pi).$$

(4d) $S=2(I-D^*D)^{1/2}D$ の条件を満たす contraction$D$ が存在する．

(4e) 次の条件を満たす自己共役作用素 X が存在する：

$$\begin{pmatrix} I+X & S \\ S^* & I-X \end{pmatrix}\geq 0.$$

これらはすべて numerical contraction の特徴付として知られていることである (e.g. [1])．

同じことを別な角度から見てみよう．

Proposition 3. $B=0$ のとき，次の条件はすべて上記の条件と同値である．

(6a) $\lambda^2T_1+2\lambda A+T_2\geq 0 \quad (\forall\lambda\in\mathbb{R})$,
ここで $T_1\equiv I+C(\geq 0), T_2=I-C(\geq 0)$ である．

(6b) 次の条件を満たす D_1, D_2 が存在する：

$$\lambda^2T_1+2\lambda A+T_2=(\lambda D_1+D_2)^*(\lambda D_1+D_2) \qquad (\forall\lambda\in\mathbb{R}).$$

(6c) 次のような $\mathbb{M}_2\longmapsto\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の *completely positive map* Θ が存在する：

$$\Phi(X)=\Theta(X)+\Theta(X^T) \qquad (\forall X\in\mathbb{M}_2).$$

システム理論では (4c) 及び (6c) は spectral factorization と呼ばれている (cf. [4])．

3. 逆向きの不等式

一見奇妙に見えるかもしれないが，逆向きの不等式式のほうがより興味ある結論を導く．ここで逆向きの不等式とは (3) ですべての $x\in\mathcal{H}$ について逆号の不等式が成り立っていることである：

(i) $\langle x|Ax\rangle^2+\langle x|Bx\rangle^2+\langle x|Cx\rangle^2\geq\langle x|x\rangle^2 \qquad (\forall x\in\mathcal{H})$.

ここでは数域 (numerical range) $\mathbf{W}(\cdot)$ の凸性が唯一の道具である．

Proposition 4. $B=0$ のとき，次の条件は *(i)* と同値
(ia)$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2=1$ なるものが存在すして，$\alpha A+\beta C \geq I.$

これは，複素平面で開単円板 $\{z : |z| < 1\}$ と 凸集合である数域 (numerical range) $\mathbf{W}(A+iC)$ が共通部分を持たず直線で分離できることの言い換えである．

更に $A \geq 0$ のときには $\mathbf{W}(A+iC)$ が右半平面に含まれるからもう 1 歩進みうる．

Propositon 5. $B=0$ でさらに $A \geq 0$ のとき，次の条件は共に *(i)* に同値である．
(iia) $\alpha>0, \beta \geq 0, \alpha^2+\beta^2=1$ なるものが存在して，$\alpha A+\beta C \geq I$　または　$\alpha A-\beta C \geq I.$
(iib) $\lambda>0$ が存在して，$A \geq \frac{1}{2}\{\lambda T_1+\lambda^{-1}T_2\}.$

4. Minimax 定理

以上の簡単な考察から古典的な minimax 定理が導かれる (e.g. Duffin [3], Markus [4]).
Theorem 6. *(*Duffin[3]*)* $T_1, T_2 \geq 0$ にたいして

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\sqrt{\langle x|T_1x\rangle \cdot \langle x|T_2x\rangle}}{\langle x|x\rangle} = \inf_{\lambda>0}\|\frac{1}{2}\{\lambda T_1+\lambda^{-1}T_2\}\|.$$

が成り立つ．

これを minimax 定理と呼ぶのは

$$\text{右辺} = \inf_{\lambda>0}\sup_{\|x\|=1}\langle x|\frac{1}{2}(\lambda T_1+\lambda^{-1}T_2)x\rangle$$

及び

$$\text{左辺} = \sup_{\|x\|=1}\inf_{\lambda>0}\langle x|\frac{1}{2}(\lambda T_1+\lambda^{-1}T_2)x\rangle$$

であることによる．

Duffin [3] の証明は凸性を使うものではない．

具体的に minimax 値が計算できる場合としては古典的な Kantorovic の結果がある．

Corollary 7. *(*Kantorovic'formula*).* $T>0$ とすると，

$$\sqrt{\langle x|Tx\rangle \cdot \langle x|T^{-1}x\rangle} \leq \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\lambda_1(T)}{\lambda_\infty(T)}}+\sqrt{\frac{\lambda_\infty(T)}{\lambda_1(T)}}\right\}\|x\|^2.$$

5. 関連した minimax 定理

Theorem 8. *(*Asplund − Ptak[2]*).* F, G を有界線形作用素とすると

$$\sup_{\|x\|\le 1}\inf_{\lambda\in\mathbb{I}}\|Fx+\lambda Gx\| = \inf_{\lambda\in\mathbb{I}}\sup_{\|x\|\le 1}\|Fx+\lambda Gx\|$$

Duffin's minimax 定理 は Asplund-Ptak の定理から導くことができる.

Duffin's minimax 定理が作用素の数域の凸性と関係したいたように Asplund-Ptak の minimax 定理も一般化された数域の凸性に関係している.

Theorem 9. *(*Asplund − Ptak*)* 有界線形作用素 F, G にたいして

$$\mathbf{W}(F,G) \equiv \{(Re\langle x|Fy\rangle, Re\langle x|Gy\rangle) \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\|, \|y\| \le 1\}$$

とすると, $\mathbf{W}(F,G)$ の *closure* は凸集合である.

6. 文献

[1] T. Ando, *Structure of operators with numerical radius one*, Acta Sci. Math. (Szeged) **34** (1973), 11-15.
[2] E. Asplund and V. Ptak, *A minimax inequality for operators and a related numerical range*, Acta Math. **126** (1971), 53-62.
[3] R. J. Duffin, *A minimax theory for overdamped networks*, J. Rational Mech. Anal. **4** (1955), 221-233.
[4] A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Transl. Math. Monographs 71, Amer. Math. Soc., 1988.